
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

MARIO TOSQUES

**Un problema di Riemann-Hilbert non regolare per
una coppia di operatori ellittici di ordine $2m$.**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 76 (1984), n.3, p. 167–174.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1984_8_76_3_167_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Equazioni a derivate parziali. — Un problema di Riemann-Hilbert non regolare per una coppia di operatori ellittici di ordine $2m$. Nota di MARIO TOSQUES (*), presentata (**) dal Corrisp. E. MAGENES.

SUMMARY. — We consider the problem of finding a couple of solutions (u^+, u^-) satisfying the following conditions (4) and (5) for a couple of two uniformly elliptic partial differential operators A^+ and A^- of order $2m$ in a non regular situation.

Il problema di determinare una coppia di soluzioni (u^+, u^-) soddisfacenti le condizioni (4) e (5) è detto il « problema di Riemann-Hilbert non regolare » (con dati di Dirichlet nulli (cfr. (6)) per una coppia di operatori A^+ ed A^- uniformemente ellittici di ordine $2m$, relativo ad un numero finito di superfici $(n-1)$ -dimensionali S_i per cui l'unione delle chiusure sconnetta un aperto limitato Ω in due aperti Ω^+ ed Ω^- su cui A^+ ed A^- sono definiti.

Il termine « non regolare » sta ad indicare che l'unione delle $\bar{S}_i$, su cui sono assegnati i dati di R.-H., non è il bordo di un aperto « regolare » Ω^- (cfr. il caso $l=1$ del Teorema).

Ad esempio se Ω è un aperto di classe C^∞ ed S_1 ed S_2 sono due varietà di classe C^∞ $(n-1)$ -dimensionali disgiunte tali che $\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2 = \partial S_1 \cup \partial S_2$, $A^+ = A^- = \Delta$ (cioè il Laplaciano) e se $(\mu_{i,0}, \mu_{i,1}) \in C^\infty(S_i) \times C^\infty(S_i)$ ($i=1, 2$), allora esso consiste nel determinare una coppia u^+ ed u^- di funzioni armoniche su Ω^+ ed Ω^- tali che (per $i=1, 2$)

$$u^+|_{S_i} - u^-|_{S_i} = \mu_{i,0} \quad , \quad \partial_\nu u^+|_{S_i} - \partial_\nu u^-|_{S_i} = \mu_{i,1}.$$

Questo problema (nel caso in cui ad esempio $(\mu_{2,0} = \mu_{2,1} = 0)$ sorge spontaneamente per il Laplaciano in un recente studio del problema diretto in Elettrocardiologia eseguito da L. Guerri, P. Colli Franzone, E. Magenes (cfr. [4], [7]).

Osserviamo che il problema di R.-H. (regolare) per l'operatore $\bar{\partial}$ è stato trattato, fra gli altri, da A. Andreotti e C.D. Hill (cfr. [2]).

Come successivamente è mostrato, una soluzione del problema di R.-H. non regolare si può ottenere mediante un processo di approssimazione con problemi del tipo di « trasmissione » (cfr. [3], [9], [11], [12]).

Infine desidero ringraziare il Prof. E. Magenes per gli utili colloqui avuti sull'argomento.

(*) Dipartimento di matematica, Pisa. Lavoro eseguito nell'ambito di un progetto nazionale di ricerca finanziato dal Ministero della Pubblica Istruzione (40% - 1982).

(**) Nella seduta del 10 marzo 1984.

Nel seguito Ω denoterà un aperto connesso e limitato di classe C^{2m+k} contenuto in $\mathbf{R}^n$, essendo k, m, n interi con $m \geq 1, n \geq 2$.

Sia Ω^- un aperto non vuoto tale che $\bar{\Omega}^- \subset \Omega$ ed esistano un numero finito di superfici $\{S_i\}_{i=1}^l$, senza bordo, per cui $\bar{S}_i$ sia una sottovarietà $(n-1)$ -dimensionale di una varietà $(n-1)$ -dimensionale di classe C^{2m+k} e tale che

$$S_i \cap S_j = \emptyset, \quad \partial\Omega^- = \bigcup_{i=1}^l \bar{S}_i.$$

Poniamo $\Omega^+ = \Omega \setminus \Omega^-$, $\Sigma = \bigcup_{i=1}^l \partial S_i$ (dove S_i denota il bordo di S_i) ed indichiamo con ν sia la normale al $\partial\Omega$ rivolta verso l'esterno di Ω che la normale ad S_i rivolta verso Ω^+ .

