Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mihai C. Botez, Dumitru Stefan

Sur les systèmes évolutifs

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **74** (1983), n.6, p. 373–379.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1983_8_74_6_373_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1983.

Fisica matematica. — *Sur les systèmes evolutifs.* Nota di MIHAI C. BOTEZ e DUMITRU STEFAN, presentata (*) dal Socio G. FICHERA.

RIASSUNTO. — Presentazione di un quadro formale per lo studio dei sistemi evolutivi (nel senso di I. Prigogine e della sua scuola [4], [6]), che permette la descrizione adatta delle relazioni tra l'entropia termodinamica e l'entropia informazionale e lo studio dei rapporti tra l'evoluzione e l'ergodicità [1].

§ 1. Selon I. Prigogine et son école, l'évolution d'un système peut être expliquée par les variations de l'entropie (thermodynamique), liées aux changements d'ordres générés par des fluctuations [4], [6]. Pour simplifier l'exposé, nous appelerons cette variante d'évolution, *P – évolution.* Dans cette approche, l'entropie est conçue comme une fonctionnelle d'état du système; les variations de l'entropie influent la stabilité du système, conçue aussi en termes d'états du système. En effet, si on note par h l'entropie thermodynamique du système, alors sa variation (temporelle) dh est décomposable en deux parties

$$dh = d_i h + d_e h$$

où la composante $d_i h$ $(d_i h \geq 0)$ décrit la production interne d'entropie, liée à la génération des processus irréversibles capables à créer des conditions pour le changement de l'ordre donné par des fluctuations aléatoires, et la composante $d_e h$ représente l'échange thermodynamique avec l'exterieur. Selon Prigogine, l'évolution (dans notre terminologie – la *P – évolution*) implique un changement d'ordre et une condition nécessaire pour assurer ce changement est que les oscillations de l'entropie thermodynamique ne soient pas de type « amortisées ». La démarche introduit, comme des aspects fondamentaux, l'irréversibilité et l'histoire: l'évolution est irréversible, et le présent ne peut pas être compris sans « l'histoire » qui l'a produit.

Au moins selon notre connaissance, les essais développés jusqu'à présent de modélisation mathématique de l'approche mentionnée ont utilisé seulement les schémas de Markov, par définition réversibles et « résumant » l'histoire [6]; l'étude des rapports entre la variation de l'entropie thermodynamique et la variation de la stabilité du système n'a pas fait appel, au moins de manière systématique, à l'entropie informationnelle ([9], [3]).

La démarche que nous proposons (a) dépasse le cadre du schéma de Markov, (b) modélise la relation entre l'entropie thermodynamique et l'entropie informationnelle et (c) explore les conditions incompatibles avec la *P – évolution.*

(*) Nella seduta del 23 giugno 1983.

§ 2. Soient $(\mathscr{W}, \mathscr{V})$ un espace mesurable – appelé espace de conditions, $(\mathscr{X}_t, \mathscr{F}_t)_{t \in \mathrm{N}}$, $\mathrm{N} = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ une famille d'espaces mesurables – appelés espaces d'états et $\{\mathrm{P}_{t+1}, t \in \mathrm{N}^0\}$, $\mathrm{N}^0 = \{0\} \cup \mathrm{N}$ une famille de fonctions réelles, définies sur $\{\mathscr{W} \times \mathscr{X}^{(t)} \times \mathscr{F}_{t+1}, t \in \mathrm{N}^0\}$ où $\mathscr{X}^{(0)} = \Phi$, $\mathscr{X}^{(t)} = \prod_{j=1}^{t} \mathscr{X}_j$, $t \in \mathrm{N}$, telles que: (a) pour tout $(w, x^{(t)}) \in \mathscr{W} \times \mathscr{X}^{(t)}$ fixé, $\mathrm{P}_{t+1}(w, x^{(t)}; \cdot)$ est une (sous)–probabilité sur $\mathscr{F}_{t+1}$ et (b) pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{F}_{t+1}$ fixé, $\mathrm{P}_{t+1}(\cdot, \cdot, \mathrm{A})$ est une fonction $\mathscr{V} \times \mathscr{F}^{(t)}$–mesurable, où $\mathscr{F}^{(t)} = \bigotimes_{j=1}^{t} \mathscr{F}_j$.

