Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mario Curzio, Patrizia Longobardi, Mercede Maj

Su di un problema combinatorio in teoria dei gruppi

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **74** (1983), n.3, p. 136–142.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1983_8_74_3_136_0>

Algebra. — *Su di un problema combinatorio in teoria dei gruppi* (*). Nota di Mario Curzio, Patrizia Longobardi e Mercede Maj (**), presentata (***) dal Socio G. Zappa.

Summary. — Let G be a group and n an integer ≥ 2. We say that G has the n-permutation property ($G \in P_n$) if, for any elements $x_1, x_2, \cdots, x_n$ in G, there exists some permutation σ of $\{1, 2, \cdots, n\}$, $\sigma \neq$ id. such that $x_1 x_2 \cdots x_n = x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)}$.

We prouve that every group $G \in P_n$ is an FC-nilpotent group of class $\leq n-1$, and that a finitely generated group has the n-permutation property (for some n) if, and only if, it is abelian by finite. We prouve also that a group $G \in P_3$ if, and only if, its derived subgroup has order at most 2.

Siano S un semigruppo ed n un intero ≥ 2. Dicesi che S ha la proprietà P_n (di n-permutazione) se, per ogni n-pla $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ di suoi elementi, esiste una permutazione $\sigma \neq$ id. di $\{1, 2, \cdots, n\}$ dipendente dalla n-pla e tale che $x_1 x_2 \cdots x_n = x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)}$. Ad esempio, se S ha ordine finito n, si ha $S \in P_{n+1}$ ($S \in P_n$ se S è anche unitario).

In un recente lavoro [3] A. Restivo e C. Reutenauer hanno provato che un semigruppo periodico e finitamente generato è finito se, e solo se, possiede una qualche proprietà di n-permutazione. Nella presente nota si riconosce fra l'altro che è FC-nilpotente di classe $\leq n-1$ ogni gruppo $G \in P_n$ e che un gruppo finitamente generato ha una proprietà di n-permutazione se (e solo se) è abeliano per finito; ne segue facilmente il risultato di Restivo-Reutenauer nel caso gruppale.

Nomenclatura e notazioni sono per lo più usuali, in particolare: S_n è il gruppo simmetrico su $\{1, 2, \cdots, n\}$, G' il derivato di un gruppo G, Z(G) il centro di G, $C_G(x)$ il centralizzante di $x \in G$, FC(G) il sottogruppo $\{x \in G / (G : C_G(x)) < \infty\}$, G un FC-gruppo se (e solo se) FC(G) $=$ $=$ G, π(G) l'insieme (vuoto o non) dei primi p tali che $x^p = 1$ per qualche elemento $x \neq 1$ di G.

N. 1 - Si dimostrerà che è FC-nilpotente ogni gruppo $G \in P_n$. Si ha in primo luogo:

1.1. *Per un gruppo* $G \in P_n$ $(n > 2)$, *si ha* $G/FC(G) \in P_{n-1}$.

Dimostrazione. Negando la tesi, esista una $(n-1)$-pla $(x_1 F, x_2 F, \cdots, x_{n-1} F)$ di elementi di G/FC(G) tali che da $x_1 x_2 \cdots x_{n-1} F = x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n-1)} F$ e da $\sigma \in S_{n-1}$ segua $\sigma =$ id.

(*) Lavoro parzialmente eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A del C.N.R.

(**) Indirizzo degli Autori: Istituto Matematico dell'Università, via Mezzocannone 8, 80134 Napoli.

(***) Nella seduta del 12 marzo 1983.

Detto T_n l'insieme delle $\sigma \in S_n$ tali che $\sigma(n) \neq n$, l'ipotesi fatta comporta $G = \bigcup_{\sigma \in T_n} A_\sigma$ dove $A_\sigma = \{a \in G / x_1 x_2 \cdots x_n = x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)}, a = x_n\}$.

