
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

MARIA ADELAIDE SNEIDER

**Sul problema pluriarmonico in un campo sferico di
 C^n per $n \geq 3$**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 74 (1983), n.6, p. 351–356.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1983_8_74_6_351_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi matematica. — *Sul problema pluriarmonico in un campo sferico di $\mathbb{C}^n$ per $n \geq 3$.* Nota di MARIA ADELAIDE SNEIDER, presentata (*) dal Socio G. FICHERA.

SUMMARY. — Let Σ be the boundary of the unit ball Ω of $\mathbb{C}^n$. A set of second order linear partial differential operators, tangential to Σ , is explicitly given in such a way that, for $n \geq 3$, the corresponding PDE characterize the trace of the solution of the pluriharmonic problem (either "in the large" or "local"), relative to Ω .

Si consideri, nello spazio $\mathbb{C}^n$ delle n variabili complesse, il campo sferico $\Omega: |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 < 1$. Sia Σ la frontiera di Ω .

Nel recente lavoro [6] sono stati considerati i due seguenti problemi:

1. (*Problema pluriarmonico in grande*).

Assegnata una funzione U a valori reali, definita su Σ , determinare le condizioni necessarie e sufficienti perché essa sia la traccia su Σ di una funzione pluriarmonica in Ω ⁽¹⁾. La u dicesi la soluzione del problema pluriarmonico in grande con dato U .

2. (*Problema pluriarmonico locale*).

Indicata con Δ una $(2n - 1)$ -cella contenuta in Σ e detta U una funzione a valori reali, definita in Δ , determinare le condizioni necessarie e sufficienti perché essa sia la traccia su Δ di una funzione pluriarmonica in un campo Ω^+ di $\mathbb{C}^n$ tale che: $\Omega^+ \subset \Omega$, $\partial\Omega^+ \supset \Delta$.

La u dicesi la soluzione del problema pluriarmonico locale con dato U .

Si considerino i seguenti operatori differenziali del primo ordine, tangenziali a Σ :

$$(1) \quad L_{h,k} = z_h \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} - \bar{z}_k \frac{\partial}{\partial z_h} \quad (1 \leq h < k \leq n),$$

$$(2) \quad \bar{L}_{h,k} = \bar{z}_h \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} - z_k \frac{\partial}{\partial z_h} \quad (1 \leq h < k \leq n).$$

(*) Nella seduta del 23 giugno 1983.

(1) Per funzione pluriarmonica in Ω si intende una funzione che sia la parte reale di una $w(z_1, \dots, z_n)$, funzione olomorfa in Ω delle n variabili complesse $z_1, \dots, z_n$.

Si ponga:

$$(3) \quad \Lambda_{h,k} = \bar{L}_{h,k} L_{h,k} - L_{h,k} \bar{L}_{h,k} \quad (1 \leq h < k \leq n),$$

$$(4) \quad M_{h,k} = \bar{L}_{h,k} L_{h,k} + L_{h,k} \bar{L}_{h,k} \quad (1 \leq h < k \leq n).$$

In [6], usando risultati generali contenuti in [4], [5], è stato dimostrato che:

Sia $U \in C^3(\Sigma)$ [$U \in C^3(\Delta)$]. Condizione necessaria e sufficiente perché esista la soluzione u del problema pluriarmonico in grande (del problema pluriarmonico locale) con dato U è che U sia soluzione su Σ (su Δ) delle seguenti equazioni:

$$(5) \quad \begin{aligned} & \bar{z}_h \bar{z}_n (|z_{n-1}|^2 + |z_n|^2) L_{h,n} U + z_h z_n (|z_{n-1}|^2 + |z_n|^2) \bar{L}_{h,n} U \\ & - \bar{z}_{n-1} \bar{z}_n (|z_h|^2 + |z_n|^2) L_{n-1,n} U - z_{n-1} z_n (|z_h|^2 + |z_n|^2) \bar{L}_{n-1,n} U \\ & + |z_n|^2 (|z_h|^2 + |z_n|^2) M_{n-1,n} U - |z_n|^2 (|z_{n-1}|^2 + |z_n|^2) M_{h,n} U = 0 \\ & (h = 1, \dots, n-2), \end{aligned}$$

