
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

PAOLO BLONDEAUX

**Onde di ampiezza finita in contenitori oscillanti
verticalmente**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 74 (1983), n.5, p. 283–297.*

Accademia Nazionale dei Lincei

[<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1983_8_74_5_283_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1983_8_74_5_283_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica dei fluidi. — *Onde di ampiezza finita in contenitori oscillanti verticalmente.* Nota di PAOLO BLONDEAUX, presentata (*) dal Corrisp. E. MARCHI.

SUMMARY. — Surface waves of finite amplitude originated by the vertical oscillations of a container are studied. The existence of both supercritical and subcritical waves is found which are either synchronous or subharmonic with respect to the basic oscillation.

INTRODUZIONE

La determinazione delle caratteristiche delle onde superficiali di un liquido, in un contenitore che oscilla, riveste particolare importanza sia nel campo dell'ingegneria aeronavale sia in quello dell'ingegneria civile. Le pressioni dinamiche indotte infatti sulle pareti del contenitore e le forze che ne derivano possono avere un ruolo rilevante nei problemi connessi con la stabilità della struttura, soprattutto in situazioni in cui è presente una mutua esaltazione tra il moto del fluido e quello del recipiente che lo contiene.

In campo aero-navale sono stati condotti numerosi studi sul moto del propellente liquido contenuto nei serbatoi quando questi ultimi oscillano per effetto di onde di mare, della turbolenza atmosferica o di vibrazioni comunque sempre presenti in un veicolo [1], [2], [3], [4], [5]. In campo civile rilevanti applicazioni si riferiscono allo studio del moto del fluido contenuto in involucri artificiali o nei reattori nucleari per effetto di sollecitazioni sismiche [6], [7], [8].

La comparsa di onde stazionarie all'interno di un contenitore riempito parzialmente di liquido ed oscillante verticalmente fu osservata sperimentalmente per la prima volta da Faraday [9] il quale rilevò inoltre che il periodo di oscillazione della superficie libera era pari a due volte quello di oscillazione del contenitore. Misure successive di Matthiessen [10, 11] evidenziarono tuttavia la presenza di oscillazioni della superficie libera sincrone con il moto del contenitore. La discrepanza di questi primi risultati sperimentali stimolò le successive esperienze di Lord Rayleigh [12] il quale confermò i risultati di Faraday e suggerì anche una interpretazione teorica [13].

Una spiegazione della possibile comparsa di onde stazionarie sia sincrone che subarmoniche rispetto al moto del contenitore fu fornita successivamente da Benjamin & Ursell [14]. Questi, sviluppando un'analisi di stabilità lineare per modi normali rispetto a disturbi presenti sulla superficie libera del liquido, giunsero alla determinazione di un'equazione per l'ampiezza della generica

(*) Nella seduta del 14 maggio 1983.

componente il disturbo nella forma di Mathieu, evidenziando quindi l'esistenza nel piano (p, q) , con p e q funzioni dei parametri del problema, di regioni prossime ai punti $(1, 0)$ e $(4, 0)$ in cui il disturbo risulta instabile con una dipendenza temporale rispettivamente subarmonica o sincrona rispetto al moto del contenitore.

Per determinare in tali regioni l'evoluzione temporale dell'ampiezza del disturbo, che la teoria lineare predice esponenzialmente crescente, è necessario abbandonare l'ipotesi di linearità e considerare l'interazione fra le varie armoniche.

Yarymovych [15], estendendo il metodo sviluppato da Penney & Price [16] al caso di oscillazioni forzate, determinò l'ampiezza finale a cui perviene un disturbo con dipendenza temporale subarmonica rispetto al moto del contenitore. Tuttavia la sua analisi risulta incompleta, non solo perchè trascura una possibile dipendenza temporale sincrona del disturbo, ma anche perchè considera valori di $(p, q) = (1, \varepsilon q_1)$ con $\varepsilon \ll 1$. Ciò permette di evidenziare l'esistenza di onde stazionarie di ampiezza finita solo supercritiche e non subcritiche, cioè presenti in regioni del piano (p, q) in cui la teoria lineare predice stabilità.

Nel presente lavoro si considerano onde di ampiezza piccola ma finita, sia sincrone che subarmoniche rispetto all'oscillazione del contenitore, e si determina la loro evoluzione temporale in un intorno dei punti $(p, q) = (1, 0)$ e $(p, q) = (4, 0)$ evidenziando l'esistenza di onde di ampiezza finita subcritiche. Nel paragrafo seguente si formula il problema in termini di variabili adimensionali. Nel terzo si analizza l'evoluzione temporale di un'onda di ampiezza infinitesima presente sulla superficie libera del fluido. Nel quarto paragrafo si analizza il comportamento di onde di ampiezza piccola ma finita ed in particolare si ottengono le equazioni che descrivono l'evoluzione temporale dell'ampiezza di onde subarmoniche e sincrone rispetto all'oscillazione del contenitore. Infine, nell'ultimo paragrafo, si discute la soluzione delle predette equazioni nel piano delle fasi.

FORMULAZIONE DEL PROBLEMA

Consideriamo il moto bidimensionale di un fluido ideale di densità costante ρ presente all'interno di un contenitore rettangolare di larghezza l' che oscilla verticalmente con accelerazione ⁽¹⁾

$$(1) \quad f' = f'_0 \cos(\omega t)$$

essendo f'_0 minore dell'accelerazione di gravità.

