Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Carmelo Totaro

Il problema dell'orientamento nello spazio di un satellite artificiale

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **75** (1983), n.6, p. 331–338.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1983_8_75_6_331_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1983.

Meccanica. — *Il problema dell'orientamento nello spazio di un satellite artificiale* (*). Nota di CARMELO TOTARO (**), presentata (***) dal Socio G. GRIOLI.

SUMMARY. — We examine the problem of the satellite orientation by means of proper gyroscopes actuated by eletric motors.

1. Sia $\mathscr{C}$ un sistema materiale costituito da un nucleo rigido $\mathscr{C}'$ e da un certo numero di giroscopi ad esso associati. Nella Meccanica spaziale ha particolare interesse lo studio del moto di $\mathscr{C}'$ intorno al baricentro, G, di $\mathscr{C}$ [che può differire, sia pure di poco, da quello di $\mathscr{C}'$] nell'ipotesi che il momento delle forze esterne rispetto a G sia nullo, e che dunque il momento cinetico $\mathbf{K}_G^{(R)}$ sia invariante. Anche supponendo, in prima approssimazione, l'omografia d'inerzia di $\mathscr{C}$ indipendente dal tempo, la ricerca della completa soluzione del problema è in generale ardua.

Il problema dello studio del moto di $\mathscr{C}'$ si avvicina a quello del cosiddetto giroscopio a reazione per il quale in generale si conoscono solo soluzioni approssimate ottenute con metodi iterativi [1]. Si conosce invece la soluzione generale quando si fa l'ulteriore ipotesi che $\mathscr{C}'$ sia un giroscopio [2]. L'integrale generale esprime la velocità angolare, ω, di $\mathscr{C}'$ in funzione di integrali di Fresnel. Ciò significa che ad un momento sollecitante del tipo più semplice, $\mathscr{C}'$, supposto giroscopico, risponde con una velocità, ω, il cui andamento temporale è, in generale, molto complicato.

Il presente lavoro vuole portare un contributo allo studio di un problema del genere con lo scopo di evitare le suddette complicazioni. In esso si considera il problema del moto di un corpo rigido $\mathscr{C}'$ a cui sono associati dei giroscopi con movimenti rispetto a $\mathscr{C}'$ regolabili mediante l'uso di opportuni motori elettrici che possono essere alimentati da batterie solari.

Nello schema matematico si ha un insieme di corpi rigidi vincolati reciprocamente, nel modo che sarà specificato più avanti e dei quali solo uno (il satellite $\mathscr{C}'$) può non essere un giroscopio (1).

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del « Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica » del C.N.R.
(**) Dipartimento di Matematica dell'Università di Messina.
(***) Nella seduta del 10 dicembre 1983.

(1) Problemi riguardanti catene di corpi rigidi sono stati studiati da J. Wittenburg; cfr., ad esempio [3].

Si cerca in che modo i movimenti dei giroscopi influenzano l'orientazione di $\mathscr{C}'$ nello spazio. Il problema è complesso ma si lascia studiare bene nelle ipotesi, che supporremo soddisfatte, che il momento delle forze esterne rispetto al baricentro G di $\mathscr{C}$ sia nullo e che sia pure nullo il momento cinetico iniziale.

2. Per la discussione dei movimenti di $\mathscr{C}$ intorno al suo baricentro indichiamo — come si è detto — con $\mathscr{C}'$ il satellite privato dei suoi giroscopi $\mathscr{G}_J$ ($_J = 1, 2, \dots, n$) e con $\mathscr{C}$ il satellite munito di tutti i suoi giroscopi. Tali giroscopi hanno i rispettivi assi giroscopici in posizioni invariabili rispetto a $\mathscr{C}'$.