Supporremo che Ω^- abbia la seguente *proprietà di estensione*: per ogni $\varepsilon > 0$, ogni funzione w di $H^{1/2-\varepsilon}(\Omega^-)$ (1), prolungata a zero fuori di Ω^- , appartiene ad $H^{1/2-\varepsilon}(\Omega)$; ciò accade, ad esempio, se Ω^- ha la proprietà di cono ristretta (cfr. [6], [10]).

Siano

$$A^+ = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_{\alpha, \beta}^+ D^\beta, \quad A^- = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_{\alpha, \beta}^- D^\beta$$

due operatori definiti rispettivamente su Ω , tali che

$$(1) \quad a_{\alpha, \beta}^\pm \in C^{|\alpha|+k}(\bar{\Omega}) \quad \text{ed} \quad \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} a_{\alpha, \beta}^\pm(x) \xi^{\alpha+\beta} > E |\xi|^{2m}$$

se $x \in \Omega, \xi \in \mathbf{R}^n$, essendo $E > 0$.

È noto (cfr. ad esempio [1], [6]), che nelle ipotesi fatte esistono $2l$ sistemi $\{N_{i,j}^+\}, \{N_{i,j}^-\}, j=0, \dots, m-1; i=0, \dots, l$, di operatori differenziali di ordine

$$2m-j-1, \text{ definiti in un intorno di } S_i \text{ tali che, } \forall (u^+, u^-) \in C^{2m}(\bar{\Omega}^+) \times \\ \times C^{2m}(\bar{\Omega}^-) \text{ e } \forall v \in C_0^{2m}(\Omega) \text{ con } \text{supp } v \cap \partial\Omega^- \subset S_i,$$

sia

$$\int_{\Omega^\pm} v A^\pm u^\pm dx = a^\pm(v, u^\pm) \pm \sum_{j=0}^{m-1} \int_{S_i} \partial_\nu^j v N_{i,j}^\pm u^\pm d\sigma.$$

$$\text{dove si è posto } a^\pm(v, u^\pm) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \int_{\Omega^\pm} a_{\alpha, \beta}^\pm D^\alpha v \cdot D^\beta u^\pm dx.$$

(1) Per la definizione degli spazi $H^s(\Omega)$ ed $H^s(S_i)$, con s reale qualunque, si veda ad esempio [6], [10].

Poniamo $\forall \lambda \geq 0$, $A_\lambda^\pm = A^\pm + \lambda I$. Finalmente possiamo enunciare il

TEOREMA. *Supponiamo che valgano le definizioni e le ipotesi precedentemente elencate. Allora esiste un $\lambda_0 \geq 0$, tale che $\forall \lambda \geq \lambda_0$, $\forall f^+, f^- \in H^k(\Omega)$, $\forall \{\mu_{i,j}\}_{1=i,0=j}^{2m-1}$ tale che $\mu_{i,j} \in H^{2m+k-j-1/2}(S_i)$, esiste una distribuzione u tale che $u \in H^{1/2-\varepsilon}(\Omega)$, ($\forall \varepsilon > 0$); e per ogni aperto Λ contenuto in Ω con $d(\Lambda, \Sigma) > 0$ è*

$$(2) \quad u|_{\Lambda \cap \Omega^\pm} \in H^{2m+k}(\Lambda \cap \Omega^\pm).$$