Poniamo h' il livello del fluido in condizioni di quiete e definiamo un sistema di assi cartesiani x', y' , solidale con il contenitore, con l'asse x' coincidente

(1) Gli apici denotano quantità dimensionali.

con il fondo e l'asse y' rivolto verso l'alto (vedi figura 1).

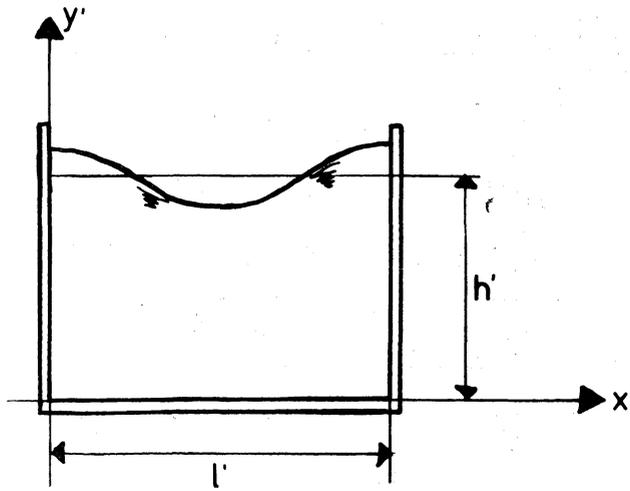


Fig. 1.

Assunto il moto irrotazionale e bidimensionale è possibile definire una funzione potenziale $\phi'(x', y')$ legata alle componenti di velocità u' e v' , rispettivamente lungo l'asse x' e y' , dalle relazioni

$$(2)_{a,b} \quad u' = \frac{\partial \phi'}{\partial x'} \quad v' = \frac{\partial \phi'}{\partial y'}$$

Tale funzione deve soddisfare l'equazione

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y'^2} = 0$$

e le condizioni al contorno

$$(4)_{a,b} \quad \frac{\partial \phi'}{\partial x'} = 0 \quad \text{per } x' = 0 \text{ e } x' = l'$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial y'} = 0 \quad \text{per } y' = 0$$

$$(4)_{c,d} \quad \frac{\partial \eta'}{\partial t'} + \frac{\partial \phi'}{\partial x'} \frac{\partial \eta'}{\partial x'} - \frac{\partial \phi'}{\partial y'} = 0 \quad \text{per } y' = h' + \eta'(x', t')$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial t'} + [g - f_0 \cos(\omega t')] \eta' + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi'}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi'}{\partial y'} \right)^2 \right] - \sigma \frac{\partial^2 \eta' / \partial x'^2}{[1 + (\partial \eta' / \partial x')^2]^{3/2}} = 0 \quad \text{per } y' = h' + \eta'(x', t')$$

ove g è l'accelerazione di gravità, σ la tensione superficiale ed η' rappresenta l'ampiezza dell'oscillazione della superficie libera in funzione di x' e t' rispetto al piano $y' = h'$.

Le condizioni $(4)_{a,b}$ impongono l'annullarsi alle pareti della componente normale di velocità.

L'equazione $(4)_c$ esprime la condizione cinematica

$$(5) \quad \frac{d\eta'}{dt'} = v' \quad \text{per } y' = h' + \eta'(x', t')$$

mentre l'equazione $(4)_d$ impone la continuità delle tensioni normali attraverso la superficie libera e differisce da quella usata da Yarymovych [15] per l'introduzione del termine legato alla tensione superficiale.

Definite le seguenti variabili adimensionali

$$(6) \quad (x, y, l, \eta) = (x', y', l', \eta') h^{-1}; \quad t = \omega t'; \quad (f, f_0) = (f', f'_0) g^{-1}; \\ \phi = \frac{\omega}{gh} \phi'$$

l'equazione (3) e le condizioni al contorno $(4)_{a,b,c,d}$ assumono la forma

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad \text{per } x = 0, \quad x = 1; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{per } y = 0$$

$$(8)_{a,b,c,d} \quad \Omega \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{per } y = 1 + \eta(x, t)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - (1 - f_0 \cos t) \eta + \frac{1}{2\Omega} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] - \\ - S \frac{\partial^2 \eta / \partial x^2}{[1 + (\partial \eta / \partial x)^2]^{3/2}} = 0 \quad \text{per } y = 1 + \eta(x, t)$$

essendo Ω e S rispettivamente i parametri di frequenza e di tensione superficiale definiti dalle seguenti relazioni

$$(9)_{a,b} \quad \Omega = \frac{\omega^2 h'}{g} \quad S = \frac{\sigma}{\rho g h'^2}$$

ONDE DI PICCOLA AMPIEZZA

Una soluzione del sistema costituito dall'equazione (7) e dalle condizioni al contorno $(8)_{a,b,c,d}$ è quella identicamente nulla

$$(10) \quad \bar{\eta}(x, t) = 0 \quad \bar{\phi}(x, y, t) = 0$$

valida in assenza di moto relativo del fluido rispetto al contenitore. La stabilità di tale soluzione è stata studiata da Benjamin & Ursell [14], i quali hanno analizzato l'evoluzione temporale di un disturbo caratterizzato da potenziale ϕ e ampiezza η piccoli, tali che

$$(11) \quad \phi \ll 1, \quad \eta \ll 1$$

In tale situazione è possibile linearizzare le equazioni (8)_{c,d} e sviluppare in serie di Fourier le funzioni incognite;

$$(12) \quad \eta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cos(nkx)$$

$$(13) \quad \phi(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Omega b_n(t) \Phi_n(y) \cos(nkx)$$

con $k = 2\pi/l$.