Per gli sviluppi formali indichiamo con $G e'_1 e'_2 e'_3$ assi di orientazione invariabile rispetto ad un riferimento inerziale $\mathscr{S}$. Siano poi $G e_1 e_2 e_3$ assi solidali con $\mathscr{C}'$; consideriamo pure gli assi $G_J e_1 e_2 e_3$ con G_J baricentro dell'J-esimo giroscopio $\mathscr{G}_J$. Invece $G_J i_1^{(J)} i_2^{(J)} i_3^{(J)}$ sono assi solidali con lo J-esimo giroscopio $\mathscr{G}_J$ con $i_3^{(j)}$ diretto come il rispettivo asse giroscopico.

Calcoliamo il momento cinetico di $\mathscr{C}$ nel suo moto intorno a G, cioè rispetto agli assi $G e'_1 e'_2 e'_3$. Alluderemo a tale riferimento ponendo una, $^{(R)}$, come apice al momento cinetico che vale

$$\mathbf{K}_G^{(R)} = \sigma' \omega + \sum_J \mathbf{K}_G^{(JR)}, \tag{1}$$

ove σ' è l'omografia d'inerzia di $\mathscr{C}'$ rispetto a G, ω la velocità angolare di $\mathscr{C}'$ nel suo movimento rispetto a $G e'_1 e'_2 e'_3$, $\mathbf{K}_G^{(JR)}$ il momento cinetico di $\mathscr{G}_J$ rispetto allo stesso riferimento.

Per costruire una espıessione esplicita di $\mathbf{K}_G^{(JR)}$ osserviamo che la velocità relativa a $\mathscr{C}'$ del generico punto $P_J \in \mathscr{G}_J$ vale

$$v^{(JR)} = \omega^{(J)} \wedge G_J P_J, \tag{2}$$

ove $\omega^{(J)}$ è la velocità angolare di $\mathscr{G}_J$ nel suo moto rispetto a $\mathscr{C}'$. La velocità di trascinamento di $P_J \in \mathscr{G}_J$ nel moto rispetto a $G e'_1 e'_2 e'_3$ vale

$$v^{(JT)} = \omega \wedge GP_J. \tag{3}$$

Ciò premesso, osservato che $GP_J = GG_J + G_J P_J$, si ha

$$\left\{\begin{aligned} &\mathbf{K}_G^{(JR)} = m^{(J)} GG_J \wedge (\omega \wedge GG_J) + \\ &+ \int_{\mathscr{G}_J} \mu^{(J)} G_J P_J \wedge (\omega \wedge G_J P_J) \, d\mathscr{C}_J + \int_{\mathscr{G}_J} \mu^{(J)} G_J P_J \wedge (\omega^{(J)} \wedge G_J P_J) \, d\mathscr{C}_J, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

ove $dm^{(J)} = \mu^{(J)} d\mathscr{C}_J$ è il generico elemento di massa di $\mathscr{G}_J$ ed $m^{(J)}$ la sua massa totale.

Detta $\bar{\sigma}^{(J)}$ l'omografia d'inerzia della massa $G_J, m^{(J)}$ rispetto al punto G e $\sigma^{(J)}$ l'omografia d'inerzia di $\mathscr{G}_J$ rispetto al suo baricentro G_J, segue

$$[\mathbf{K}_G^{(JR)}]_e = [\bar{\sigma}^{(J)}\,\omega + \sigma^{(J)}\,\omega + \sigma^{(J)}\,\omega^{(J)}]_e\,, \tag{5}$$

ove con il simbolo $[\ ]_e$ si allude alle matrici delle componenti secondo $G\boldsymbol{e}_1\,\boldsymbol{e}_2\,\boldsymbol{e}_3$.