Le triplet $\{(\mathscr{W}, \mathscr{V}), (\mathscr{X}_t, \mathscr{F}_t)_{t \in \mathrm{N}}, \mathrm{P}_{t+1}, t \in \mathrm{N}^0\}$ sera appelé *modèle évolutif discret* [7]. On peut démontrer qu'étant donné un modèle évolutif discret, il existe pour tout $w \in \mathscr{W}$ un espace mesurable $\{\Omega, \mathscr{A}\}$, une probabilité $\mathscr{P}_w$ sur cet espace et un système aléatoire $\{\mathrm{S}(t), t \in \mathrm{N}\}$ où $\mathrm{S}(t) \in \mathscr{X}_t$, $t \in \mathrm{N}$ tels que

$$\mathscr{P}_w \{\mathrm{S}(t+1) \in \mathrm{A} \mid \mathrm{S}(j), j = 1, \cdots, t\} = \mathrm{P}_{t+1}(w; \mathrm{S}^{(t)}; \mathrm{A})$$

pour tout $t \in \mathrm{N}$, $\mathrm{S}(j) \in \mathscr{X}_j$; $\mathrm{S}^{(t)} = (\mathrm{S}(1), \cdot, \mathrm{S}(t))$, $1 \leq j \leq t$, $t \in \mathrm{N}$, $\mathrm{A} \in \mathscr{F}_{t+1}$.

Il est facile à voir que, particularisant de manière convenable les fonctions $\{\mathrm{P}_{t+1}, t \in \mathrm{N}^0\}$, on obtient les chaines de Markov simples et multiples, les chaînes à liaisons complètes simples et multiples [8] et les systèmes à liaisons complètes, au moins en principe toujours réductibles aux systèmes à liaisons complètes homogènes [5]. Dans ce dernier cas $\mathscr{X}_t = \mathscr{X}$, $t \in \mathrm{N}$, les fonctions $\{\mathrm{P}_{t+1}, t \in \mathrm{N}^0\}$ sont définies à l'aide d'une famille $\{u_x, x \in \mathscr{X}\}$ d'applications de $\mathscr{W}$ en soi–même, telles que

$$\mathrm{P}_{t+1}(w, x^{(t)}, \mathrm{A}) = \mathrm{P}(u(w, x^{(t)}; \mathrm{A})$$

où $x^{(t)} = (x_1, \cdots, x_t)$, $u(\cdot, x^{(t)}) = u_{x_t} \circ \cdots \circ u_{x_1}$ et $\mathrm{P}(\cdot, \cdot)$ est une fonction définie sur $\mathscr{W} \times \mathscr{F}$ telle que (a) pour tout $w \in \mathscr{W}$ fixé, $\mathrm{P}(w, \cdot)$ est une probabilité sur $\mathscr{F}$ et (b) pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{F}$ fixé, $\mathrm{P}(\cdot, \mathrm{A})$ est une fonction $\mathscr{V}$–mesurable.

Il s'ensuit qu'un système aléatoire homogène à liaisons complètes est défini par le quadruplet $\{(\mathscr{W}, \mathscr{V})(\mathscr{X}, \mathscr{F}), \{u_x, x \in \mathscr{X}\}, \mathrm{P}(\cdot, \cdot)\}$. On sait que le comportement d'un tel schéma peut être décrit à l'aide de l'opérateur

$$\mathrm{U}\varphi(w) = \int_{\mathscr{X}} \varphi(u(w, x)) \mathrm{P}(w, \mathrm{d}x)$$

défini pour $\varphi \in \mathrm{B}(\mathscr{W}, \mathscr{V})$, $\mathrm{B}(\mathscr{W}, \mathscr{V})$ étant l'espace de Banach des fonctions réelles, bornées et $\mathscr{V}$–mesurables avec la norme

$$\|\varphi\| = \sup_{w \in \mathscr{W}} |\varphi(w)|;$$

on peut aisément vérifier que U est une application linéaire et continue de $\mathrm{B}(\mathscr{W}, \mathscr{V})$ dans soi–même avec la norme $\|\mathrm{U}\| = 1$.