Inoltre detta $u^+ = u|_{\Omega^+}$, $u^- = u|_{\Omega^-}$ si ha che

$$(3) \quad A_\lambda^\pm u^\pm = f^\pm \quad \text{nel senso delle distribuzioni su } \Omega^\pm;$$

per ogni $j = 0, \dots, m-1$; $i = 1, \dots, l$ e per ogni $\varepsilon > 0$

$$(4) \quad \begin{cases} \partial_\nu^j u|_{S_i}^+ - \partial_\nu^j u|_{S_i}^- = \mu_{i,j} & \text{nel senso di } H^{-j-\varepsilon}(S_i) \\ N_{i,j}^+ u|_{S_i}^+ - N_{i,j}^- u|_{S_i}^- = \mu_{i,2m-1-j}, & \text{nel senso di } H^{-2m+1+j-\varepsilon}(S_i) \end{cases}$$

$$(5) \quad \partial_\nu^j u|_{\partial\Omega}^+ = 0.$$

Infine nel caso particolare che $l=1$, cioè il $\partial\Omega^- = S_1$ allora

$$(6) \quad u^\pm \in H^{2m+k}(\Omega^\pm).$$

CENNO DELLA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA

Per ogni h intero ≥ 1 , sia Ω_h^- un aperto di classe C^{2m+k} , eventualmente vuoto, tale che

$$\left\{ x \in \Omega^- \mid d(x, \Sigma) > \frac{1}{2h} \right\} \subset \Omega_h^- \subset \left\{ x \in \Omega^- \mid d(x, \Sigma) > \frac{1}{3h} \right\}$$

e tale che $\partial\Omega_h^-$ coincida con il $\partial\Omega^-$ eccetto, eventualmente, che per i punti x di $\partial\Omega^-$, tali che $\frac{1}{3h} < d(x, \Sigma) < \frac{1}{2h}$.

Se allora $S_{i,h} = \left\{ x \in S_i \mid d(x, \Sigma) > \frac{1}{h} \right\}$ allora $S_{i,h} \subset \partial\Omega_h^-$. Dunque esiste $\bar{h}$, tale che $\forall h \geq \bar{h}$ ed $i = 1, \dots, l$, $S_{i,h} \neq \emptyset$ ed $\Omega_h^- \neq \emptyset$.

Sia ora $\{\mu_{i,j}^h\}$ tale che, per ogni $h \geq \bar{h}$, $i=1, \dots, l$, $j=1, \dots, 2m-1$,

$$(7) \quad \mu_{i,j}^h \in H^{2m+k-j-1/2}(S_i), \quad \text{supp } \mu_{i,j}^h \subset \left\{x \in S_i \mid d(x, \Sigma) > \frac{1}{2h}\right\} \subset \partial\Omega_h,$$

$$(8) \quad \mu_{i,j|S_{i,h}}^h = \mu_{i,j|S_{i,h}}, \quad \sup_{j=1, \dots, m-1} \|\mu_{i,j}^h\|_{1/2, S_i} < +\infty.$$

Tali successioni esistono per le proprietà degli spazi $H^s(S_i)$ e in particolare di $H^{1/2}(S_i)$ (cf. [6] cap. I). Da quanto precede segue che se definiamo

$$\mu_j^h(x) = \mu_{i,j}^h(x) \text{ per } x \in S_i \cap \partial\Omega, i=1, \dots, l \text{ e } \mu_j^h(x) = 0 \text{ per } x \in \partial\Omega_h - \bigcup_{i=1}^l S_i,$$

si ha che, $\forall h \geq \bar{h}$, $j=0, \dots, m-1$

$$(9) \quad \mu_j^h \in H^{2m+k-j-1/2}(\partial\Omega_h) \text{ ed } \sup_{h,j} \|\mu_j^h\|_{1/2, \partial\Omega_h} < +\infty.$$

Dunque dalle (8) e (9), per ogni $h \geq \bar{h}$, è possibile determinare w^h tale che $w^h \in H^{2m+k}(\Omega^-)$, $\text{supp } w^h \subset \bar{\Omega}_h$

$$(10) \quad \partial_\nu^j w^h|_{\partial\Omega_h^-} = \mu_j^h, \quad \partial_\nu^{j+m} w^h|_{\partial\Omega_h^-} = 0 \text{ se } j=0, \dots, m-1$$

$$(11) \quad \sup_h \|w^h\|_{1, \Omega^-} < +\infty$$

$$(12) \quad \text{per ogni aperto } \Lambda \text{ contenuto in } \Omega \text{ tale che } d(\Lambda, \Sigma) > 0, \text{ esiste } C_\Lambda \text{ tale che } \sup_h \|w^h\|_{k+2m, \Omega^- \cap \Lambda} < C_\Lambda.$$

Dunque, per la (11) e (12), si può supporre, a meno di passare ad una sottosuccessione, che la $\{w_h\}$ converga debolmente in $H^1(\Omega^-)$ ad una $w \in H^1(\Omega^-)$, tale che

$$w|_{\Omega^- \cap \Lambda} \in H^{2m+k}(\Omega^- \cap \Lambda).$$

per ogni Λ aperto in Ω tale che $d(\Sigma, \Lambda) > 0$.