Posto

$$\boldsymbol{i}_r^{(J)} = R^{(J)}\,\boldsymbol{e}_r\,, \tag{6}$$

ove $R^{(J)}$ è il rotore che muta $\boldsymbol{e}_r$ in $\boldsymbol{i}_r^{(J)}$, si ha

$$[\sigma^{(J)}]_e = [R^{(J)}\,\sigma^{(J)}\,\mathsf{T}\,R^{(J)}]_J \tag{7}$$

$$[\omega]_e = [R^{(J)}\,\omega]_J \tag{8}$$

e, analogamente alla notazione precedente, $[\ ]_J$ indicano le matrici delle componenti secondo $G_J\,\boldsymbol{i}_1^{(J)}\,\boldsymbol{i}_2^{(J)}\,\boldsymbol{i}_3^{(J)}$ mentre T è l'operatore trasposizione.

Poiché l'asse di rotazione di $\mathscr{G}_J$ coincide con l'asse giroscopico ed è solidale a $\mathscr{C}'$ non solo le componenti di $[\sigma^{(J)}]_J$ sono indipendentl dal tempo ma lo sono pure le componenti di $[\sigma^{(J)}]_e$.

Si osservi pure che

$$[\omega^{(J)}]_e = [R^{(J)}\,\omega^{(J)}]_J\,. \tag{9}$$

Dopo ciò, è possibile sostituire alla rappresentazione (5) quest'altra

$$\begin{aligned}[\mathbf{K}_G^{(JR)}]_e = \{[\bar{\sigma}^{(J)}]_e + [R^{(J)}\,\sigma^{(J)}\,\mathsf{T}\,R^{(J)}]_J\}\,[\omega]_e\,+ \\ +\,[R^{(J)}\,\sigma^{(J)}\,\mathsf{T}\,R^{(J)}]_J\,[R^{(J)}\,\omega^{(J)}]_J\end{aligned} \tag{10}$$

che è più conveniente perché $\sigma^{(J)}$ e $\omega^{(J)}$ sono calcolati riferendoli agli assi $G_J\,\boldsymbol{i}_1^{(J)}\,\boldsymbol{i}_2^{(J)}\,\boldsymbol{i}_3^{(J)}$ solidali con $\mathscr{G}_J$.

Tenuto conto di (10) la (1) assume la seguente forma esplicita

$$\left|\begin{aligned}[\mathbf{K}_G^{(R)}]_e = \Big\{[\sigma' + \sum_J \bar{\sigma}^{(J)}]_e + \sum_J [R^{(J)}\,\sigma^{(J)}\,\mathsf{T}\,R^{(J)}]_J\Big\}\,[\omega]_e\,+ \\ +\sum_J [R^{(J)}\,\sigma^{(J)}\,\omega^{(J)}]_J\,.\end{aligned}\right. \tag{11}$$

3. Supposto che il momento delle forze esterne rispetto a G sia nullo, tenuto conto che il moto di trascinamento è traslatorio e che le forze di trascinamento hanno momento nullo rispetto a G, ne segue che il vettore $\mathbf{K}_G^{(R)}$ si mantiene costante. Se inizialmente esso è nullo, da (11) segue

$$[\omega]_e = -\,[\sigma]_e^{-1}\,\sum_J [R^{(J)}\,\sigma^{(J)}\,\omega^{(J)}]_J\,, \tag{12}$$

con

$$(13) \qquad [\sigma]_e = \left[\sigma' + \sum_J \bar{\sigma}^{(J)}\right]_e + \sum_J [R^{(J)}\, \sigma^{(J)}\, T\, R^{(J)}]_J$$

omografia d'inerzia di $\mathscr{C}$ rispetto a $Ge_1\, e_2\, e_3$.

Quindi, nel caso testè considerato di momento cinetico nullo, la velocità angolare ω dipende, oltre che dai parametri strutturali di $\mathscr{C}$, che sono indipendenti dal tempo, dalle sole $\omega^{(J)}$.

Se tutti i vettori $\omega^{(J)}$ hanno grandezza indipendente dal tempo, essi risultano solidali ai $\mathscr{G}_J$. Di conseguenza la $[\omega]_e$ ha componenti costanti ed il vettore ω risulta indipendente dal tempo. Il moto di $\mathscr{C}'$ è pertanto un moto rotatorio uniforme. In generale, il problema della determinazione di tutti i movimenti di $\mathscr{C}'$ intorno a G comporta la riconsiderazione dell'equazione cardinale dei momenti.