Remarquons que, pour $\varphi(w) = P(w, A)$, les ittérés $\{U^{(t)}, t \in N^0\}$ de l'opérateur U ($U^{(0)} = I$ = identité) donnent les probabilités successives de l'événement $\{S(t) \in A\}$, si la condition initiale a été $w \in \mathscr{W}$.

Le schéma à liaisons complètes jouera un rôle essentiel dans notre approche à la modélisation de l'évolution.

§ 3. Soit maintenant t_0 ($t_0 > 1$) le moment *présent*. Le *passé* (connu) du système sera de la forme d'une trajectoire, soit elle $\{S(t), t = 1, \cdots, t_0\}$. On sait que, de manière générale, le *futur* du système ne peut être connu que par des hypothèses concernant les probabilités des différentes alternatives (futures possibles ou futuribles) [7].

Nous sommes maintenant en mesure de décrire notre démarche. Il est naturel de considérer que l'état thermodynamique du système et son évolution jusqu'à t_0 – et, en particulier, la variation de l'entropie thermodynamique – influe les probabilités des différentes alternatives futures.

En effet, supposons que la structure de la variation de l'entropie thermodynamique est telle que l'intensité des processus irréversibles soit grande, et les fluctuations soient près du « niveau critique »: il résulte que la probabilité que le système sera dans un état incluant le changement de l'ordre existant, conditionnée par cet état thermodynamique, est plus grande que la probabilité de la même évolution conditionnée par un autre état thermodynamique. Mais, influant les probabilités des alternatives, l'état thermodynamique influe aussi l'entropie informationnelle construite à l'aide de ces probabilités. Comme conséquence de certains changements de l'état du système, donc, son comportement (futur – car le présent est donné, donc ne supporte pas l'aléatoire) change aussi. D'ailleurs, des expressions comme *stabilité* ou *instabilité* impliquent une liaison de ce type, entre « ce qui se passe » *dans le système* (dans la terminologie physio–chimique: au niveau micro) et ce qui en résulte *pour le système* dans sa totalité (ou, au niveau macro). Il s'ensuit donc que l'entropie thermodynamique et l'entropie informationnelle, ne coïncidant évidemment pas, sont étroitement liées: les variations de l'entropie thermodynamique génèrent des variations de l'entropie informationnelle, tandis que les variations de l'entropie informationnelle offrent des informations (ou même se propose comme une *mesure*) des variations de l'entropie thermodynamique. Cette remarque semble particulièrement utile pour l'essai d'appliquer la même démarche au–delà du champ des systèmes physiques ou chimiques: car, si pour tout système on peut parler de trajectoires passées et de probabilités de transition vers le futur, il est difficile de définir, pour tout système, une fonctionnelle justifiant le nom d'entropie (thermodynamique).

Du point de vue formel, si nous noterons par $(\mathscr{W}, \mathscr{V})$ l'espace des états thermodynamiques du système, et par $\{u_x, x \in \mathscr{X}\}$ la famille d'applications $\mathscr{W} \rightarrow \mathscr{W}$ qui associe à chaque état $x \in \mathscr{X}$, son état thermodynamique, nous remarquerons qu'au moment t_0 les probabilités des différentes alternatives futures, de forme générale

$$\mathscr{P}_w \{S(t_0+1) \in A \mid S(t), t = 1, \cdots, t_0\}$$

seront en réalité de la forme

$$\mathscr{P}_w \{S(t_0+1) \in A \mid u_{S(t)}, t = 1, \cdots, t_0\}$$

pour tout $A \in \mathscr{F}$, w–état thermodynamique initial. Si nous supposerons encore que les états thermodynamiques se « composent » sur une trajectoire $\{S(t), t = 1, \cdots, t_0\}$ – hypothèse vérifiée, par exemple, si les états se caractérisent par des variations des composantes de l'entropie thermodynamique comme dans § 1, – nous serons conduits à conclure qu'en ce cas–là, si l'état initial a été $w \in \mathscr{W}$, alors