La soluzione dell'equazione (7) in cui siano sostituite le (12), (13) permette la determinazione delle funzioni $\Phi_n(y)$ a meno di due costanti ottenibili attraverso l'imposizione delle condizioni (8)_b e (8)_c. Quest'ultima consente quindi di stabilire una relazione fra le funzioni $a_n(t)$ e $b_n(t)$.

Si trova:

$$(14)_{a,b} \quad \Phi_n(y) = \frac{\cosh(nky)}{nk \sinh(nk)} \quad b_n(t) = \frac{da_n(t)}{dt}.$$

La sostituzione delle (12), (13) e (14)_{a,b} nella (8)_d fornisce infine l'equazione per la $a_n(t)$ che si può porre nella nota forma di Mathieu

$$(15) \quad \frac{d^2 a_n}{dT^2} + [p_n - 2q_n \cos(2T)] a_n = 0$$

avendo definito

$$(16)_{a,b,c} \quad T = t/2; \quad p_n = \frac{4nk \operatorname{tgh}(nk)}{\Omega} [1 + (nk)^2 S];$$

$$q_n = \frac{2nk \operatorname{tgh}(nk)}{\Omega} f_0.$$

La soluzione dell'equazione (15) e la sua discussione in termini della stabilità del moto base caratterizzato da $\bar{\eta}$ e $\bar{\phi}$ è stata fornita da Benjamin & Ursell [14]. Emerge così l'esistenza di regioni prossime ai punti

$$(17) \quad (p_n, q_n) = (N^2, 0) \quad N = 1, 2, 3, \dots$$

ove la soluzione $a_n(T)$ è esprimibile come prodotto di una funzione periodica per una funzione ampiezza crescente esponenzialmente nel tempo. In tali regioni è dunque necessario considerare l'interazione fra le varie armoniche e rinunciare almeno parzialmente, alle ipotesi $\eta \ll 1$, $\phi \ll 1$.

ONDE DI AMPIEZZA FINITA

Ci proponiamo di analizzare quindi l'evoluzione, in regime debolmente non lineare, della componente fondamentale $n = 1$ della perturbazione emersa dalla analisi lineare, separatamente in un intorno dei punti $(p, q) = (1, 0)$ e $(p, q) = (4, 0)$ ⁽²⁾.

Caso subarmonico.

Consideriamo, in un intorno del punto $(p, q) = (1, 0)$, il processo debolmente non lineare che sorge quando la componente fondamentale $n = 1$, caratterizzata da una dipendenza temporale da T del tipo e^{iT} , e^{-iT} , interagisce con se stessa a causa dei termini quadratici presenti nelle equazioni (8)_{c,d} e con il termine forzante dovuto all'oscillazione del contenitore. Alla prima interazione vengono prodotte le armoniche $n = 0$ e $n = 2$ con una dipendenza temporale legata ai prodotti di e^{iT} ed e^{-iT} .

La seconda interazione genera la fondamentale ed altre armoniche con dipendenza temporale espressa da e^{iT} ed e^{-iT} . Per eliminare la comparsa di termini secolari è necessario imporre quindi una condizione di ortogonalità.

Posto

$$\begin{aligned} p &= 1 - \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + O(\varepsilon^3) \\ (18)_{a,b,c} \quad q &= \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + O(\varepsilon^3) \\ f_0 &= \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + O(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

con $\varepsilon \ll 1$, le precedenti considerazioni suggeriscono l'esistenza di una variabile temporale « lenta »

$$(19) \quad \tau = \varepsilon T$$

e la seguente struttura della soluzione in termini di potenze di ε .

$$\begin{aligned} (20)_{a,b} \quad \eta &= \varepsilon^{\frac{1}{2}} \eta_1(\tau, T, x) + \varepsilon \eta_2(\tau, T, x) + \varepsilon^{\frac{2}{3}} \eta_3(\tau, T, x) + O(\varepsilon^2) \\ \phi &= \varepsilon^{\frac{1}{2}} \phi_1(\tau, T, y) + \varepsilon \phi_2(\tau, T, x, y) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \phi_3(\tau, T, x, y) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

(2) Il pedice $n = 1$ è stato eliminato per non appesantire troppo le notazioni.

Sostituendo le espressioni (20)_{a, b}, (19), (18) nelle (7), (8) si ottengono ai vari ordini di approssimazione i seguenti problemi.

$$\boxed{O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})}$$

$$\nabla^2 \phi_1 = 0$$

$$(21)_{a, b, c, d} \quad \begin{aligned} \frac{\Omega}{2} \eta_{1, \tau} - \phi_{1, y} &= 0 && \text{per } y = 1 \\ \frac{1}{2} \phi_{1, \tau} + \eta_1 - S \eta_{1, xx} &= 0 && \text{per } y = 1 \\ \phi_{1, y} &= 0 && \text{per } y = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{O(\varepsilon)}$$

$$\nabla^2 \phi_2 = 0$$

$$(22)_{a, b, c, d} \quad \begin{aligned} \frac{\Omega}{2} \eta_{2, \tau} - \phi_{2, y} &= -\eta_{1, x} \phi_{1, x} + \eta_{1, yy} \eta_1 && \text{per } y = 1 \\ \frac{1}{2} \phi_{2, \tau} + \eta_2 - S \eta_{2, xx} &= -\frac{1}{2} \phi_{1, \tau y} \eta_1 - \frac{1}{2 \Omega} (\phi_{1, x}^2 + \phi_{1, y}^2) && \text{per } y = 1 \\ \phi_{2, y} &= 0 && \text{per } y = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{O(\varepsilon^{3/2})}$$