Sia $\Omega_h^+ = \Omega \setminus \bar{\Omega}_h^-$ ed $*A_\lambda^\pm = *A^\pm + \lambda I$ dove $*A^\pm$ denota l'operatore aggiunto di $A^\pm$.

Per ogni $v, w \in H^m(\Omega)$, poniamo

$$(13) \quad \begin{aligned} a(v, w) &= a^+(v, w) + a^-(v, w), \quad a_\lambda(v, w) = a(v, w) + \lambda \int_\Omega v w dx \\ a^h(v, w) &= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \left\{ \int_{\Omega_h^-} a_{\alpha, \beta}^- D^\alpha w D^\beta v dx + \int_{\Omega_h^+} a_{\alpha, \beta}^+ D^\alpha w D^\beta v dx \right\} \\ a_\lambda^h(v, w) &= a^h(v, w) + \lambda \int_\Omega v w dx. \end{aligned}$$

Ora seguendo le idee introdotte in [9], con tecniche ormai divenute standard (vedi ad esempio [1], [3], [6], [8], [11], [12]), non è difficile vedere che vale la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE. *Nelle ipotesi precedenti si ha che esiste un $\lambda_0 \geq 0$, tale che*

a) $\forall \lambda \geq \lambda_0$, $\forall h \geq \bar{h}$ esiste una ed una sola w^h in $H_0^m(\Omega)$, tale che, $\forall v \in H_0^m(\Omega)$ è

$$(14) \quad a_\lambda^h(w^h, v) = \int_{\Omega_h^+} f^+ v dx + \int_{\Omega_h^-} (f^- + A_\lambda^- w^h) v dx - \sum_0^{m-1} \int_{\partial\Omega_h^-} \partial_\nu^j v \mu_{2m-1-j}^h d\sigma$$

e detta $u_+^h = u|_{\Omega^+}$, $u_-^h = u|_{\Omega^-}$ si ha che $u^h \pm \in H^{2m+k}(\Omega_h^\pm)$

$$(15) \quad A_\lambda^+ u_+^h = f^+ \text{ su } \Omega_h^+, \quad A_\lambda^- u_-^h = f^- + A_\lambda^- w^h \text{ su } \Omega_h^-$$

$$(16) \quad \partial_\nu^j u_{|\partial\Omega_h^+}^h - \partial_\nu^j u_{|\partial\Omega_h^-}^h = 0, \quad N_j^h u_{|\partial\Omega_h^+}^h - N_j^h u_{|\partial\Omega_h^-}^h = \mu_{2m-1-j}^h$$

$$(17) \quad \partial_\nu^j u_{|\partial\Omega}^h = 0.$$

Inoltre per ogni aperto $\Lambda \subset \Omega$ tale che $d(\Sigma, \Lambda) > 0$, esiste $\bar{C}_\Lambda > 0$ tale che

$$(18) \quad \|u_\pm^h\|_{k+2m, \Lambda \cap \Omega^\pm} \leq \bar{C}_\Lambda, \quad \forall h \geq \bar{h}.$$

b) Per ogni $g \in C_0^\infty(\Omega)$ e $\forall h \geq \bar{h}$ esiste una unica v^h in $H_0^m(\Omega)$ tale che $v_\pm^h \in H^{2m+k}(\Omega_h^\pm)$, $(v_\pm^h = v|_{\Omega_h^\pm})$ ed

$$(19) \quad *A_\lambda^\pm v_\pm^h = g \text{ su } \Omega_h^\pm$$

$$(20) \quad \partial_\nu^j v_{|\partial\Omega_h^+}^h - \partial_\nu^j v_{|\partial\Omega_h^-}^h = 0, \quad *N_j^h v_+^h - *N_j^h v_-^h = 0, j = 0, \dots, m-1.$$