$$\mathscr{P}_w \{S(t_0+1) \in A \mid S(t), t = 1, \cdots, t_0\} = P(u(w, S^{(t_0)}); A)$$

où $S^{(t_0)} = (S(1), \cdot, S(t_0))$, $u(\cdot, S^{(t_0)}) = u_{S(t_0)} \circ \cdots \circ u_{S(1)}$ et $P(w, \cdot)$ est la répartition de $S(1)$, pour $w \in \mathscr{W}$ donné. On reconnaît ici le schéma à liaisons complètes. Remarquons que, dans ce cas–là, les probabilités « sur le futur », du type général

$$\mathscr{P}_w \{S(t_0+h) \in A \mid S(t), t = 1, \cdots, t_0\}, \qquad h \in N,$$

s'obtiennent à l'aide des itérées de l'opérateur

$$U\varphi(w) = \int_{\mathscr{X}} \varphi(u(w, x)) P(w, dx)$$

défini dans $B(\mathscr{W}, \mathscr{V})$.

Supposons maintenant que l'espace $\mathscr{X}$ des états possibles du système est fini $\mathscr{X} = \{x_1, \cdots, x_m\})$ et considérons l'expression

$$\mathscr{H}_w(t_0+1 \mid x_{i_j}, j = 1, \cdots, t_0) =$$

$$-\sum_{i=1}^{m} P_{t_0+1}(w, x^{(t_0)}; x_i) \log P_{t_0+1}(w, x^{(t_0)}; x)$$

où $x^{(t_0)} = (x_{i_1}, \cdots, x_{i_{t_0}})$, $1 \leq i_j \leq m$, $j = 1, \cdots, t_0$. Cette expression sera appelée *entropie informationnelle de transition*, et il est évident qu'elle mesure l'incertitude dans le passage du système, au moment présent t_0, du passé connu $x_{i_1}, \cdots, x_{i_{t_0}}$ vers un futur immédiat.

Pour un ensemble quelconque d'états $(\mathscr{X}, \mathscr{F})$, si λ est une mesure sur $\mathscr{F}$ par rapport à laquelle les probabilités $\{P_{t+1}(\cdot, \cdot), t \in N^0\}$ sont absolument continues, et si nous nottons $p_{t+1} = \dfrac{dP_{t+1}}{d\lambda}$ – la dérivée étant prise dans le sens de Random-Nykodym, alors l'entropie informationnelle de transition sera de la forme

$$\mathcal{H}_w^\lambda (t+1 \mid x^{(t)}) = - \int_{\mathcal{X}} p_{t+1} (w , x^{(t)}, x) \log p_{t+1} (w , x^{(t)} ; x) \lambda (\mathrm{d}x) .$$

On voit aisément que dans les deux cas, si $\mathrm{P}_{t+1} (w , x^{(t)}, \cdot) = \mathrm{P}_{t+1} (u (w , x^{(t)}))$ alors les entropies informationnelles de transition seront de la forme $\{\mathcal{H}_w (t+1 ; u (w , x^{(t)})) , t \in \mathrm{N}^0\}$, respectivement $\{\mathcal{H}_w^\lambda (t+1 ; u (w , x^{(t)})) , t \in \mathrm{N}^0\}$.

§ 4. Nous avons donc établi une liaison entre l'entropie thermodynamique et sa variation et l'entropie informationnelle de transition et sa variation, à l'aide des systèmes à liaisons complètes.