4. Per illustrare qualche conseguenza della (12) cominciamo col considerare il caso in cui agisce un solo giroscopio, ad esempio $\mathscr{G}_1$. Posto

$$(14) \qquad \omega^{(1)} = \dot{\Phi}^{(1)}\, i_3^{(1)},$$

la (12) diviene

$$(15) \qquad [\omega]_e = -\{[\sigma]_e^{-1}\, [R^{(1)}\, \sigma^{(1)}\, i_3^{(1)}]_1\}\, \dot{\Phi}^{(1)}(t)\,.$$

Poiché il vettore entro parentesi graffe non dipende dal tempo, abbiamo il

TEOREMA. *Qualunque sia la legge temporale con cui si muove $\mathscr{G}_1$ e qualunque sia la posizione del suo asse giroscopico rispetto a $\mathscr{C}'$, in assenza di momento delle forze esterne e nell'ipotesi* $K_G^{(R)} = 0$, *la sua azione si traduce in una rotazione di $\mathscr{C}'$, in generale non uniforme. La rotazione è uniforme se* $\dot{\Phi}^{(1)} = \text{cost}$.

Nelle medesime ipotesi vale pure il

COROLLARIO. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la rotazione di $\mathscr{C}'$ avvenga intorno ad un asse parallelo all'asse giroscopico di $\mathscr{G}_1$* è *che tale asse giroscopico sia parallelo ad un asse centrale d'inerzia di $\mathscr{C}$.*

Infatti, supposto l'asse giroscopico di $\mathscr{G}_1$ parallelo ad un asse centrale di inerzia di $\mathscr{C}$, scegliamo gli assi $Ge_1\, e_2\, e_3$ solidali con $\mathscr{C}'$, coincidenti con gli assi centrali d'inerzia di $\mathscr{C}$ e sia Ge_3 parallelo al detto asse giroscopico. Da (12) segue

$$(16) \qquad Ap = 0 \quad , \quad Bq = 0 \quad , \quad Cr = C^{(1)}\, r^{(1)}\,,$$

cioè

$$\omega \parallel \omega_1 , \tag{16'}$$

ove A , B , C sono le componenti diverse da zero di (13) , p , q , r le componenti della matrice $[\omega]_e$, $C^{(1)} r^{(1)}$ la componente diversa da zero di $[R^{(1)} \sigma^{(1)} \omega^{(1)}]_1$. Viceversa, supponiamo $\omega \parallel \omega_1$. Senza diminuire la generalità, possiamo attribuire a Ge_3 la direzione dell'asse giroscopico di $\mathscr{G}_1$ e scegliere gli altri due assi solidali con $\mathscr{C}'$, Ge_1, Ge_2, in modo arbitrario. Da (12) segue

$$-B' r = 0 \quad , \quad -A' r = 0 \quad , \quad Cr = -C^{(1)} r^{(1)} , \tag{17}$$

ove A' e B' sono il primo ed il secondo momento centrifugo di $[\sigma]_e$. Essendo $r \neq 0$, le (17_1) e (17_2) mostrano che Ge_3 dev'essere asse centrale d'inerzia, c.v.d. .

La misurazione sperimentale di p , q , r ed $r^{(1)}$ consente il calcolo dei parametri strutturali che figurano in (15), $-(C^{(1)}/A) \sin \psi^{(1)} \sin \theta^{(1)}$, ecc., ove $\theta^{(1)}$ e $\psi^{(1)}$ sono i due angoli di Eulero indipendenti dal tempo che gli assi $G_J e_1 e_2 e_3$ formano con gli assi $G_J i_1^{(1)} i_2^{(1)} i_3^{(1)}$.