Inoltre esiste una costante c indipendente da g e v^h , tale che

$$(21) \quad \|v^h\|_{m, \Omega} \leq c \|g\|_{-m, \Omega}, \quad \text{per ogni } h \geq \bar{h};$$

per ogni aperto regolare Π contenuto in Ω^+ , tale che $S_i \subset \partial\Pi$ per qualche i , e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $C_{\pi, \varepsilon}$ indipendente da g e v^h per cui

$$(22) \quad \|v^h\|_{2m-1/2+\varepsilon, \Pi} \leq C_{\pi, \varepsilon} \|g\|_{-1/2+\varepsilon, \Omega}, \quad \text{per ogni } h \geq \bar{h}.$$

Si osservi che nella (16) e (20), $N_{\pm}^h$ ed $*N_{\pm}^h$ sono gli operatori, associati ad $A^{\pm}$ ed $*A^{\pm}$, definiti in un intorno del $\partial\Omega_h^-$, analogamente agli $N_{i,j}^+$ sulle S_i .

Ora integrando per parti la (14), a causa delle (10), si ha

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{\Omega_h^+} u^h * A_{\lambda}^+ v dx + \int_{\Omega_h^-} u^h * A_{\lambda}^- v dx = \sum_0^{m-1} \int_{\partial\Omega_h^-} \partial_v^j u^h (*N_j^+ v - *N_j^- v) d\sigma \\ & + \int_{\partial\Omega_h^-} (\mu_j^h * N_j^h v - \mu_{j+m}^h \partial_v^j v) d\sigma + \int_{\Omega_h^+} f^+ v dx + \int_{\Omega_h^-} (f^- v + w^h * A_{\lambda}^- v) dx \end{aligned} \right.$$

$\forall h \geq \bar{h}$, $\forall v \in H_0^m(\Omega)$, tale che $v|_{\Omega_h^{\pm}} \in H^{2m}(\Omega_h^{\pm})$.

Se allora $g \in C_0^{\infty}(\Omega)$ e $\forall h \geq \bar{h}$, poniamo nella (23) la v^h data dalla $b)$ della proposizione precedente, al posto di v e teniamo conto delle (9), (11), (20), (21), (22), si ha che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste c_{ε} tale che

$$\left| \int_{\Omega} u^h g dx \right| \leq c_{\varepsilon} \|g\|_{-1/2+\varepsilon}.$$

Dunque le $\{u_h\}$ sono equilimitate in $H^{1/2-\varepsilon}(\Omega)$, quindi, a meno di passare ad una sottosuccessione, esse convergono debolmente in $H^{1/2-\varepsilon}(\Omega)$, ad una $\tilde{u}$ di $H^{1/2-\varepsilon}(\Omega)$.

Passando ora al limite nella (23), si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^-} \tilde{u} * A_{\lambda}^- v dx &= \int_{\Omega^-} (f^- v + w * A_{\lambda}^- v) dx, & \forall v \in C_0^{\infty}(\Omega^-) \\ \int_{\Omega^+} \tilde{u} * A_{\lambda}^+ v dx &= \int_{\Omega^+} f^+ v dx, & \forall v \in C_0^{\infty}(\Omega^+). \end{aligned}$$

Se ora si pone

$$u(x) = \begin{cases} \tilde{u}(x) - w(x), & \text{se } x \in \Omega^- \\ \tilde{u}(x), & \text{se } x \in \Omega^+ \end{cases}$$

le (3) sono verificate e, inoltre $u \in H^{1/2-\varepsilon}(\Omega)$ per la *proprietà di estensione* supposta su Ω^- .

Sia ora Λ un aperto contenuto in Ω tale che $d(\Lambda, \Sigma) > 0$, per la stima (18), deve esistere una sottosuccessione $\{u_{h_k}\}_k$ che converga debolmente in $H^{2m+k}(\Omega^{\pm} \cap \Lambda)$ ad una funzione di $H^{2m+k}(\Omega^{\pm} \cap \Lambda)$ che per l'unicità del limite non può che essere $\tilde{u}_{|\Omega^{\pm} \cap \Lambda}^{\pm}$, cioè la (2) è vera.