$$\nabla^3 \phi_3 = 0$$

$$(23)_{a, b, c, d} \quad \begin{aligned} \frac{\Omega}{2} \eta_{3, \tau} - \phi_{3, y} &= -\eta_{1, x} \phi_{2, x} - \eta_{2, x} \phi_{1, x} - \eta_{1, x} \eta_1 \phi_{1, xy} + \phi_{1, yy} \eta_2 + \\ &+ \phi_{2, yy} \eta_1 + \frac{1}{2} \phi_{1, yyy} \eta_1^2 - \frac{\Omega}{2} \eta_{1, \tau} && \text{per } y = 1 \\ \frac{1}{2} \phi_{3, \tau} + \eta_3 - S \eta_{3, xx} &= -\frac{1}{2} \phi_{1, \tau} - \frac{1}{2} \phi_{1, \tau y} \eta_2 - \frac{1}{2} \phi_{2, \tau y} \eta_1 + \\ &- \frac{1}{4} \phi_{1, \tau yy} \eta_1^2 + f_1 \eta_1 \cos(2\tau) - \frac{1}{\Omega} (\phi_{1, x} \phi_{2, x} + \phi_{1, y} \phi_{2, y} + \\ &+ \phi_{1, xy} \phi_{1, x} \eta_1 + \phi_{1, y} \phi_{1, yy} \eta_1) - \frac{3}{2} S \eta_{1, xx} \eta_1^2 && \text{per } y = 1 \\ \phi_{3, y} &= 0 && \text{per } y = 0. \end{aligned}$$

Il problema (21) ha soluzione nella forma

$$(24)_{a,b} \quad \eta_1 = Z(\tau) \cos(kx) e^{iT} + Z^*(\tau) \cos(kx) e^{-iT}$$

$$\phi_1 = \frac{i\Omega Z(\tau)}{2} \frac{\cosh(ky)}{k \sinh(k)} \cos(kx) e^{iT} - \frac{i\Omega Z^*(\tau)}{2} \frac{\cosh(ky)}{k \sinh(k)} \cos(kx) e^{-iT}$$

dove $Z(\tau)$ è una funzione complessa della variabile temporale lenta τ determinabile ad un ordine di approssimazione successivo.

Utilizzando la ortogonalità delle funzioni trigonometriche è possibile ottenere la soluzione all'ordine ε nella forma

$$(25)_{a,b} \quad \eta_2 = a_2 Z Z \cos(2kx) + \cos(2kx) [b_2 Z^2 e^{2iT} + b_2 (Z^*)^2 e^{-2iT}]$$

$$\phi_2 = \Omega \cosh(2ky) \cos(2kx) [c_2 Z^2 e^{2iT} + c_2 (Z^*)^2 e^{-2iT}]$$

dove i valori di a_2, b_2, c_2 sono riportati nell'appendice A.

Il problema (23) dopo alcune elaborazioni algebriche genera un'equazione non omogenea con alcuni termini che forzerebbero le soluzioni « naturali » proprie di tale equazione producendo quindi termini secolari a meno di non soddisfare una condizione di ortogonalità. Tale condizione conduce ad una equazione per la $Z(\tau)$ nella forma

$$(26) \quad \frac{dZ}{d\tau} + \alpha Z^2 Z - \beta Z + \gamma Z^* = 0$$

dove i valori di α, β, γ sono anch'essi riportati in appendice A.

La soluzione di tale equazione verrà discussa nel paragrafo seguente.

Caso sincrono.

Analizziamo ora il comportamento della soluzione in un intorno del punto $(p, q) = (4, 0)$ e determiniamo nuovamente come l'armonica fondamentale $n = 1$ interagisce con se stessa e con le altre armoniche per effetto dei termini non lineari. Il processo è analogo a quello descritto nel caso subarmonico solo che la fondamentale interagisce due volte con il termine forzante prima di essere riprodotta.

E quindi necessario definire

$$(27) \quad \tau = \varepsilon^2 T$$

(3) Il simbolo * indica il complesso coniugato di un numero complesso.

ed adottare i seguenti sviluppi

$$\begin{aligned}
 p &= 4 - \varepsilon^2 p_2 + O(\varepsilon^3) \\
 q &= \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + O(\varepsilon^3) \\
 (28)_{a, b, c, d, e} \quad f_0 &= \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + O(\varepsilon^3) \\
 \eta(\tau, T, x) &= \varepsilon \eta_1(\tau, T, x) + \varepsilon^2 \eta_2(\tau, T, x) + \varepsilon^3 \eta_3(\tau, T, x) + O(\varepsilon^4) \\
 \Phi(\tau, T, x, y) &= \varepsilon \phi_1(\tau, T, x, y) + \varepsilon^2 \phi_2(\tau, T, x, y) + \varepsilon^3 \phi_3(\tau, T, x, y) + O(\varepsilon^4).
 \end{aligned}$$

La sostituzione delle espressioni (28) nelle (7)–(8) conduce, ai vari ordini di approssimazione, a problemi analoghi a quelli ottenuti per il caso subarmonico. Al minimo ordine di approssimazione le funzioni che descrivono l'andamento della superficie libera ed il potenziale sono esprimibili nella forma

$$\begin{aligned}
 \eta_1 &= Z(\tau) \cos(kx) e^{2iT} + Z^*(\tau) \cos(kx) e^{-2iT} \\
 (29)_{a, b} \quad \phi_1 &= \Omega \frac{\cosh(ky)}{k \sinh(k)} \cos(kx) [iZ(\tau) e^{2iT} - iZ^*(\tau) e^{-2iT}]
 \end{aligned}$$

ove la funzione $Z(\tau)$ che descrive l'andamento dell'ampiezza dell'onda al variare di τ è determinata da una condizione di risolubilità all'ordine ε^3 . Quest'ultima fornisce

$$(30) \quad \frac{dZ}{d\tau} + \alpha Z^2 Z - \beta Z + \gamma Z^* = 0$$

dove i valori di α, β, γ sono riportati in appendice B.

SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE AMPIEZZA

Le equazioni differenziali ordinarie (26) e (30) per la $Z(\tau)$ differiscono fra di loro solamente nella definizione dei valori di α, β, γ e sono analoghe a quella ottenuta da Hall & Seminara [17] nel caso subarmonico per l'ampiezza delle oscillazioni di una cavità gassosa soggetta ad un campo acustico.

Seguendo Hall & Seminara [17], la soluzione può essere espressa nella forma

$$(31) \quad Z(\tau) = |Z(\tau)| e^{-i\tau\theta}$$

e le equazioni (26) e (30) si riducono quindi a

$$\begin{aligned}
 (32)_{a, b} \quad \frac{d|Z|^2}{d\tau} &= -2\gamma_i |Z|^2 \sin(2\theta) \\
 \frac{d(|Z|^2 \cos 2\theta)}{d\tau} &= 2|Z|^2 \sin(2\theta) [-\beta_i + \alpha_i |Z|^2]
 \end{aligned}$$

ove si è tenuto in conto il fatto che α, β, γ sono numeri puramente immaginari e si sono denotate appunto con il pedice i le variabili

$$(33) \quad (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) = (\alpha, \beta, \gamma)/i.$$

La soluzione del sistema (32)_{a,b} corrispondente a condizioni iniziali $|Z_0|$, θ_0 è fornita in forma implicita da

$$(34)_{a,b} \quad \frac{H(\theta) \pm (H^2(\theta) + C)^{\frac{1}{2}}}{H(\theta)_0 \pm (H^2(\theta_0) + C)^{\frac{1}{2}}} = \exp[-2\gamma_i \sin(2\theta\tau)]$$

$$2\alpha_i |Z|^2 = H(\theta) \pm (H^2(\theta) + C)^{\frac{1}{2}}$$

con $H(\theta)$ e C rispettivamente definiti da

$$(35)_{a,b} \quad H(\theta) = +2\beta_i - 2\gamma_i \cos(2\theta)$$

$$C = 2\alpha_i |Z|^2 [2\alpha_i |Z_0|^2 - 4\beta_i + 4\gamma_i \cos(2\theta_0)].$$

La soluzione (34)_{a,b} è limitata e periodica ed il suo comportamento dipende dai valori assunti da α_i , β_i e γ_i . Esistono, oltre all'origine, altri quattro possibili punti singolari delle equazioni (32)_{a,b} individuati da

$$(36)_{a,b} \quad |Z| = \left[\frac{(\beta_i - \gamma_i)}{\alpha_i} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{per } \theta = 0, \pi$$

$$|Z| = \left[\frac{(\gamma_i + \beta_i)}{\alpha_i} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{per } \theta = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi.$$

La loro esistenza dipende chiaramente dai dati del problema ed in particolare dal valore assunto da p e q .

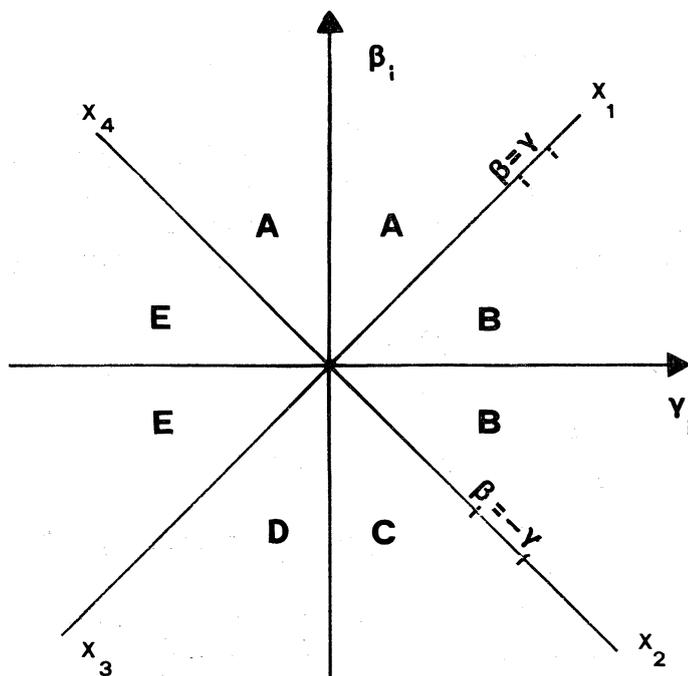


Fig. 2.