Se invece di misurare le componenti di $[\omega]_e$ si misurano le componenti di $[\omega]_{e'}$, bisogna ricordare che $[\omega]_e = TR'[\omega]_{e'}$. Evidentemente TR' si calcola misurando gli angoli di Eulero che individuano l'orientazione di $\mathscr{C}$ rispetto a $Ge_1' e_2' e_3'$.

Osserviamo pure, a titolo d'esempio, che nel caso (16), supposto $r^{(1)} = -at^2 + bt$, con a e b costanti, si ottiene la rotazione finita $\Phi = -C^{(1)} b^3 / (6\, Ca^2)$ di $\mathscr{C}'$ intorno a Ge_3 in corrispondenza all'intervallo temporale $(0 , b/a)$.

Consideriamo ora il caso di un satellite $\mathscr{C}$ in cui agiscono due giroscopi $\mathscr{G}_1$ e $\mathscr{G}_3$ collocati lungo due assi centrali d'inerzia di $\mathscr{C}$ che assumiamo come assi Ge_1 e Ge_3. Con l'ausilio di questi due giroscopi, determinati i parametri strutturali, è possibile far raggiungere a $\mathscr{C}$ una qualunque orientazione fissata arbitrariamente a priori; cioè è possibile avere un movimento in cui gli assi solidali a $\mathscr{C}'$ assumono ad un certo istante un orientamento arbitrariamente prefissato. Tale fatto si può realizzare con tre successivi movimenti che si ottengono azionando prima $\mathscr{G}_3$, poi $\mathscr{G}_1$ e infine di nuovo $\mathscr{G}_3$.

5. In ordine all'evoluzione temporale dell'orientazione di $\mathscr{C}'$ si possono porre due problemi che sono l'uno inverso dell'altro:

I) Quale dev'essere l'evoluzione delle velocità angolari di tre giroscopi $\mathscr{G}_1$, $\mathscr{G}_2$, $\mathscr{G}_3$, collocati lungo gli assi centrali d'inerzia di $\mathscr{C}$, per avere una evoluzione nell'orientazione di $\mathscr{C}'$ fissata a priori?

II) Assegnato l'andamento temporale delle velocità angolari di $\mathscr{G}_1$, $\mathscr{G}_2$, $\mathscr{G}_3$, trovare il movimento di $\mathscr{C}'$ intorno a G .

Affronteremo questi due problemi facendo uso del vettore caratteristico

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{a} \operatorname{tag} \frac{\theta}{2} , \tag{18}$$

ove $\boldsymbol{a}$ è il versore dell'asse della rotazione finita che conduce $\mathscr{C}'$ dalla configurazione iniziale a quella attuale; $\boldsymbol{a}$ è orientato in modo che rispetto ad esso la detta rotazione appaia levogira; θ è l'ampiezza della rotazione finita.

Si ricordi che

$$\omega = \frac{2}{1+w^2}(1+\boldsymbol{w}\wedge)\,\dot{\bar{\boldsymbol{w}}}\,, \tag{19}$$

ove

$$\dot{\bar{\boldsymbol{w}}} = \dot{\boldsymbol{w}} + \omega \wedge \boldsymbol{w} \tag{20}$$

è la derivata temporale assoluta e $\dot{\boldsymbol{w}}$ la derivata temporale relativa di $\boldsymbol{w}$.

Da (19) e (20) segue

$$\mathrm{R}\,\dot{\bar{\boldsymbol{w}}} = \dot{\boldsymbol{w}}\,, \tag{21}$$

ove

$$\begin{aligned} \mathrm{R} &= 1 + \frac{2}{1+w^2}[\boldsymbol{w}\wedge + (\boldsymbol{w}\wedge)^2] = \\ &= \frac{1}{1+w^2}[1 - w^2 + 2\,\mathrm{H}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}) + 2\,\boldsymbol{w}\wedge] \end{aligned} \tag{22}$$

è il rotore di vettore caratteristico $\boldsymbol{w}$ ed $\mathrm{H}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{w}\times\ldots)\,\boldsymbol{w}$.