Sia $\sigma \in T_n$ e $\sigma(i) = n$; fissato $a_\sigma \in A$ e detto b l'elemento variabile in A_σ, risulta

$$x_1 x_2 \cdots x_{n-1} b = x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(i-1)} b x_{\sigma(i+1)} \cdots x_{\sigma(n)}$$

$$x_1 x_2 \cdots x_{n-1} a_\sigma = x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(i-1)} a_\sigma x_{\sigma(i+1)} \cdots x_{\sigma(n)}$$

e, posto $c_\sigma = x_{\sigma(i-1)}^{-1} \cdots x_{\sigma(1)}^{-1} x_1 x_2 \cdots x_{n-1}$ e $d_\sigma = x_{\sigma(i+1)} \cdots x_{\sigma(n)}$, si ha $c_\sigma b = b d_\sigma$ e $c_\sigma a_\sigma = a_\sigma d_\sigma$, da cui $b a_\sigma^{-1} \in C_G(c_\sigma)$ e $A_\sigma \subseteq C_G(c_\sigma) a_\sigma$, ne segue $G = \bigcup_{\sigma \in T_n} A_\sigma = \bigcup_{\sigma \in T_n} C_G(c_\sigma) a_\sigma$. Esiste allora un sottoinsieme non vuoto (1) $R_n \subseteq T_n$ tale che $G = \bigcup_{\sigma \in R_n} C_G(c_\sigma) a_\sigma$ e che $(G : C_G(c_\sigma)) < \infty$ per ogni $\sigma \in R_n$.

Scelto $b = x_{n-1}$, per un opportuno $\sigma_n \in R_n$ e con le notazioni di cui sopra, si ha $c_\sigma x_{n-1} = x_{n-1} d_\sigma$. Il sottogruppo $C_G(c_\sigma)$ ha indice finito e pertanto appartiene ad F l'elemento $d_\sigma = x_{n-1}^{-1} c_\sigma x_{n-1}$, se ne trae

$$x_1 x_2 \cdots x_{n-1} F = x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(i-1)} F = x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(i-1)} d_\sigma F =$$
$$= x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(i-1)} x_{\sigma(i+1)} \cdots x_{\sigma(n)} F$$

e, posto

$$\sigma'(1) = \sigma(1), \sigma'(2) = \sigma(2), \cdots, \sigma'(i-1) = \sigma(i-1), \sigma'(i) =$$
$$= \sigma(i+1), \cdots, \sigma'(n-1) = \sigma(n),$$

si ha $\sigma' \in S_{n-1}$ ed inoltre

$$x_1 x_2 \cdots x_{n-1} F = x_{\sigma'(1)} x_{\sigma'(2)} \cdots x_{\sigma'(n-1)} F,$$

si ha pertanto $\sigma' = \mathrm{id}$. Da $i \leq n-2$ segue

$$x_i x_{i+1} \cdots x_{n-1} = x_{n-1} x_i x_{i+1} \cdots x_{n-2}$$

da $i = n-1$ discende $c_\sigma = x_{n-1}$ (ossia $x_{n-1} F = F$), in entrambi i casi si è ottenuto un assurdo. $\triangle$

(1) Sia G un gruppo unione insiemistica di laterali $H_i g_i$ di suoi sottogruppi ($i \in I$) in numero finito. Nella decomposizione $G = \bigcup_{i \in I} H_i g_i$ è inessenziale ogni $H_i g_i$ con H_i di indice infinito (cfr. [2]).

TEOREMA 1.2. *Un gruppo* $G \in P_n$ *è FC-nilpotente di classe* $\leq n-1$.

Dimostrazione. Ovvia per $n = 2$. Per induzione su n, giacchè (cfr. 1.1) $G/FC(G)$ ha la $(n-1)$-proprietà di permutazione. △

COROLLARIO 1.3 (Restivo–Reutenauer [3]). *Un gruppo* $G \in P_n$, *periodico e finitamente generato, è finito.*

Dimostrazione. L'asserto è ovvio per $n = 2$. Se $n > 2$, $G/FC(G)$ ha la proprietà di $(n-1)$-permutazione e per induzione risulta finito, allora $FC(G)$ è finito quale FC-gruppo periodico e finitamente generato. △

Ogni gruppo semplice non abeliano $G \in P_n$ possiede (cfr. Teorema 1.2) un sottogruppo di indice finito > 1, ne segue che un gruppo semplice $G \in P_n$ è di necessità finito.

