
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

FRANCESCO GHERARDELLI

Varietà complesse a struttura grassmanniana

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 76 (1984), n.3, p. 182–188.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1984_8_76_3_182_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geometria. — *Varietà complesse a struttura grassmanniana.* Nota di FRANCESCO GHERARDELLI, presentata (*) dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — We define and study the notions of connections and structures of grassmannian type on complex manifolds.

1. In [3] e [4] S. Kobayashi e T. Ochiai considerano le varietà complesse compatte, che hanno struttura proiettiva (olomorfa); in particolare ottengono la classificazione completa di quelle di dimensione complessa due.

Una varietà complessa M di dimensione complessa n ammette una struttura proiettiva se possiede un atlante $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ tale che φ_α è omeomorfismo analitico di U_α su un aperto di $\mathbf{CP}^n$ e inoltre per ogni coppia (α, β) tale che $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, il cambiamento di coordinate $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ è dato da una proiettività di $\mathbf{CP}^n$.

Tale nozione può essere generalizzata sostituendo a $\mathbf{CP}^n$ un qualsiasi spazio complesso omogeneo. In questa Nota si considera il caso in cui lo spazio omogeneo è la grassmanniana $Gr(n+m, m)$ dei $\mathbf{C}^m$ di $\mathbf{C}^{n+m}$ considerata come quoziente di $PGL(n+m, \mathbf{C})$.

Nello studio delle varietà a struttura proiettiva si presenta naturale la nozione di connessione proiettiva olomorfa (cfr. [1], [2]). Le connessioni di tipo grassmanniano, qui definite, hanno un ruolo perfettamente analogo nei riguardi delle varietà modellate su varietà di Grassmann. Ciò premesso, lo studio di tali varietà si imposta in modo del tutto analogo a quello delle varietà a connessione proiettiva.

La nozione di connessione e di struttura grassmanniana può essere data anche per varietà differenziabili, riferendosi allora a grassmanniane reali.

In un lavoro successivo, spero di poter dare qualche risultato sul problema della classificazione delle varietà complesse compatte a struttura grassmanniana.

2. Sia X una varietà complessa di dimensione mn e sia $S := Gr(n+m, m)$ la grassmanniana dei $\mathbf{C}^m$ di $\mathbf{C}^{n+m}$. Diremo che X ha *struttura grassmanniana di tipo (m, n)* , se esiste un atlante di X $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ tale che per ogni α , $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow S$ sia omeomorfismo analitico su un aperto di S e per ogni coppia (α, β) tale che $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ il cambiamento di coordinate $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ è dato da un automorfismo di S indotto da una proiettività $g \in PGL(n+m, \mathbf{C})$.

(*) Nella seduta del 10 marzo 1984.

Come è ben noto S si può anche considerare come quoziente dello spazio $\Sigma \subset \mathbb{C}^{m(n+m)}$ delle matrici $m \times (n+m)$ di rango m : Σ è fibrato su S con fibre omeomorfe a $GL(m, \mathbb{C})$.

Consideriamo su S un sistema di « coordinate non omogenee », supponendo che se

$$A = \begin{pmatrix} a_l^1 & \dots & a_{m+n}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_l^m & \dots & a_{m+n}^m \end{pmatrix} \in \Sigma$$

la matrice

$$B = \begin{pmatrix} a_l^1 & \dots & a_1^m \\ \vdots & & \vdots \\ a_l^1 & \dots & a_m^m \end{pmatrix}$$

delle prime m righe di A sia non singolare. Allora

$$AB^{-1} = {}^t(I_m, \Omega)$$

e gli $n \cdot m$ elementi di Ω danno coordinate su un aperto affine di S . In tali coordinate un automorfismo di S (o un cambiamento di coordinate) si rappresenta con l'equazione in matrici

$$(1) \quad Y = (AX + B)(CX + D)^{-1}$$

$$\text{dove} \quad \begin{aligned} X &= (x_\rho^r) & Y &= (y_\sigma^s) & A &= (a_r^s) \\ B &= (b_\rho^s) & C &= (c_r^\sigma) & D &= (d_\rho^\sigma), \end{aligned}$$

con gli indici latini che vanno da 1 ad n , quelli greci da 1 ad m e $\det(CX + D) \neq 0$. Non è restrittivo supporre $m \leq n$.

Se A è una matrice quadrata non singolare a elementi funzioni di certe variabili x , è comoda la notazione

$$\frac{\partial}{\partial x} \log A := A^{-1} \frac{\partial A}{\partial x}.$$

È ben nota la formula

$$(2) \quad \text{Tr} \frac{\partial}{\partial x} \log A = \frac{\partial}{\partial x} \log \det A,$$

che ci sarà utile fra poco.