De manière plus générale, nous dirons que nous avons modélisé les rapports entre l'état thermodynamique et l'état informationnel à l'aide du schéma à liaisons complètes. Mais, pour pouvoir modéliser l'approche de I. Prigogine et de son école, il nous faut introduire une restriction: nous supposerons donc que la correspondance entre les variations de l'entropie thermodynamique et ceux de l'entropie informationnelle est *continue*. Du point de vue formel, nous serons donc conduits à considérer le cas dans lequel l'opérateur U n'est pas défini dans $\mathrm{B} (\mathcal{W}, \mathcal{V})$ mais dans $\mathrm{C} (\mathcal{W}) , \mathrm{C} (\mathcal{W})$ étant l'ensemble des fonctions continues bornées sur $\mathcal{W}$, supposé espace Hausdorff compact, et $\mathcal{V}$ étant l'algèbre de Borel engendrée par la topologie de l'espace $\mathcal{W}$. Cette condition n'est pas tellement restrictive que l'on le peut penser. En effet, on peut démontrer que, si $\mathrm{B} (\mathcal{W}, \mathcal{V})$ « sépare » les points de $\mathcal{W}$, il existe un espace de Hausdorff totalement discontinu $\overline{\mathcal{W}}$, dans lequel $\mathcal{W}$ est un sous-espace dense, ainsi que chaque $\varphi \in \mathrm{B} (\mathcal{W}, \mathcal{V})$ peut être prolongé uniquement à un $\overline{\varphi} \in \mathrm{C} (\overline{\mathcal{W}})$, où $\mathrm{C} (\overline{\mathcal{W}})$ est l'espace de Banach des fonctions réelles (ou complexes), définies sur $\overline{\mathcal{W}}$, continues, avec la norme

$$\| \overline{\varphi} \| = \sup_{w \in \overline{\mathcal{W}}} | \overline{\varphi} (w) |$$

et ainsi que l'opérateur U dans $\mathrm{B} (\mathcal{W}, \mathcal{V})$ peut etre prolongé à un opérateur $\overline{\mathrm{U}} : \mathrm{C} (\overline{\mathcal{W}}) \to \mathrm{C} (\overline{\mathcal{W}})$, tel que $\| \overline{\mathrm{U}} \| \leq 1$ ([2], [1]). Si $\mathcal{W}$ est un espace métrique compact par rapport à la distance ρ, et si, pour chaque $d \in (0 , 1]$, on note (par exemple, [1])

$$\mathrm{CL}^d (\mathcal{W}) = \left\{ \varphi ; \sup_{\substack{w_1 , w_2 \in \mathcal{W} \\ w_1 \neq w_2}} \frac{| \varphi (w_1) - \varphi (w_2) |}{[\rho (w_1 , w_2)]^d} < \infty \right\}$$

alors on peut démontrer que, si U applique $\mathrm{CL}^d (\mathcal{W})$ dans soi-meme, alors U applique aussi $\mathrm{C} (\mathcal{W})$ dans soi-même. Pour notre approche, $\mathrm{CL}^d (\mathcal{W})$ peut avoir le sens particulier d'un espace des fonctions des états thermodynamique dont les variations sont dépendantes des variations des arguments; $\varphi(w)$ peut être aussi interprété comme la probabilité d'un état fixé A $(P(w, A) = \varphi(w))$.

Un système à liaisons complètes dont l'opérateur U est un opérateur de $C(\mathscr{W})$ en $C(\mathscr{W})$ sera appelé *C–système à liaisons complètes.*

Nous appellerons un système $\{S(t), t \in N\}$, modélisé à l'aide d'un modèle aléatoire discret $\{(\mathscr{W}, \mathscr{V}), (\mathscr{X}_t, \mathscr{F}_t)_{t \in N}, P_{t+1}, t \in N^0\}$ et dont le rapport entre l'état thermodynamique et l'état informationnel est décrit à l'aide d'un C–système à liaisons complètes, *C - système évolutif.*

§ 5. Nous pouvons maintenant étudier les rapports entre la *P - évolution,* défini par Prigogine seulement à l'aide du comportement thermodynamique, et le comportement dans l'espace des transitions du système.

Soit $t_0 = 0$ ou t_0 - le moment quand a eu lieu la dernière *P - évolution,* comme décrite dans § 1. Nous dirons qu'un système S (t) *subit une* $\varepsilon^S_{t_0,t}$ *- évolution* ($\varepsilon^S_{t_0,t} > 0$ donné) sur l'intervale $[t_0, t]$, si

$$\tilde{h}(t_0, t) > \varepsilon^S_{t_0,t}$$

par $\tilde{h}(t_0, t)$ notant *la variation totale de l'entropie thermodynamique h* sur l'intervalle $[t_0, t]$. Un système S (t) sera appelé *P - évolutif* si, pour tout $t \in N$, il existe $t' > t$ et $\varepsilon^S_{t,t'}$ ainsi que le système subit une $\varepsilon^S_{t,t'}$-evolution. Les résultats suivants concernent les C - systèmes évolutifs.