$$(6) \quad \begin{aligned} & \bar{z}_k \bar{z}_n (|z_{n-1}|^2 + |z_n|^2) L_{h,n} U + z_h z_n (|z_{n-1}|^2 + |z_n|^2) \bar{L}_{k,n} U \\ & - z_h \bar{z}_k \bar{z}_{n-1} \bar{z}_n L_{n-1,n} U - z_h \bar{z}_k z_{n-1} z_n \bar{L}_{n-1,n} U + z_h \bar{z}_k |z_n|^2 M_{n-1,n} U \\ & - |z_n|^2 (|z_{n-1}|^2 + |z_n|^2) (\bar{L}_{k,n} L_{h,n} U + L_{h,n} \bar{L}_{k,n} U) = 0 \\ & (1 \leq h < k \leq n-1), \end{aligned}$$

$$(7) \quad \Lambda_{n-1,n} L_{h,n} U - L_{h,n} M_{n-1,n} U - L_{h,n} U - \delta_h^{n-1} L_{n-1,n} U = 0 \quad (2) \\ (h = 1, \dots, n-1).$$

Dopo la presentazione per la stampa della Nota [6], è apparso il lavoro [7], nel quale trovasi il seguente risultato: *se la forma quadratica di Levi ha rango $\rho \geq 2$ sulla varietà lineare tangente alla frontiera Σ di un campo $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, le condizioni differenziali, necessarie e sufficienti perché U sia la traccia di una funzione pluriarmonica in Ω , si possono esprimere per mezzo di operatori del secondo ordine.*

È questo un risultato sorprendente perché, mentre da un canto il caso in cui è $\rho = 1$ è da considerarsi atipico, d'altro canto la possibilità di caratterizzare la traccia di una funzione pluriarmonica unicamente mediante operatori del secondo ordine è stata esplicitamente esclusa da qualche Autore, anche in un lavoro in cui Ω è un campo sferico (cfr. [2], p. 22 e [3], p. 506).

Supposto, come in [6], che Ω sia il campo sferico sopra indicato, si ha $\rho = n-1$ e, quindi, $\rho > 1$ per $n \geq 3$. Mi è sembrato, pertanto, opportuno

(2) Le equazioni (5), (6), (7) sono state scritte « privilegiando » la variabile z_n . È, tuttavia, assai facile provare che, sostituendo z_n con qualsiasi altra variabile z_j , le equazioni, che vengono ad ottenersi, sono perfettamente equivalenti alle (5), (6), (7).

verificare che le equazioni del terzo ordine (7) sono soddisfatte da ogni U , la quale è soluzione delle (5) e delle (6). Ho ritenuto non inutile fare questo, poiché in [7] non vengono esplicitamente costruiti gli operatori differenziali tangenziali a Σ , mediante i quali si scrivono le equazioni alle derivate parziali atte a caratterizzare la traccia U di u . D'altronde il problema della costruzione esplicita di tali operatori è stato considerato da diversi Autori (cfr. [1], [2], [6], [8]).

In questa Nota dimostro che, se è $n \geq 3$ e se U è una soluzione in Σ (in Δ) delle equazioni (5), (6), essa soddisfa in Σ (in Δ) le equazioni (7).