Consideriamo le (1) come le equazioni di un cambiamento di carte; posto $M = CX + D$, $L = A - YC$, M definisce un cociclo del fibrato tautologico

e $L \oplus {}^4M^{-1}$ un cociclo del fibrato tangente ad S .

Con facili calcoli si verifica poi la nota relazione

$$(3) \quad \text{Tr} \frac{\partial}{\partial x_\alpha^a} \log \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha^a} \log \det \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = -(m+n) \frac{\partial}{\partial x_\alpha^a} \log \det M ;$$

ne segue che le derivate seconde delle y rispetto alle x soddisfano il sistema

$$(4) \quad \frac{\partial x_\pi^b}{\partial y_\rho^r} \frac{\partial^2 y_\rho^r}{\partial x_\alpha^a \partial x_\beta^b} - \delta_\beta^b \delta_\pi^a \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha^a} - \delta_\alpha^b \delta_\pi^a \frac{\partial \phi}{\partial x_\beta^b} = 0$$

dove si è posto

$$\phi := \frac{1}{m+n} \log \det \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right),$$

e si somma rispetto a indici ripetuti in alto e in basso.

3. Mostriamo che viceversa, se le y e le x sono legate dal sistema differenziale (4), e ϕ soddisfa le condizioni di integrabilità.

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\alpha^a \partial x_\beta^b} - \frac{\partial \phi}{\partial x_\beta^b} \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha^a} = 0$$

e, naturalmente, $\det \frac{\partial y}{\partial x} \neq 0$, le y si esprimono per le x con una sostituzione lineare fratta del tipo (1).

Le 4) e 5) somigliano alle equazioni che caratterizzano le sostituzioni lineari di $\mathbf{P}^n$; simile è anche il procedimento di integrazione.

Si ha

$$\frac{\partial^2 e^{-\phi}}{\partial x_\alpha^a \partial x_\beta^b} = -e^{-\phi} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\alpha^a \partial x_\beta^b} - \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha^a} \frac{\partial \phi}{\partial x_\beta^b} \right)$$

e quindi per le 5), se $a=b$ o $\alpha=\beta$

$$\frac{\partial^2 e^{-\phi}}{\partial x_\alpha^a \partial x_\beta^b} = 0.$$

Quindi $e^{-\phi}$ è un polinomio nelle x , lineare in ciascuna variabile e di grado $\leq m$: $e^{-\phi} =: P(x)$.

Dalle 4) e dalla

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha^b} \left(e^{-\phi} \frac{\partial y_\rho^r}{\partial x_\alpha^a} \right) = e^{-\phi} \frac{\partial^2 y_\rho^r}{\partial x_\alpha^a \partial x_\beta^b} - e^{-\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha^b} \frac{\partial y_\rho^r}{\partial x_\alpha^a}$$

si ha poi

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha^b} \left(e^{-\phi} \frac{\partial y_\rho^r}{\partial x_\alpha^a} \right) = e^{-\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha^a} \frac{\partial y_\rho^r}{\partial x_\alpha^b} = - \frac{\partial P}{\partial x_\alpha^a} \frac{\partial y_\rho^r}{\partial x_\alpha^b}.$$

Poiché $\frac{\partial P}{\partial x_\alpha^a}$ non dipende né da x_β^a né da x_α^l :

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha^b} \left(P \frac{\partial y_\rho^r}{\partial x_\alpha^a} + \frac{\partial P}{\partial x_\alpha^a} y_\rho^r \right) = 0$$

cioè

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha^a} (y_\rho^r P) = : q_\rho^r$$

è indipendente da x_α^b e quindi anche

$$P y_\rho^r - q_\rho^r x_\alpha^a = : l_\rho^r$$

è indipendente da x_α^b ; posto

$$\mathcal{Q}_\rho^r := q_\rho^r x_\alpha^a + l_\rho^r$$

si ha dunque

$$(6) \quad y_\rho^r P(x) = \mathcal{Q}_\rho^r \quad (P(x) \neq 0).$$

Dalle relazioni precedenti con facili passaggi si ottiene anche

$$(7) \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x_\alpha^a \partial x_\beta^b} = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial x_\alpha^a} \frac{\partial P}{\partial x_\beta^b} - \frac{\partial P}{\partial x_\beta^a} \frac{\partial P}{\partial x_\alpha^b} \right)$$

e

$$(8) \quad \frac{\partial^2 \mathcal{Q}_\rho^r}{\partial x_\alpha^a \partial x_\beta^b} = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial x_\alpha^a} \frac{\partial \mathcal{Q}_\rho^r}{\partial x_\beta^b} + \frac{\partial P}{\partial x_\beta^b} \frac{\partial \mathcal{Q}_\rho^r}{\partial x_\alpha^a} - \frac{\partial P}{\partial x_\beta^a} \frac{\partial \mathcal{Q}_\rho^r}{\partial x_\alpha^b} - \frac{\partial P}{\partial x_\alpha^b} \frac{\partial \mathcal{Q}_\rho^r}{\partial x_\beta^a} \right).$$

Da quest'ultima relazione segue intanto che anche $\mathcal{Q}_\rho^r$ è polinomio nelle x di grado $\leq m$, lineare in ciascuna variabile.