N. 2 – Si proverà che i gruppi finitamente generati $G \in \cup P_n$ sono tutti e soli i gruppi dotati di un sottogruppo (normale) abeliano d'indice finito. All'uopo, si premettono le proposizioni seguenti:

2.1. *Siano* x *ed* y *elementi di un gruppo* G *permutabili con* $z = [y, x]$. *Per ogni* $n \geq 2$ *e per ogni* $\alpha_i \geq 1$, *si ha*

$$x^{\alpha_1} y x^{\alpha_2} y \cdots x^{\alpha_n} y = x^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n} y^n z^{\alpha_2+2\alpha_3+\cdots+(n-1)\alpha_n} .$$

Dimostrazione. L'asserto è ovvio per $n = 2$, giacchè

$$x^{\alpha_1} y x^{\alpha_2} y = x^{\alpha_1+\alpha_2} y [y, x^{\alpha_2}] y = x^{\alpha_1+\alpha_2} y^2 z^{\alpha_2} .$$

Supposto induttivamente

$$(x^{\alpha_1} y)(x^{\alpha_2} y) \cdots (x^{\alpha_n} y) = x^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n} y^n z^{\alpha_2+2\alpha_3+\cdots+(n-1)\alpha_n} ,$$

si ha

$$\begin{aligned}
&(x^{\alpha_1} y) \cdots (x^{\alpha_n} y)(x^{\alpha_{n+1}} y) = \\
&= x^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n} y^n x^{\alpha_{n+1}} y z^{\alpha_2+2\alpha_3+\cdots+(n-1)\alpha_n} = \\
&= x^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n+\alpha_{n+1}} y^{n+1} [y^n, x^{\alpha_{n+1}}] z^{\alpha_2+2\alpha_3+\cdots+(n-1)\alpha_n} = \\
&= x^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n+1}} y^{n+1} z^{\alpha_2+\cdots+(n-1)\alpha_n+n\alpha_{n+1}} . \quad \triangle
\end{aligned}$$

2.2. *Sia* $G \in P_n$ *un gruppo localmente nilpotente. Allora*:

(1) *non esiste alcun commutatore aperiodico* $\neq 1$,

(2) *non esiste alcun commutatore d'ordine divisibile per un primo* $p > 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1)n$.

Dimostrazione. Sia G un controesempio. Per una nota proprietà delle serie centrali (2), è sufficiente supporre G nilpotente di classe 2 e quindi $G' \leqq Z(G)$.

Siano x, y elementi di G tali che $z = [y, x] \neq 1$. Esiste una permutazione non identica $\sigma : i \to \alpha_i$ di $1, 2, \cdots, n$ per cui

$$(xy)(x^2 y) \cdots (x^n y) = (x^{\alpha_1} y)(x^{\alpha_2} y) \cdots (x^{\alpha_n} y).$$

Dalla 2.1 segue

$$x^{1+2+\cdots+n} y^n z^{2+2\cdot 3+\cdots+(n-1)n} = x^{1+2\cdots+n} y^n z^{\alpha_2+2\alpha_3+\cdots+(n-1)\alpha_n}$$

e quindi $z^r = z^s$ dove

$$r = 2 + 2\cdot 3 + \cdots + (n-1)\,n \quad \text{e} \quad s = \alpha_2 + 2\,\alpha_3 + \cdots + (n-1)\,\alpha_n.$$

Riesce $r = (2 + 3 + \cdots + n) + (3 + 4 + \cdots + n) + \cdots + ((n-1) + n) + n$ ed $s = (\alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n) + (\alpha_3 + \alpha_4 + \cdots + \alpha_n) + \cdots + (\alpha_{n-1} + \alpha_n) + \alpha_n$, inoltre

$$\alpha_2 + \cdots + \alpha_n \leq 2 + 3 + \cdots + n\,,\ \alpha_3 + \cdots + \alpha_n \leq 3 + 4 + \cdots + n, \cdots, \alpha_n \leq n.$$

Se ne deduce $s \leq r$ e non può aversi $r = s$, altrimenti risulterebbe $\sigma = \mathrm{id}$.

