Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Antonio Claudio Grioli

Sull'estensione di un teorema di Menabrea al caso di una microstruttura a deformazioni finite

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **75** (1983), n.5, p. 190–194.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1983_8_75_5_190_0>

Meccanica dei continui. — *Sull'estensione di un teorema di Menabrea al caso di una microstruttura a deformazioni finite* (*). Nota di
ANTONIO CLAUDIO GRIOLI (**), presentata (***) dal Corrisp A. BRESSAN.

SUMMARY. — In the present work an extension of a classical Menabrea's theorem on a variational principle of the second potential energy is considered. Such extension deals with hyperelastic micropolar media without constraints.

In molte questioni di meccanica dei continui iperelastici riesce spesso utile l'applicazione di una proprietà variazionale della «seconda energia potenziale» che alla lontana costituisce una generalizzazione di un classico teorema di Menabrea.

Nell'ipotesi di deformazioni finite c'è già una lettertura in tal senso riguardante i continui classici; basta ad esempio richiamare un lavoro di E. Reissner [1] a cui in un certo senso quanto segue è collegato.

Nel caso di piccole deformazioni invece tale proprietà è stata estesa anche al caso di una microstruttura (vedi ad esempio [2]).

L'estensione al caso di continui iperelastici polari non lineari non è banale e non sempre è possibile, a causa del fatto che nelle equazioni di campo, anche se scritte in forma euleriana, è presente la deformazione.

Nella presente Nota mostro come una proprietà variazionale del tipo di quella di Menabrea possa essere stabilita anche per un continuo micropolare a deformazioni finite e in assenza di vincoli.

Dato un continuo micropolare soggetto a deformazioni finite, la trasformazione che muta lo stato di riferimento C di frontiera Σ, in quello attuale C', di frontiera Σ', è caratterizzata dalle relazioni:

$$(1) \qquad x_r = x_r(y) \qquad \gamma_{rs} = \gamma_{rs}(y) \qquad (r, s = 1, 2, 3)$$

ove le x_r e y_r sono le coordinate di punti corrispondenti P e P' in C e C' e le

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del C.N.R.

(**) Indirizzo dell'autore: Antonio Claudio Grioli. Seminario Matematico, Via Belzoni, 7 - Padova.

(***) Nella seduta del 26 novembre 1983.

γ_{rs} gli elementi di una matrice quadrata di ordine tre che caratterizza la deformazione delle « molecole ».

Le quantità caratteristiche dello strain sono:

$$\varepsilon_{rs} = \frac{1}{2}\, x_{i,r}\, x_{i,s} - \delta_{rs}$$

$$(2) \qquad \nu_{rs} = x_{i,r}\, \gamma_{is}$$

$$\nu_{rs}^{(l)} = x_{i,r}\, \gamma_{is,l}$$

soddisfacenti, come è facile verificare, alla condizione di essere invarianti per spostamenti rigidi. Nelle (2) e d'ora in avanti, con la virgola si intende derivazione rispetto alle coordinate dello stato di riferimento.

In relazione alle (2), l'espressione lagrangiana della densità di lavoro delle forze interne nel passaggio da C′ a C′ + δC′ è esprimibile nella forma:

$$(3) \qquad \delta\, l^{(i)} = \mathrm{Y}_{rs}\, \delta\varepsilon_{rs} + \mathrm{T}_{rs}\, \delta\nu_{rs} + \mathrm{P}_{rs}^{(l)}\, \delta\mathrm{C}\nu_{rs}^{(l)}\,.$$

Ove Y_{rs}, T_{rs} e $\mathrm{P}_{rs}^{(l)}$ esprimono lo stress in forma lagrangiana (di Piola–Kirchoff), il Y_{rs} è una matrice simmetrica.