Tenuto conto di (19), (21) e (22) la formula fondamentale (12) dà

$$\sum_{\mathrm{J}} [\mathrm{R}^{(\mathrm{J})}\,\sigma^{(\mathrm{J})}\,\omega^{(\mathrm{J})}]_{\mathrm{J}} = -\frac{2}{1+w^2}[\sigma(1-\boldsymbol{w}\wedge)\,\dot{\boldsymbol{w}}]_e \tag{23}$$

perché $(1+\boldsymbol{w}\wedge)\,\mathrm{R}^{-1} = 1 - \boldsymbol{w}\wedge$.

Da (23) si ottengono le componenti delle velocità giroscopiche secondo gli assi centrali d'inerzia $\mathrm{G}\boldsymbol{e}_1\,\boldsymbol{e}_2\,\boldsymbol{e}_3$ coincidenti con gli assi giroscopici dei tre giroscopi $\mathscr{G}_1$, $\mathscr{G}_2$, $\mathscr{G}_3$,

$$\left\{\begin{aligned} p^{(1)} &= -\frac{2}{1+w^2}\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}^{(1)}}(\qquad \dot{w}_1 + w_3\,\dot{w}_2 - w_2\,\dot{w}_3) \\ q^{(2)} &= -\frac{2}{1+w^2}\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{B}^{(2)}}(-w_3\,\dot{w}_1 + \qquad \dot{w}_2 + w_1\,\dot{w}_3) \\ r^{(3)} &= -\frac{2}{1+w^2}\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{C}^{(3)}}(\quad w_2\,\dot{w}_1 - w_1\,\dot{w}_2 + \qquad \dot{w}_3)\,, \end{aligned}\right. \tag{23'}$$

ove, come prima, $A^{(1)}$, $B^{(2)}$, $C^{(3)}$ sono i momenti d'inerzia di $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}_3$ rispetto ai relativi assi giroscopici.

Le formule (23') risolvono il primo problema perché dato il vettore $\boldsymbol{w}(t)$ si calcolano subito le velocità giroscopiche $p^{(1)}$, $q^{(2)}$, $r^{(3)}$ in funzione del tempo.

Può darsi che convenga assegnare il movimento di $\mathscr{C}'$ per mezzo degli angoli di Eulero $\psi(t)$, $\theta(t)$, $\Phi(t)$; in tal caso occorrono le formule che esprimono w_1, w_2, w_3 in funzione dei detti angoli.

Per affrontare il secondo problema è opportuno risolvere la (23) rispetto a $\dot{\boldsymbol{w}}$; si ottiene

$$[\dot{\boldsymbol{w}}]_e = -\frac{1}{2}[1 + \mathrm{H}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) + \boldsymbol{w}\wedge]_e [\sigma]_e^{-1} \sum_J [\mathrm{R}^{(J)} \sigma^{(J)} \omega^{(J)}]_J, \tag{24}$$

cioè

$$\left\{\begin{aligned} \dot{w}_1 &= -\frac{A^{(1)}}{2A}(1 + w_1^2)\, p^{(1)} - \frac{B^{(2)}}{2B}(w_1 w_2 - w_3)\, q^{(2)} - \frac{C^{(3)}}{2C}(w_1 w_3 + w_2)\, r^{(3)} \\ \dot{w}_2 &= -\frac{A^{(1)}}{2A}(w_2 w_1 + w_3)\, p^{(1)} - \frac{B^{(2)}}{2B}(1 + w_2^2)\, q^{(2)} - \frac{C^{(3)}}{2C}(w_2 w_3 - w_1)\, r^{(3)} \\ \dot{w}_3 &= -\frac{A^{(1)}}{2A}(w_3 w_1 - w_2)\, p^{(1)} - \frac{B^{(2)}}{2B}(w_3 w_2 + w_1)\, q^{(2)} - \frac{C^{(3)}}{2C}(1 + w_3^2)\, r^{(3)}. \end{aligned}\right. \tag{24'}$$

La integrazione di queste equazioni consente il calcolo del vettore caratteristico $\boldsymbol{w}(t)$ in funzione delle velocità angolari dei tre giroscopi $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}_3$.