Si fissi ora i e sia Λ anche tale che $S_i \cap \Lambda \neq \emptyset$, sia h_Λ un intero sufficientemente grande così che $\Omega_h^- \cap \Lambda = \Omega^- \cap \Lambda$, $\forall h \geq h_\Lambda$ e sia

$$\Gamma : H^{2m+k}(\Omega^+ \cap \Lambda) \times H^{2m+k}(\Omega^- \cap \Lambda) \rightarrow \sum_{j=0}^{2m-1} H^{2m+k-j-1/2}(S_i \cap \Lambda)$$

la applicazione lineare e continua definita da:

$$\Gamma(w^+, w^-) = (w^+ - w^-, \partial_\nu w^+ - \partial_\nu w^-, \dots, \partial_\nu^{n-1} w^+ - \partial_\nu^{n-1} w^-, N_0^+ w^+ - N_0^- w^-, \dots, N_{m-1}^+ w^+ - N_{m-1}^- w^-).$$

D'altra parte per la (16), $\Gamma(u_+^h, u_-^h) = (0, \dots, 0, \mu_{i,m}, \dots, \mu_{i,2m-1})$ per ogni $h \geq h_\Lambda$, quindi da quanto precede segue che anche $\Gamma(\tilde{u}^+, \tilde{u}^-) = (0, \dots, \mu_{i,m}, \dots, \mu_{i,2m-1})$ e ciò implica le (5) a causa dell'arbitrarietà di Λ , analogamente si prova la (6).

Finalmente si osservi che nel caso particolare che $l=1$, cioè $\partial\Omega^- = S_1$, allora tutta la costruzione precedente di approssimazione risulta inutile così che la (6) è una conseguenza diretta della proposizione.

OSSERVAZIONE. Osserviamo che la soluzione del problema di Riemann-Hilbert non regolare, non è unica in generale.

Infatti, ad esempio già nel caso in cui $A^+ = A^- = \Delta$ (operatore di Laplace) due soluzioni (u_1^+, u_1^-) ed (u_2^+, u_2^-) del problema con gli stessi dati sul $\partial\Omega^-$ possono in generale differire per una funzione non nulla ottenuta mediante un potenziale di strato semplice (cfr. [5]) concentrato sulla superficie Σ (cfr. [4]).

In questo caso si ha unicità nell'ambito delle funzioni limitate, (cfr. [4]).

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. AGNON - *Lectures on elliptic boundary value problems.*
- [2] A. ANDREOTTI e C.D. HILL (1972) - *E.E. Levi convexity and Hans Lewy problem, part I and II.* « Am. Soc. Nor. Sup. Pisa », 26, 325-363, 767-806.
- [3] S. CAMPANATO (1957) - *Sul problema di M. Picone relativo all'equilibrio di un corpo elastico incastrato.* « Ricerche di Mat. », Vol. VI.
- [4] P. COLLI FRANZONE, L. GUERRI e E. MAGENES - *Oblique double layer potentials for the direct and invers problems of electrocardiology* (1969) (in corso di stampa su « Math. Biosc. »).
- [5] L.L. HELMS (1969) - *Introduction to Potential Theory.* Wiley, New York.
- [6] J.L. LIONS e E. MAGENES (1972) - *Non homogeneous boundary value problems and applications.* I. Grundlehren 181, Springer Verlag.
- [7] E. MAGENES (1982) - *Mathematical problems in electrocardiologic potential theory.* Proc. of the conference on methods of functional analysis and theory of elliptic equations (Naples, 1982).

- [8] E. MAGENES e C. STAMPACCHIA (1958) - *I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico*, « Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (III) », 12, 247-358.
- [9] G. STAMPACCHIA (1956) - *Su un problema relativo alle equazioni di tipo ellittico del secondo ordine*. « Ricerche di Mat. », 5, 3-24.
- [10] H. TRIEBEL (1978) - *Interpolation theory, function spaces, differential operators*. North Holland.
- [11] M. TROISI (1963) - *Sui problemi di trasmissione per due equazioni ellittiche di ordine diverso*. « Ricerche di Mat. », 12, 216-247.
- [12] M. TROISI (1964) - *Sulla regolarizzazione delle soluzioni di taluni problemi di trasmissione*. « Ricerche di Mat. », 13, 281-316.