Partendo da (3), con qualche calcolo, si trova che il lavoro delle forze interne su tutto il continuo nel passaggio da C′ a C′ + δC′ è esprimibile nella forma:

$$(4) \qquad \delta \mathrm{L}^{(i)} = -\int_{\mathrm{C}} [\mathrm{L}_{rs,s}\, \delta u_r + (\mathrm{P}_{is,l}^{(l)}\, \gamma_{ri} + \mathrm{C}_{rs})\, \delta\gamma_{rs}]\, dc\, -$$

$$-\int_{\Sigma} [(\mathrm{L}_{rs}\, \delta u_r + P_{il}^{(s)}\, \gamma_{ri}\, \delta\gamma_{rl}]\, \mathrm{N}_s\, d\Sigma$$

ove si è posto:

$$(5) \qquad \begin{aligned} \mathrm{L}_{rs} &= x_{r,i}\, \mathrm{Y}_{is} + \mathrm{T}_{si}\, \gamma_{ri} \\ \mathrm{C}_{rs} &= (\mathrm{P}_{is}^{(l)} - \mathrm{P}_{si}^{(l)})\, \gamma_{ri,l} - \mathrm{T}_{is} \cdot x_{r,i}\,. \end{aligned}$$

Nelle (4) le δu_r sono le componenti dello spostamento da C′ a C′ + δC′.

Per semplicità supporrò ovunque assegnata la sollecitazione esterna. Ciò non esclude comunque la possibilità di estendere quanto segue anche al caso in cui siano presenti vincoli esterni bilaterali.

Dalle (4) segue che le equazioni di campo, nel caso statico possono porsi nella forma:

$$(6)\qquad \begin{cases} L_{rs,s} = \mu F_r \\ P^{(l)}_{is,l}\,\gamma_{ir} + C_{rs} = \mu M_{rs} \end{cases} \qquad \text{su } C$$

$$(7)\qquad \begin{cases} L_{rs}\,N_s = f_r \\ P^{(l)}_{is}\,\gamma_{ri}\,N_l = m_{rs} \end{cases} \qquad \text{su } \Sigma$$

Nelle (6), (7) le quantità F_r, M_{rs}, f_r, m_{rs} caratterizzano la sollecitazione esterna mentre N_r è il versore della normale interna a Σ.

Siano ΔY_{rs}, ΔT_{rs}, $\Delta P^{(l)}_{rs}$ le differenze tra due qualunque stress soddisfacenti le (6) su C e le (7) su Σ per una fissata sollecitazione esterna. Tali quantità devono allora soddisfare le:

$$(8)\qquad \begin{cases} (x_{r,i}\,\Delta y_{is} + \gamma_{ri}\,\Delta T_{si})_{,s} = 0 \\ \Delta P^{(l)}_{is,l}\,\gamma_{ri} + \Delta C_{rs} = 0 \end{cases} \qquad \text{su } C$$

$$(9)\qquad \begin{cases} (x_{r,i}\,\Delta Y_{is} + \Delta T_{si}\,\gamma_{ri})\,N_s = 0 \\ \Delta P^{(l)}_{is}\,\gamma_{ri}\,N_l = 0 \end{cases} \qquad \text{su } \Sigma$$

Moltiplicando le $(8)_1$, $(9)_1$ per x_r, le $(8)_2$, $(9)_2$ per γ_{rs}, sommando ed integrando nei rispettivi campi di integrazione, si ottiene, dopo qualche sviluppo:

$$(10)\qquad \begin{aligned} &\int_C [(2\,\varepsilon_{rs} + \delta_{rs})\,\Delta Y_{rs} + \Delta T_{sr}\,\nu_{sr}]\,dc = 0 \\ &\int_C [\Delta T_{is}\,\nu_{is} + 2\,P^{(l)}_{is}\,\nu^{(l)}_{is}]\,dc = 0 \end{aligned}$$

dalle quali sommando segue:

$$(11)\qquad \int_C [(2\,\varepsilon_{rs}\,\delta_{rs})\,\Delta Y_{rs} + 2\,\Delta T_{sr}\,\nu_{sr} + 2\,\Delta P^{(l)}_{is}\,\nu^{(l)}_{is}]\,dc = 0\,.$$

La (11) esprime una proprietà variazionale dello stress valida qualunque sia la natura fisica del continuo.