Si richiamano dapprima talune identità fra gli operatori (1), (2), (3), (4), ottenute in [6].

$$(8) \quad \begin{aligned} & \bar{z}_h \bar{z}_n (|z_{n-1}|^2 + |z_n|^2) L_{h,n} - z_h z_n (|z_{n-1}|^2 + |z_n|^2) \bar{L}_{h,n} \\ & - \bar{z}_{n-1} \bar{z}_n (|z_h|^2 + |z_n|^2) L_{n-1,n} + z_{n-1} z_n (|z_h|^2 + |z_n|^2) \bar{L}_{n-1,n} \\ & + |z_n|^2 (|z_h|^2 + |z_n|^2) \Lambda_{n-1,n} - |z_n|^2 (|z_{n-1}|^2 + |z_n|^2) \Lambda_{h,n} = 0 \\ & (h=1, \dots, n-2), \end{aligned}$$

$$(9) \quad \begin{aligned} & \bar{z}_k \bar{z}_n (|z_{n-1}|^2 + |z_n|^2) L_{h,n} - z_h z_n (|z_{n-1}|^2 + |z_n|^2) \bar{L}_{k,n} \\ & - z_h \bar{z}_k \bar{z}_{n-1} \bar{z}_n L_{n-1,n} + z_h \bar{z}_k z_{n-1} z_n \bar{L}_{n-1,n} + z_h \bar{z}_k |z_n|^2 \Lambda_{n-1,n} \\ & - |z_n|^2 (|z_{n-1}|^2 + |z_n|^2) (\bar{L}_{k,n} L_{h,n} - L_{h,n} \bar{L}_{k,n}) = 0 \\ & (1 \leq h < k \leq n-1), \end{aligned}$$

$$(10) \quad \Lambda_{n-1,n} L_{h,n} - L_{h,n} \Lambda_{n-1,n} - L_{h,n} - \delta_h^{n-1} L_{n-1,n} = 0 \quad (h=1, \dots, n-1).$$

Si ha inoltre:

$$(11) \quad M_{h,k} = \Lambda_{h,k} + 2 L_{h,k} \bar{L}_{h,k} \quad (1 \leq h < k \leq n) \quad (3).$$

Si ponga:

$$(12) \quad \begin{aligned} E^{(h)} &= \bar{z}_n (|z_{n-1}|^2 + |z_n|^2) L_{h,n} \bar{L}_{h,n} - \bar{z}_n (|z_h|^2 \\ & + |z_n|^2) L_{n-1,n} \bar{L}_{n-1,n} - z_h (|z_{n-1}|^2 + |z_n|^2) \bar{L}_{h,n} \\ & + z_{n-1} (|z_h|^2 + |z_n|^2) \bar{L}_{n-1,n} \end{aligned} \quad (h=1, \dots, n-2),$$

$$(13) \quad \begin{aligned} F^{(h)} &= (|z_{n-1}|^2 + |z_n|^2) L_{h,n} \bar{L}_{n-1,n} - z_h \bar{z}_{n-1} L_{n-1,n} \bar{L}_{n-1,n} \\ & - z_h z_n \bar{L}_{n-1,n} \end{aligned} \quad (h=1, \dots, n-2),$$

(3) Le equazioni (5), (6), (7) sono, rispettivamente, le (1.13), (1.15) e (1.17) di [6], mentre le (8), (9), (10) sono, rispettivamente le (1.10), (1.12), (1.11) di [6].

$$(14) \quad G^{(h)} = \bar{z}_n (|z_{n-1}|^2 + |z_n|^2) L_{n-1,n} \bar{L}_{h,n} - \bar{z}_h z_{n-1} \bar{z}_n L_{n-1,n} \bar{L}_{n-1,n} \\ - z_{n-1} (|z_{n-1}|^2 + |z_n|^2) \bar{L}_{h,n} + \bar{z}_h z_{n-1}^2 \bar{L}_{n-1,n} \quad (h = 1, \dots, n-2).$$