L'elemento z non è aperiodico, avendosi $r \neq s$. Se l'ordine di z è divisibile per un primo $p > 2 + 2\cdot 3 + \cdots + (n-1)\,n$, si ha $p > r - s \equiv 0\,(p)$ e si ha l'assurdo $r = s$. △

2.3. *Un gruppo* $G \in P_n$, *localmente nilpotente e aperiodico, è abeliano* (3).

Dimostrazione. Segue da 2.2. △

2.4. *Un gruppo* $G \in P_n$, *nilpotente e finitamente generato, è abeliano per finito.*

Dimostrazione. L'asserto è ovvio se G è aperiodico (cfr. 2.3) o se è di torsione. Sia G misto e si dica T il suo massimo sottogruppo periodico. G/T è abeliano (cfr. 2.3) e quindi $G' \leqq T$, inoltre T è finitamente generato e perciò finito, ne segue la finitezza di $G/C_G(G')$. Se x ed y sono elementi di $C_G(G')$, posto $|G'| = n$, riesce $1 = [x, y]^n = [x^n, y]$ e pertanto $x^n \in Z(C_G(G'))$. Ne deriva che $C_G(G')/Z(C_G(G'))$ è periodico e finitamente generato, onde G è abeliano per finito. △

(2) Sia G un gruppo a centro privo di elementi di un dato ordine primo p. Per ogni ordinale α, anche $Z_{\alpha+1}(G)/Z_\alpha(G)$ non ha elementi di periodo p (cfr. [4]).

(3) Esistono gruppi aperiodici $G \in \bigcup_n P_n$ non abeliani, ad esempio

$$G = \langle x, y \,/\, y^{-1} xy = x^{-1} \rangle$$

con x ed y aperiodici (il gruppo G dell'esempio è anche supersolubile).

2.5. *Sia* R *una congruenza di un semigruppo* G, *dotato di un idempotente centrale e. Se il semigruppo* $[e]_R$ *è commutativo e se* G/R *è finito e cancellativo a sinistra, si ha* $G \in P_n$ *dove* $n = 1 + 2 \mid G/R \mid$.

Dimostrazione (4). Siano $x_1, x_2, \cdots, x_n$ elementi di G e si considerino i prodotti

$$[x_1]_R\,, [x_1]_R\,[x_2]_R\,, \cdots, [x_1]_R\,[x_2]_R \cdots [x_n]_R\,.$$

Per l'essere $n = 1 + 2 \mid G/R \mid$, esistono i, j, k tali che $1 \leq i < j < k \leq n$ e che

$$[x_1] \cdots [x_i] = [x_1] \cdots [x_i]\,[x_{i+1}] \cdots [x_j] =$$
$$= [x_1] \cdots [x_j]\,[x_{j+1}] \cdots [x_k]$$

ne segue

$$[x_1] \cdots [x_i]\,[e] = [x_1] \cdots [x_i]\,[x_{i+1}] \cdots [x_j]\,[e] =$$
$$= [x_1] \cdots [x_j]\,[x_{j+1}] \cdots [x_k]\,[e]$$

e pertanto $[x_{i+1}\,x_{i+2} \cdots x_j] = [e] = [x_{j+1}\,x_{j+2} \cdots x_k]$, allora gli elementi $a = x_{i+1}\,x_{i+2} \cdots x_j$ e $b = x_{j+1}\,x_{j+2} \cdots x_k$ sono permutabili. Se ne deduce $x_1\,x_2 \cdots x_n = x_1 \cdots x_i\,bax_{k+1} \cdots x_n$ e $G \in P_n$. $\triangle$

TEOREMA 2.6. *Un gruppo finitamente generato* G *ha una n–proprietà di permutazione se, e solo se, è abeliano per finito.*

Dimostrazione. Sia $G \in P_n$ e quindi (Teorema 1.2) FC–nilpotente, onde esiste (5) un sottogruppo nilpotente $N \lhd G$ di indice finito. N è finitamente generato e allora (cfr. 2.4) è abeliano per finito, sicchè tale è pure G.