Proveremo ora che esistono dei polinomi di primo grado

$$h_\beta^\alpha = c_r^\alpha x_\beta^r + d_\beta^\alpha \quad \text{e} \quad k_\alpha^r = a_s^r x_\alpha^s + b_\alpha^r$$

tali che, posto $H = (h_\beta^\alpha)$, $K = (k_\alpha^r)$, si ha

$$(9) \quad \det H = P$$

e

$$\mathcal{Q}_\alpha^r = h_\beta^r H_\alpha^\beta$$

ove H_α^β è il minore complementare di h_β^α in H . Finalmente, per la (6) si ha $Y = KH^{-1}$ identica alla (1).

Proveremo soltanto l'esistenza di H soddisfacente la (9): le altre affermazioni sono tutte di facile verifica.

La (7) si può scrivere

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_\alpha^a \partial x_\beta^b} = \frac{1}{P} \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x_\alpha^a} & \frac{\partial P}{\partial x_\beta^b} \\ \frac{\partial P}{\partial x_\beta^a} & \frac{\partial P}{\partial x_\alpha^b} \end{pmatrix}.$$

Derivando successivamente e riutilizzando ad ogni passo questa formula si ottiene

$$\frac{\partial^k P}{\partial x_{\alpha_1}^{a_1} \dots \partial x_{\alpha_k}^{a_k}} = \frac{1}{P^{k-1}} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x_{\alpha_1}^{a_1}} & \dots & \frac{\partial P}{\partial x_{\alpha_1}^{a_k}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial P}{\partial x_{\alpha_k}^{a_1}} & \dots & \frac{\partial P}{\partial x_{\alpha_k}^{a_k}} \end{pmatrix}$$

$k = 2, \dots, m$.

Poiché le α sono tutte diverse fra loro, si può supporre $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$.

Si vuol provare che il polinomio $P(x)$ si può scrivere nella forma data dalla (9); in particolare

$$(11) \quad P(0) = \det \begin{pmatrix} d_1^1 & \dots & d_m^1 \\ \vdots & & \vdots \\ d_1^m & \dots & d_m^m \end{pmatrix},$$

che si può supporre $\neq 0$.

Si scelgano le d_β^α in modo che valga quest'ultima relazione. Fissate così le d_β^α si determinano le c_r^α risolvendo i sistemi lineari (a determinante $\neq 0$):

$$(12) \quad \begin{cases} \sum_\alpha \Delta_\alpha^\rho c_r^\alpha = \frac{\partial P}{\partial x_\rho^r} \Big|_{x=0} \\ \rho = 1, \dots, m \end{cases}$$

per $r = 1, \dots, n$, ove con Δ_α^ρ si è indicato il complemento algebrico di d_ρ^α nella matrice $(d_\beta^\alpha)_{\alpha, \beta = 1, \dots, m}$.

Le c_r^α così determinate risolvono il problema; infatti (per le (10) e (12)) i coefficienti dei monomi di grado k del polinomio $P(x)$ sono dati da

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k P}{\partial x_{\alpha_1}^{a_1} \dots \partial x_{\alpha_k}^{a_k}} \Big|_{x=0} &= \frac{1}{P(0)^{k-1}} \det \begin{pmatrix} \Delta_{\beta_1}^{\alpha_1} c_{a_1}^\beta & \dots & \Delta_{\beta_1}^{\alpha_k} c_{a_k}^\beta \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{\beta_k}^{\alpha_1} c_{a_1}^\beta & \dots & \Delta_{\beta_k}^{\alpha_k} c_{a_k}^\beta \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{P(0)^{k-1}} \det \left\{ \begin{pmatrix} \Delta_1^{\alpha_1} & \dots & \Delta_m^{\alpha_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_1^{\alpha_k} & \dots & \Delta_m^{\alpha_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{a_1}^1 & \dots & c_{a_k}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ c_{a_1}^m & \dots & c_{a_k}^m \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

D'altra parte la stessa derivata k -esima del polinomio a primo membro della (9), calcolata per $x=0$ è data da

$$\det \begin{pmatrix} d_1^1 & \dots & c_{a_1}^1 & \dots & c_{a_2}^1 & \dots & c_{a_k}^1 & \dots & d_m^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ d_1^m & \dots & c_{a_1}^m & \dots & c_{a_2}^m & \dots & c_{a_k}^m & \dots & d_m^m \end{pmatrix}$$

$\alpha_1 \qquad \alpha_2 \qquad \alpha_k$

che coincide coll'espressione precedente per noti teoremi sui determinanti.