Supposto ora che esso sia iperelastico, sia:

$$W = W(\varepsilon_{rs}, \nu_{rs}, \nu_{rs}^{(l)}) \tag{12}$$

la densità di energia potenziale elastica isoterma o adiabatica.

Sussistono allora le relazioni costitutive:

$$Y_{rs} = -\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{rs}} \quad , \quad T_{rs} = -\frac{\partial W}{\partial \nu_{rs}} \quad , \quad P_{rs}^{(l)} = -\frac{\partial W}{\partial \nu_{rs}^{(l)}} . \tag{13}$$

Supposta W tale da soddisfare a delle condizioni di invertibilità per le (13), da queste segue:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rs} &= \alpha_{rs}(Y_{ij}, T_{ij}, P_{ij}^{(l)}) \\ \nu_{rs} &= \beta_{rs}(Y_{ij}, T_{ij} . P_{ij}^{(l)}) \\ \nu_{rs}^{(l)} &= \eta_{rs}^{(l)}(Y_{ij}, T_{ij}, P_{ij}^{(l)}) \end{aligned} \tag{14}$$

Basta allora assumere come densità di seconda energia potenziale l'espressione:

$$\begin{aligned} \overline{W}(Y, T, P^{(i)}) &= -W(\alpha, \beta, \eta^{(l)}) - \left(\alpha_{rs} + \frac{\delta_{rs}}{2}\right) Y_{rs} - \\ &\quad - \beta_{sr} T_{rs} - \eta_{rs}^{(l)} P_{rs}^{(l)} \end{aligned} \tag{15}$$

per dedurre:

$$\varepsilon_{rs} + \frac{\delta_{rs}}{2} = -\frac{\partial \overline{W}}{\partial Y_{rs}} \quad , \quad \nu_{rs} = -\frac{\partial \overline{W}}{\partial T_{rs}} \quad , \quad \nu_{rs}^{(l)} = -\frac{\partial \overline{W}}{\partial P_{rs}^{(l)}} . \tag{16}$$

Tenuto conto delle (16), in corrispondenza allo stress effettivo la (11) diviene:

$$\int_C \left(\frac{\partial \overline{W}}{\partial Y_{rs}} \Delta Y_{rs} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial T_{rs}} \Delta T_{rs} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial P_{rs}^{(l)}} \Delta P_{rs}^{(l)} \right) dc = 0 . \tag{17}$$

Denotando con $\overline{V}$ la seconda energia potenziale dell'intero continuo, da (17) segue:

$$\Delta \overline{V} = 0 , \tag{18}$$

ove

$$\overline{V} = \int_C \overline{W} \, dC .$$

Si può dunque concludere che *nel caso di una microstruttura iperelastica, in assenza di vincoli, lo stress reale rende stazionaria la seconda energia potenziale nella classe di tutti gli stress in equilibrio con un'assegnata sollecitazione esterna.*

Si riconosce pertanto la estendibilità a questo tipo di continui del classico teorema di Menabrea, estendibilità che invece viene a mancare se si impone il vincolo interno che la matrice γ_{rs} coincida con una matrice di rotazione (continui di Cosserat) come segue ad esempio da [4].

Bibliografia

[1] E. Reissner (1953) – *On a variational theorem for finite elastic deformations.* « I. Math. Phys. », *32*, 129-135.

[2] G. Grioli (1975) – *Una proprietà variazionale nella teoria delle microstrutture.* « Rend. di Mat. », *8*, ser. VI.

[3] W.T. Kaiter (1976) – *On the complementary Energy heorem in non-linear Elasticity theory.* Book « Trends in applications of pure Mathematics to Mechanics ».

[4] G. Grioli (1976) – *Contributo per una formulazione di tipo integrale della meccanica dei continui di Cosserat.* « Ann. Mat. Pura ed Appl. », (IV), III.