Nel caso particolare in cui agisce un solo giroscopio, ad esempio $\mathcal{G}_1$, la integrazione del sistema (24') si effettua facilmente. Infatti, la prima equazione si può integrare prescindendo dalle altre due e, a meno di una costante arbitraria, si ha

$$w_1 = -\operatorname{tag} \frac{A^{(1)}}{2A}\int_o^t p^{(1)}\, dt. \tag{25}$$

La seconda e la terza si possono riunire in un'unica equazione ponendo

$$f = w_2 + i w_3, \tag{26}$$

ove $i = \sqrt{-1}$ è l'unità immaginaria. Si ottiene

$$\dot{f} = -\frac{A^{(1)}}{2A}(w_1 - i)\, f p^{(1)} \tag{27}$$

ed integrando segue

$$f = f_0 \, e^{-\frac{A^{(1)}}{2A} \int_0^t (w_1 - i)\, p^{(1)}\, dt} . \tag{28}$$

Se la costante f_0 è nulla segue che f si mantiene identicamente nulla. In tal caso, l'effetto del giroscopio $\mathscr{G}_1$, posto lungo l'asse centrale d'inerzia $\mathrm{G}\boldsymbol{e}_1$, è una semplice rotazione di $\mathscr{C}'$ intorno allo stesso asse, come già si è trovato. Si può ottenere pure un'altra soluzione particolare di (24'). Infatti, abbiamo notato che se $p^{(1)}$, $q^{(2)}$, $r^{(3)}$ sono costanti si ha una rotazione permanente uniforme. Segue che $\boldsymbol{w}$ ha direzione costante e quindi risulta $\boldsymbol{w} \parallel \dot{\boldsymbol{w}}$. Osservato che si può porre

$$1 + w^2 = \frac{1}{\cos^2 kt}, \tag{29}$$

ove k è un coefficiente da determinare, da (23') si ottiene

$$\left\{ \begin{aligned} w_1 &= -\frac{A^{(1)}}{2\,A} \frac{p^{(1)}}{k} \operatorname{tag} kt \\ w_2 &= -\frac{B^{(2)}}{2\,B} \frac{q^{(2)}}{k} \operatorname{tag} kt \\ w_3 &= -\frac{C^{(3)}}{2\,C} \frac{r^{(3)}}{k} \operatorname{tag} kt . \end{aligned} \right. \tag{30}$$

Quest'ultima espressione di w_1 coincide con la (25) se si pone $k = A^{(1)} p^{(1)}/2\,A$ e si suppone in (25) $p^{(1)} = \text{cost}$.

In generale, se tutti e tre i giroscopi $\mathscr{G}_1$, $\mathscr{G}_2$, $\mathscr{G}_3$ hanno velocità costanti diverse da zero, da (24') oppure da (29), si deduce

$$k = \sqrt{\left(\frac{A^{(1)} p^{(1)}}{2\,A}\right)^2 + \left(\frac{B^{(2)} q^{(2)}}{2\,B}\right)^2 + \left(\frac{C^{(3)} r^{(3)}}{2\,C}\right)^2} . \tag{31}$$

Bibliografia

[1] Grammel R. (1954) – *Der selbsterregte unsymmetrische Kreisel*, « Ing.-Arch. », *22*, 77–97.

[2] Bödewadt U.T. (1952) – *Der symmetrische Kreisel bei zeitfester Drehkraft*, « Math. Z. », *55*, 310–320.

[3] Wittenburg J. (1970) – *Der Stoss auf ein System gelenkig gekoppelter, starrer Körper*, « Ing.-Arch. », *39*, 219–229.