Con calcoli elementari, ancorché tediosi, si constata che riesce:

$$(15) \quad \bar{z}_n (|z_h|^2 + |z_n|^2) L_{n-1,n} L_{n-1,n} \bar{L}_{n-1,n} \\ - \bar{z}_h z_{n-1} \bar{z}_n L_{h,n} L_{n-1,n} \bar{L}_{n-1,n} = \left[L_{h,n} - \frac{z_h (2|z_{n-1}|^2 + 3|z_n|^2)}{\bar{z}_n (|z_{n-1}|^2 + |z_n|^2)} \right] G^{(h)} \\ - \left(L_{n-1,n} - 2 \frac{z_{n-1}}{\bar{z}_n} \right) E^{(h)} - \frac{\bar{z}_h z_{n-1}^2}{|z_{n-1}|^2 + |z_n|^2} F^{(h)} \quad (h = 1, \dots, n-2).$$

Si supponga, ora, che la U sia soluzione delle (5) e delle (6). Per dimostrare che la U è anche soluzione delle (7), basterà servirsi delle (5) e di quelle fra le (6), che si ottengono assumendo $k = n-1$, e $h = 1, \dots, n-2$.

Le (6) per $k = n-1$ divengono:

$$(6)_{n-1} \quad \bar{z}_{n-1} \bar{z}_n (|z_{n-1}|^2 + |z_n|^2) L_{h,n} U + z_h z_n |z_n|^2 \bar{L}_{n-1,n} U \\ - z_h \bar{z}_{n-1}^2 \bar{z}_n L_{n-1,n} U + z_h \bar{z}_{n-1} |z_n|^2 M_{n-1,n} U - |z_n|^2 (|z_{n-1}|^2 \\ + |z_n|^2) (\bar{L}_{n-1,n} L_{h,n} U + L_{h,n} \bar{L}_{n-1,n} U) = 0 \quad (h = 1, \dots, n-2).$$

Inoltre dalle (9), ponendo $k = n-1$, si ottiene:

$$(9)_{n-1} \quad \bar{z}_{n-1} \bar{z}_n (|z_{n-1}|^2 + |z_n|^2) L_{h,n} - z_h z_n |z_n|^2 \bar{L}_{n-1,n} \\ - z_h \bar{z}_{n-1}^2 \bar{z}_n L_{n-1,n} + z_h \bar{z}_{n-1} |z_n|^2 \Lambda_{n-1,n} - |z_n|^2 (|z_{n-1}|^2 \\ + |z_n|^2) (\bar{L}_{n-1,n} L_{h,n} - L_{h,n} \bar{L}_{n-1,n}) = 0 \quad (h = 1, \dots, n-2).$$

Se la U soddisfa le (5) e le $(6)_{n-1}$, essa soddisfa anche le seguenti equazioni differenziali del secondo ordine:

$$(16) \quad E^{(h)} U = 0 \quad (h = 1, \dots, n-2),$$

$$(17) \quad F^{(h)} U = 0 \quad (h = 1, \dots, n-2),$$

$$(18) \quad G^{(h)} U = 0 \quad (h = 1, \dots, n-2).$$

Le (16) si deducono dalle (5), utilizzando (11) e (8); le (17) si ottengono dalle $(6)_{n-1}$, utilizzando $(9)_{n-1}$ e (11). Le (18) si deducono calcolando la somma delle $(6)_{n-1}$ e delle (17) moltiplicate per $|z_n|^2$ e coniugando il risultato.

Tenendo presente la permutabilità degli operatori $L_{h,n}$ e $L_{n-1,n}$, dalle (17) si ottiene:

$$\begin{aligned} L_{n-1,n} F^{(h)} U &= (|z_{n-1}|^2 + |z_n|^2) L_{h,n} L_{n-1,n} \bar{L}_{n-1,n} U \\ &- z_h \bar{z}_{n-1} L_{n-1,n} L_{n-1,n} \bar{L}_{n-1,n} U = 0 \quad (h = 1, \dots, n-2). \end{aligned}$$

Ne segue che

$$(20) \quad L_{h,n} L_{n-1,n} \bar{L}_{n-1,n} U = \frac{z_h \bar{z}_{n-1}}{|z_{n-1}|^2 + |z_n|^2} L_{n-1,n} L_{n-1,n} \bar{L}_{n-1,n} U \quad (h = 1, \dots, n-2).$$

Si osservi, inoltre, che le (7), in virtù di (11) e delle identità (10), possono scriversi al modo seguente:

$$(7') \quad L_{h,n} L_{n-1,n} \bar{L}_{n-1,n} U = 0 \quad (h = 1, \dots, n-1).$$

Dalle (20) segue, pertanto, che se è soddisfatta l'equazione (7') relativa a $h = n-1$, lo sono tutte le (7').