Il viceversa segue dalla 2.5. $\triangle$

COROLLARIO 2.7. *Un gruppo* G, *supersolubile e aperiodico ha una n–proprietà di permutazione se (e solo se) è abeliano per 2–gruppo.*

Dimostrazione. Sia $G \in P_n$ e non abeliano onde $\mid G/A \mid < \infty$ per qualche sottogruppo abeliano $A \lhd G$. Esiste un $N/A \lhd G/A$ d'ordine $p = \max.\, \pi\,(G/A)$ e, se $p > 2$, N è abeliano libero (6) (al pari di A) e per induzione sul numero dei fattori primi di $\mid G/A \mid$ si prova l'esistenza di un sottogruppo $H \lhd G$ abeliano e di indice potenza di 2. $\triangle$

N. 3 – Sia $G \in P_n$ un p–gruppo ipercentrale e non abeliano, deve essere (cfr. 2.2) $p < 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1)\,n$ e, d'altra parte, fissato un $n > 2$,

(4) La dimostrazione si ispira ad un procedimento introdotto in [3].

(5) Un gruppo FC–ipercentrale e finitamente generato è nilpotente per finito (cfr. [4], p. 133).

(6) Sia G un gruppo supersolubile dotato di un sottogruppo abeliano aperiodico $A \lhd G$. Se G/A ha ordine primo > 2, G è abeliano (la prova è standard).

per qualche primo $p < 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1)\, n$, possono non esistere p-gruppi non abeliani $\mathrm{G} \in \mathrm{P}_n$ (tale sarà il caso, come si mostrerà tra breve, di $n = 3$ e $p = 3, 5, 7$). Allo scopo di ottenere una caratterizzazione dei gruppi $\mathrm{G} \in \mathrm{P}_3$, si premettono le proposizioni seguenti:

3.1. *Sia* G *un gruppo tale che* $x^2 \in \mathrm{Z}(\mathrm{G})$ *per ogni* $x \in \mathrm{G}$. *Allora* G' *è centrale e* $[x, y]^2 = 1$ $(\forall x, y \in \mathrm{G})$.

3.2. *Per un gruppo* G *sono equivalenti le proposizioni*:

(1) $|\mathrm{G}'| \leq 2$,

(2) $(\mathrm{G} : \mathrm{C_G}(x)) = 2$ *per ogni* $x \in \mathrm{G} - \mathrm{Z}(\mathrm{G})$.

Dimostrazione (7). (1) $\Rightarrow$ (2). Il numero dei coniugati $y^{-1}xy$ di x uguaglia il numero dei commutatori $[x, y]$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Sia valida (2). Da $[x, y] \neq 1$ segue che $\mathrm{C_G}(y)$ ha indice 2 in $\mathrm{G} = \langle \mathrm{C_G}(y), x \rangle$ e che $x^2 \in \mathrm{C_G}(y)$, allora $x^2 \in \mathrm{Z}(\mathrm{G})$ $(\forall x \in \mathrm{G})$ e (cfr. 3.1) G' è centrale e di esponente 2.

Siano $[x_1, y_1] \neq 1$ e $[x_2, y_2] \neq 1$ dei commutatori e si consideri un elemento $t \notin \mathrm{C_G}(x_i)$ $(i = 1, 2)$. $\mathrm{C_G}(x_i)$ ha indice 2 e, avendosi $y_i \notin \mathrm{C_G}(x_i)$, riesce $ty_i \in \mathrm{C_G}(x_i)$ ed $1 = [x_i, ty_i] = [x_i, t][x_i, y_i]$ (ossia $[x_i, t] = [x_i, y_i]$). $\mathrm{C_G}(t)$ ha indice 2 e da $x_i \notin \mathrm{C_G}(t)$ discende $1 = [x_1 x_2, t] = [x_1, t][x_2, t] = [x_1, y_1][x_2, y_2]$ e $[x_1, y_1] = [x_2, y_2]$ come volevasi. $\triangle$

3.3. *Sia* G *un gruppo appartenente a* P_3. *Allora* $x^2 \in \mathrm{Z}(\mathrm{G})$ $(\forall x \in \mathrm{G})$.