Fig. 3 a.

$$\begin{aligned} \alpha &= -1, \\ \beta &= 1, \\ \gamma &= 0. \end{aligned}$$

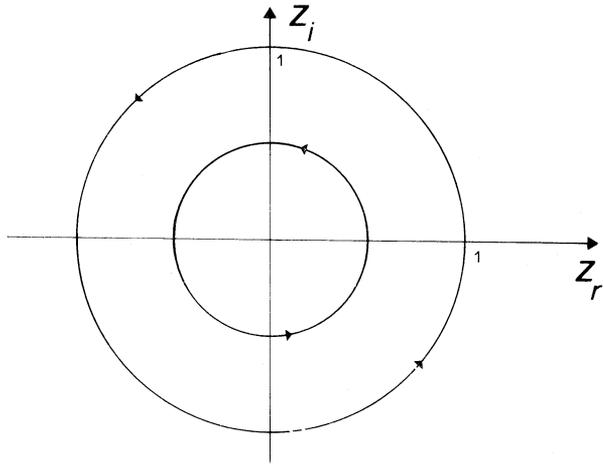


Fig. 3 b.

$$\begin{aligned} \alpha &= -1, \\ \beta &= 0, \\ \gamma &= 1. \end{aligned}$$

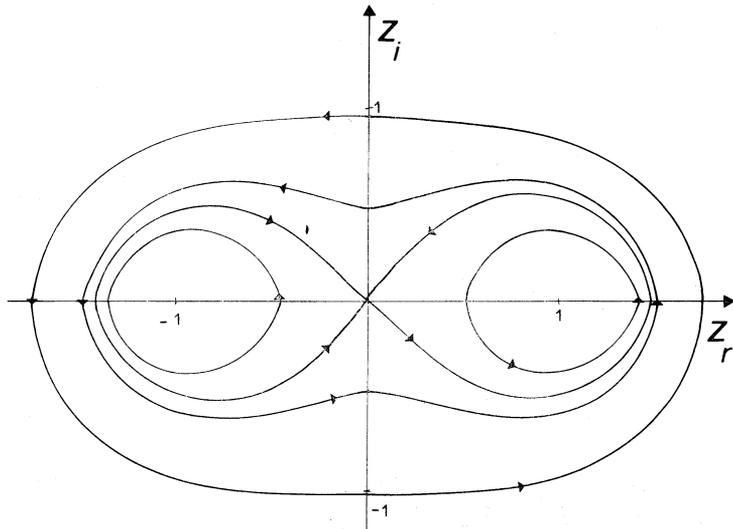
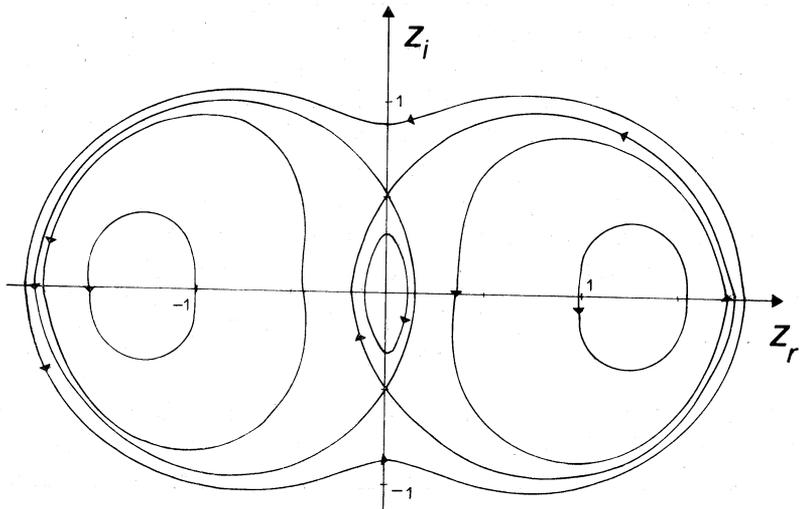


Fig. 3 c.

$$\begin{aligned} \alpha &= -1, \\ \beta &= -1, \\ \gamma &= 0.69. \end{aligned}$$



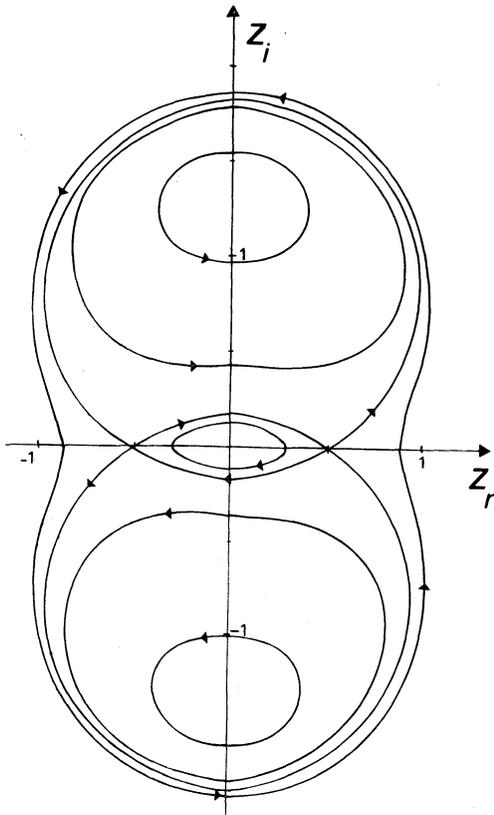


Fig. 3 d.