THÉORÈME 1. *Si* $\{S(t), t \in N\}$ *est un C–système évolutif qui subit une* $\varepsilon^S_{t_0,t}$ *- évolution sur l'intervalle* $[t_0, t]$ *alors il existe* $\eta^S_{t_0,t} > 0$ *ainsi que*

$$\overline{\mathscr{H}}(t_0, t; u(w, S^{(t_0)})) > \eta^S_{t_0,t}$$

par $\overline{\mathscr{H}}(t_0, t; u(w, S^{(t_0)}))$ *notant la variation totale de l'entropie informationnelle de transition du système sur l'intervalle (conditionnée par l'évolution sur* $[1, t_0]$).

La démonstration suit ab absurdo.

Un résultat analogue peut être démontré si on remplace l'entropie informationnelle (de transition) avec l'énergie informationnelle [7].

§ 6. Etudions maintenant les rapports entre la *P–évolution* et *l'ergodicité.* Rappellons qu'un système évolutif $\{S(t), t \in N\}$ à valeurs dans $(\mathscr{X}, \mathscr{F})$ s'appelle *uniformément ergodique* (au sens fort) s'il existe la probabilité P^∞ sur $\mathscr{F}$ et la suite $\{\delta_t\}_{t \in N}$, $(\delta_t \searrow 0)$ ainsi que, pour toute condition initiale $w \in \mathscr{W}$ et tout $A \in \mathscr{F}$, $t \in N$ [1] on ait

$$|P_w\{S(t) \in A\} - P^\infty(A)| < \delta_t .$$

Mentionnons que les systèmes ergodiques jouissent des propriétés de stabilité asymptotique (lois des grands nombres, lois limites centrales etc).

Le résultat qui suit démontre que sur le modèle formel construit on obtient des confirmations de certaines observations empiriques, présentées parfois comme postulats dans la littérature ([4], [6]): notamment, que l'évolution n'est pas compatible avec les stabilités de type statistique.

THÉORÈME 2. *Si* $\{S(t), t \in N\}$ *est un* C – *système évolutif uniformément ergodique, alors ce système n'est pas un système* P – *évolutif.*

La démonstration suit ab absurdo.

Il s'ensuit qu'en particulier pour de tels systèmes les conditions suffisantes pour l'ergodicité (par exemple, [5], [1]) sont aussi des conditions suffisantes pour la non-évolution.

Les démonstrations détaillées de ces résultats seront publiées dans un article ultérieur.

Les auteurs remercient Professeur Octav Onicescu pour l'intérêt chalereux qu'il a montré à leur étude.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. C. BOTEZ (1967) – *Théorie ergodique pour les systèmes à liaisons complètes,* « Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la RSR », *11* (59), 1, pp. 26–54.

[2] N. DUNFORD et J. T. SCHWARTZ (1960) – *Linear Operators,* Wiley, vol. 1.

[3] N. GEORGESCU-ROEGEN (1971) – *The Entropy Law and the Economic Process,* Harvard University Press.

[4] P. GLANSDORFF et I. PRIGOGINE (1971) – *Structure, Stabilité et Fluctuations,* Masson & C.

[5] M. IOSIFESCU (1963) – *Systèmes aléatoires à liaisons complètes à un ensemble quelconque d'états,* « Rev. Roum. Math. pures et appl. », *8,* pp. 611–645 (en russe).

[6] G. NICOLIS et I. PRIGOGINE (1977) – *Self-Organization in Non-Equilibrium Systems,* Wiley.

[7] O. ONICESCU et M. C. BOTEZ – *Introduction à l'économétrie informationnelle* (à paraître).

[8] O. ONICESCU et G. MIHOC (1935) – *Sur les chaînes de variables statistiques,* « Bull. Sci. Math. », *59,* pp. 174–192.

[9] M. TRIBAS (1961) – *Information Theory as the Basis for Thermostatics and Thermodynamics,* « General Systems », VI, pp. 127–138.