Dall'identità (15), usando le equazioni (16), (17), (18), si ottiene

$$(21) \quad L_{n-1,n} L_{n-1,n} \bar{L}_{n-1,n} U = \frac{\bar{z}_h z_{n-1}}{|z_h|^2 + |z_n|^2} L_{h,n} L_{n-1,n} \bar{L}_{n-1,n} U \quad (h = 1, \dots, n-2).$$

Dalle (21), servendosi delle (20), si deduce:

$$\frac{|z_n|^2 (|z_h|^2 + |z_{n-1}|^2 + |z_n|^2)}{(|z_h|^2 + |z_n|^2) (|z_{n-1}|^2 + |z_n|^2)} L_{n-1,n} L_{n-1,n} \bar{L}_{n-1,n} U = 0.$$

Ne segue che la U soddisfa la (7') relativa ad $h = n-1$ e, per quanto osservato precedentemente, anche tutte le (7').

Si può, quindi, concludere che:

Sia $U \in C^3(\Sigma)$ [$U \in C^3(\Delta)$]. Condizione necessaria e sufficiente perché esista la soluzione u del problema pluriarmonico in grande (del problema pluriarmonico locale) con dato U è che U sia soluzione su Σ (su Δ) delle equazioni (5) e (6).

BIBLIOGRAFIA

- [1] T. AUDIBERT (1977) - *Caractérisation locale par des opérateurs différentielles des restrictions à la sphère de C^n des fonctions pluriharmoniques*, « C. R. Acad. Sci. », Paris, A, 294, 1029-1031.
- [2] E. BEDFORD (1974) - *The Dirichlet Problem for Some Overdetermined Systems on the Unit Ball in C^n* , « Pacific Journal of Math. », 51, 19-25.

- [3] E. BEDFORD e P. FEDERBUSH (1974) – *Pluriharmonic Boundary Values*, «Tokio Mathem. Journal», 26, 505–511.
- [4] G. FICHERA (1981) – *Boundary values of analytic functions of several variables*, in corso di stampa sui «Proceedings of the Inter. Conference on Complex Analysis», Varna, settembre.
- [5] G. FICHERA (1981) – *Problemi di valori al contorno per le funzioni pluriarmoniche*, «Actes du VI^e Congrès du Groupement des Mathématiciens d'Expression Latine», Luxembourg, Gauthier-Villards; 139–151.
- [6] G. FICHERA e M. A. SNEIDER (1982) – *Pluriharmonic functions in the unit ball of $\mathbb{R}^{2n}$* , «Rendiconti di Matematica», Roma, 4, 2, VII, 627–641.
- [7] M. NACINOVICH (1982) – *Complex Analysis and Complexes of Differential Operators*, in «Complex Analysis», Proc. Summer School on Complex Analysis (Trieste, 1980), Lecture Notes in Mathem., 950, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York; 105–195.
- [8] W. RUDIN (1980) – *Function theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$* , Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 398–402.

Nota aggiunta durante la correzione delle bozze.

Il risultato del lavoro [7], citato in questa Nota, era già stato osservato da E. Bedford (Indiana Univ. J. 29, 3, 1980, 333–340), il quale, per quanto concerne la sfera, fa riferimento alla Tesi di T. Audibert (1977), che non sembra essere stata pubblicata, ma i cui risultati hanno fatto oggetto di una comunicazione ad un Colloquio (M. R. 81c-32037).