$$\alpha = -1, \beta = -1, \gamma = 0.69.$$

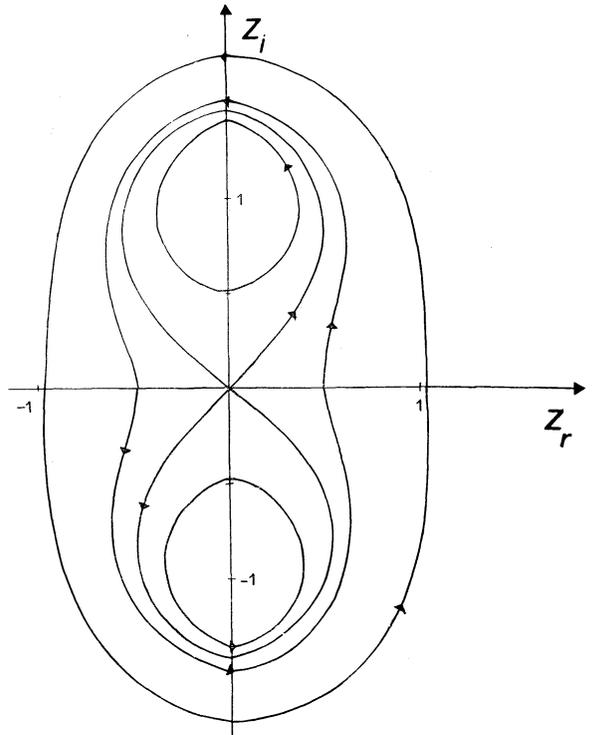


Fig. 3 e.

$$\alpha = -1, \beta = 0, \gamma = -1.$$

Posto α_i negativo la figura 3 a, b, c, d, e mostra le traiettorie nel piano delle fasi corrispondenti a valori di β_i, γ_i rispettivamente appartenenti alle regioni A, B, C, D, E illustrate in figura 2. Nella regione A il solo punto singolare nel piano delle fasi è un centro nell'origine. Quando β_i e γ_i variano in maniera tale da attraversare la linea OX_1 o quella OX_4 si ha una biforcazione e il passaggio della soluzione da quella nulla instabile a due soluzioni di ampiezza finita stabili sempre presenti nelle regioni B ed E. Tali soluzioni giacciono sull'asse reale o su quello immaginario per valori di (γ_i, β_i) rispettivamente appartenenti alle regioni B o E. Nelle regioni C e D oltre alla soluzione nulla stabile sono presenti due soluzioni stabili di ampiezza finita ed altre due soluzioni di ampiezza finita ma instabili. Risultati analoghi si ottengono per valori di α_i positivi con inversione del verso di percorrenza delle traiettorie nel piano delle fasi e considerando regioni ABCDE del piano (γ_i, β_i) simmetriche rispetto all'origine.

In conclusione le caratteristiche delle onde di superficie stazionarie si ottengono dai risultati precedentemente descritti specificando il valore di $l/h', \sigma, f_0', \omega$. Supposto ad esempio che il periodo di oscillazione del conte-

nitore sia tale che risulti

$$(37) \quad \Omega = 4k \operatorname{tgh}(k) (1 + k^2 S)$$

ed assegnati $k = 2\pi$, $S = 10^{-6}$, il punto P rappresentativo del fenomeno nel piano (p, q) giace sulla retta $A_0 A_2$ (vedi figura 4). La soluzione (10) risulta quindi instabile mentre sono stabili onde subarmoniche rispetto al moto del contenitore con ampiezza finita, a il cui valore è riportato in figura 5 in funzione di f_0 (curva $A_0 A_2$).

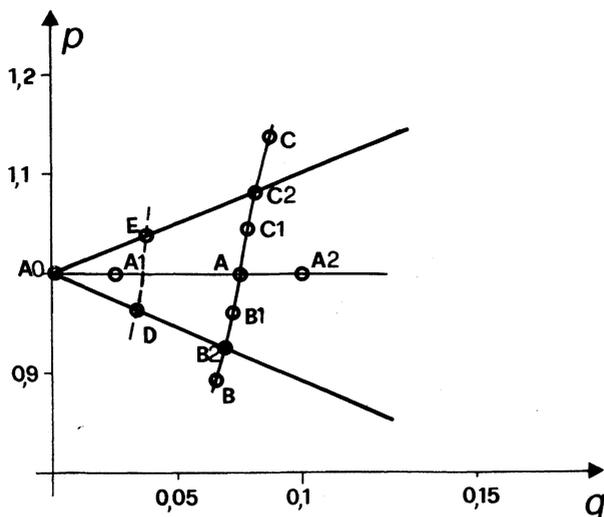


Fig. 4.

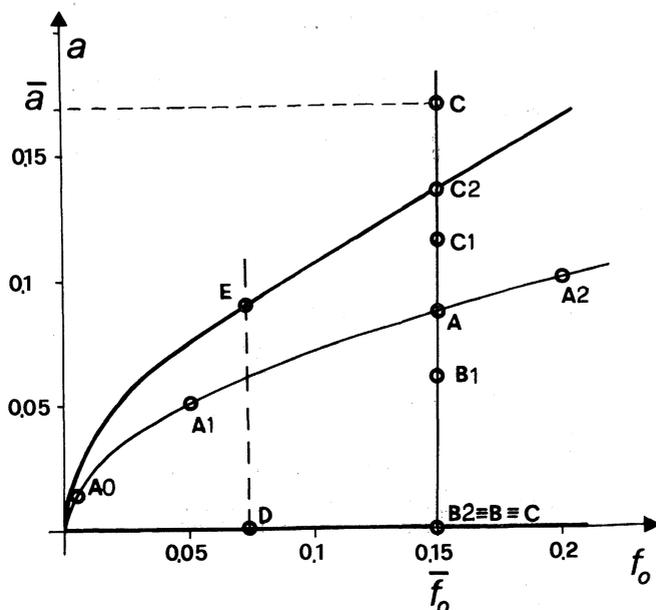


Fig. 5.