4. Su un ricoprimento opportuno $\mathcal{U} = \{U, V, \dots\}$ di X il primo membro della (4) definisce un cociclo c_{UV} di $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \Omega^1 \otimes \Omega^1 \otimes \Theta)$ (Ω^1, Θ fasci delle 1-forme olomorfe e dei vettori olomorfi tangenti).

Se tale cociclo è un cobordo, la cocatena di cui è cobordo si dirà una connessione grassmanniana o di tipo grassmanniano. In coordinate una tale connessione è il dato su $\mathcal{U}$ di un sistema di funzioni $\Pi_U = \Pi_{U_{\rho\alpha\beta}}^{r\alpha\beta}$ tali che

$$c_{UV} = \Pi_U - \frac{\partial x_U}{\partial x_V} \Pi_V \frac{\partial x_V}{\partial x_U} \frac{\partial x_V}{\partial x_U} \text{ in } U \cap V$$

e tali inoltre che soddisfanno le condizioni di simmetria

$$\Pi_{U_{\rho\alpha\beta}}^{r\alpha\beta} = \Pi_{U_{\rho\beta\alpha}}^{r\beta\alpha}.$$

Se $\Pi_U = 0$ per ogni U , $c_{UV} = 0$ definisce una struttura di tipo grassmanniano per quanto si è visto nel numero precedente. Una connessione di tipo grassmanniano si dirà piatta o integrabile se corrisponde a una struttura grassmanniana.

Nella categoria C^∞ il cociclo c_{UV} è sempre un cobordo. La corrispondente connessione grassmanniana (C^∞) si esprime per gli ordinari simboli di Christoffel di una connessione affine $\{\Gamma_U\}$:

$$\Pi_{U\pi ab}^{\beta\alpha} = \Gamma_{U\pi ab}^{\beta\alpha} - \frac{1}{m+n} \delta_b^\beta \delta_\pi^\alpha \Gamma_{U\sigma sa}^{\sigma\beta} - \frac{1}{m+n} \delta_a^\beta \delta_\pi^\alpha \Gamma_{U\sigma sb}^{\sigma\alpha},$$

con la solita convenzione per le sommatorie. Questa formula è analoga a quelle classiche per le connessioni proiettive. E l'analogia può essere spinta più avanti; in particolare si può definire un tensore di curvatura, il cui annullarsi esprime che la connessione olomorfa $\{\Pi_U\}$ è piatta, cioè equivalente alla connessione nulla.

Anche il calcolo delle classi di Chern per varietà compatta è del tutto simile a quello svolto in [1] e [3] nel caso delle varietà compatte a connessione proiettiva normale.

5. Esempi tipici di spazi a struttura grassmanniana si ottengono così. Si considera in S il dominio

$$D^{mn} = \{ Y \in S, Y^t \bar{Y} < I \}$$

(equivalente a $Y^t \bar{Y} < I$). $SU(m, n)$ è sottogruppo di $PGL(n+m, \mathbb{C})$ che lascia D^{mn} invariato. Se $H \subset SU(m, n)$ è sottogruppo discreto che operi in modo discontinuo in D^{mn} , il quoziente D^{mn}/H ha struttura grassmanniana.

Osservazione. Non è facile costruire esempi di varietà algebriche complete a struttura proiettiva (o grassmanniana) come sottovarietà di un $\mathbb{P}^N$, perché la struttura proiettiva non è indotta da quella dell'ambiente, tranne che in casi molto speciali.

BIBLIOGRAFIA

- [1] GUNNING R.C. (1978) - *On uniformization of complex manifolds: the role of connections*. « Math. Notes », 22. Princeton University Press.
- [2] KOBAYASHI S. e NAGANO T. (1964) - *On projective connections*. « J. Math. and Mech. », 13, 215-236.
- [3] KOBAYASHI S. e OCHIAI T. (1980) - *Holomorphic projective structures on compact complex surfaces*. « Math. Ann. », 249, 75-94.
- [4] KOBAYASHI S. e OCHIAI T. (1981) - *Holomorphic projective structures on compact complex surfaces II*. « Math. Ann. », 255, 519-521.