Assegnato $f_0 = f_0$, al crescere di Ω il punto P si muove lungo la curva AB e l'ampiezza dell'onda tende a zero, fino a che per $P \equiv B_2$ la soluzione nulla risulta stabile.

Se invece il valore di Ω diminuisce, cioè P si muove lungo la curva AC l'ampiezza dell'onda cresce fino a che per $P \equiv C_2$ anche la soluzione nulla, prima instabile, diventa stabile. Il verificarsi di un'ampiezza $a = \bar{a}$ o $a = 0$ dipende dal valore iniziale dell'ampiezza del disturbo.

Risultati analoghi si ottengono nel caso di onde sincrone rispetto al moto del contenitore.

APPENDICE A

$$(a1) \quad a_2 = \frac{\Omega}{8(1+4kS)} \left[1 + \frac{1}{\operatorname{tgh}^2(h)} \right]$$

$$(a2) \quad b_2 = \frac{k}{2 \operatorname{tgh}(k)} - \frac{\Omega D_1}{D_2}$$

$$(a3) \quad c_2 = \frac{\Omega D_1}{2ik \sinh(2k) D_2}$$

$$(a4) \quad \alpha = i \left\{ \frac{k \operatorname{tgh}(k)}{4} (a_2 + b_2) + \frac{k}{4 \operatorname{tgh}(k)} (a_2 - b_2) + \left[\frac{2}{\operatorname{tgh}(2k)} - \operatorname{tgh}(k) \right] \frac{k \Omega D_1}{2 D_2} + \frac{9 k^5 \operatorname{tgh}(k)}{4 \Omega} S \right\}$$

$$(a5) \quad \beta = -\frac{i p_1}{2}$$

$$(a6) \quad \gamma = \frac{ik \operatorname{tgh}(k)}{\Omega} f_1$$

con

$$(a7) \quad D_1 = \frac{1}{16} \left[3 - \frac{1}{\operatorname{tgh}^2(k)} \right] - \frac{k(1+4k^2 S)}{2 \Omega \operatorname{tgh}(k)}$$

$$(a8) \quad D_2 = \frac{\Omega}{2k \operatorname{tgh}(2k)} - (1+4k^2 S).$$

APPENDICE B

$$(b1) \quad \alpha = i \left\{ \frac{k \operatorname{tgh}(k)}{2} (a_2 + b_2) + \frac{k}{2 \operatorname{tgh}(k)} (a_2 - b_2) + \left[\frac{2}{\operatorname{tgh}(2k)} - \operatorname{tgh}(k) \right] \frac{k \Omega D_1}{2 D_2} + \frac{9 k^5 \operatorname{tgh}(k)}{8 \Omega} S \right\}$$

$$(b2) \quad \beta = -i \left\{ \frac{p_2}{4} + \left[\frac{k \operatorname{tgh}(k)}{\Omega(1+k^2 S)} + \frac{k \operatorname{tgh}(k)}{\Omega(1+k^2 S - (4 \Omega / (k \operatorname{tgh}(k)))} \right] \frac{f_1^2}{4} \right\}$$

$$(b3) \quad \gamma = \frac{i}{4} f_1^2 \frac{k \operatorname{tgh}(k)}{\Omega(1+k^2 S)}$$

con

$$(b4) \quad a_2 = \frac{\Omega}{2(1+4k^2 S)} \left[1 + \frac{1}{\operatorname{tgh}^2(k)} \right]$$

$$(b5) \quad b_2 = \frac{k}{2 \operatorname{tgh}(k)} - \frac{\Omega D_1}{2 D_2}$$

$$(b6) \quad D_1 = \frac{1}{2} \left[3 - \frac{1}{\operatorname{tgh}^2(2k)} \right] - \frac{k(1+4k^2 S)}{\Omega \operatorname{tgh}(k)}$$

$$(b7) \quad D_2 = \frac{2 \Omega}{k \operatorname{tgh}(2k)} - (1 + 4 k^2 S).$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] H. N. ABRAMSON (1966) - NASA SP106.
- [2] F. PFEIFFER (1977) - ESA SP129.
- [3] D. D. KANA e W. CHU (1970) - « J. Spacecraft ».
- [4] G. SCARSI e S. STURA (1974) - « Atti Accademia Ligure Scienze e Lettere », 31.
- [5] P. BLONDEAUX, G. SEMINARA (1980) - B4 XVII Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Palermo.
- [6] A. K. CHOPRA (1968) - ASCE EM6.
- [7] A. K. CHOPRA (1970) - ASCE AM4.
- [8] S. TANI, Y. TANAKA e N. HORI (1977) - Six World Conference on Earthquake Engineering, New Dehli.
- [9] M. FARADAY (1831) - « Phil. Trans. Roy. Soc. London », 121, 319.
- [10] L. MATTHIENSEN (1868) - « Ann. Phys. Lpz. », 134, 167.
- [11] L. MATTHIENSEN (1870) - « Ann. Phys. Ppz », 141, 375.
- [12] LORD RAYLEIGH (1883) - « Phil. Mag. », (5) 15, 235.
- [13] LORD RAYLEIGH (1883) - « Phil. Mag. », (5) 16, 50.
- [14] T. B. BENJAMIN e F. URSELL (1954) - « Proc. Roy. Soc. London », A 225, 505.
- [15] M. I. YARYMOVYCH (1960) - Doctoral Dissertation Columbia University.
- [16] W. G. PENNEY e A. T. PRICE (1952) - « Phil. Trans. Roy. Soc. London », A 224, 254.
- [17] P. HALL e G. SEMINARA (1980) - « J. Fluid Mech. », 101, 423.