Dimostrazione. Da ciascuna delle uguaglianze $xyx^2 = x^2yx$, $xyx^2 = yxx^2$, $xyx^2 = yx^2x$ segue $xy = yx$, mentre si ha $x^2y = yx^2$ se $xyx^2 = xx^2y$ oppure se $xyx^2 = x^2xy$. $\triangle$

3.4. *Un gruppo* G, *tale che* $|\mathrm{G}'| = 2$, *ha la proprietà di* 3-*permutazione*.

Dimostrazione. Sia $xyt \neq yxt$ e quindi $[y, x] \neq 1$. Dall'abelianità di G/G' discende $xyt = (txy)\, a$ $(a \in \mathrm{G}')$ e perciò da $a = 1$ segue $xyt = txy$, inoltre $a \neq 1$ comporta $a = [y, x]$ ed $xyt = txy[y, x] = tyx$. $\triangle$

3.5. *Un gruppo non abeliano* $\mathrm{G} \in \mathrm{P}_3$ *ha il derivato di ordine* 2.

Dimostrazione. Sia G un controesempio. A causa di 3.2 esiste un $\mathrm{C_G}(y) \neq \mathrm{G}$ e di indice $\neq 2$; considerato un $x \notin \mathrm{C_G}(y)$, la 3.3 implica $x^2 \in \mathrm{C_G}(y)$ ed inoltre per la 3.1 si ha $\mathrm{C_G}(y) \lhd \mathrm{G}$. Ne segue che $\mathrm{C_G}(y)$ ha indice 2 in $\langle \mathrm{C_G}(y), x \rangle$ e che pertanto $\langle \mathrm{C_G}(y), x \rangle \neq \mathrm{G}$.

(7) Per un 2-gruppo finito, la 3.2 trovasi già in [1] e con dimostrazione analoga.

Si distinguono i casi seguenti:

(α) esistono un $C_G(a) \neq G$ di indice $\neq 2$ ed un $b \notin C_G(a)$ tali che $C_G(b) \not\leq \langle C_G(a), b\rangle$.

Sia $x = b$, $y = a$ e si consideri un elemento $t \in C_G(x)$ non appartenente a $\langle C_G(y), x\rangle$, ovviamente $[xy, t] \neq 1 \neq [xt, y]$. Per ipotesi vale una delle uguaglianze

$$\text{(i)}\quad xyt = yxt \qquad \text{(ii)}\quad xyt = xty \qquad \text{(iii)}\quad xyt = txy$$

$$\text{(iv)}\quad xyt = ytx \qquad \text{(v)}\quad xyt = tyx\,.$$

Le (i), (ii) e (iii) sono impossibili per quanto sopra osservato. Da (iv) e da $xt = tx$ discende $xyt = ytx = yxt$ contro l'essere $xy \neq yx$. Da (v) e da $xt = tx$ segue (per la 3.3) $x^2 yt = xtyx$, $ytx^2 = xtyx$, $yxt = xty$ mentre era $xt \notin C_G(y)$.

(β) per ogni $C_G(a) \neq G$ e di indice $\neq 2$, si ha $C_G(b) < \langle C_G(a), b\rangle$ ogni qualvolta $b \notin C_G(a)$.

Sia ancora $x = b$, $y = a$ e $t \notin \langle C_G(y), x\rangle$. Riesce $[xy, t] \neq 1$ altrimenti a causa di (β) si avrebbe $xy \in C_G(t) < \langle C_G(y), t\rangle$ ed $x \in \langle G_G(y), t\rangle$ da cui l'assurdo $\langle C_G(y), x, t\rangle = \langle C_G(y), t\rangle$.

La terna x, y, t verifica una delle uguaglianze da (i) a (v); le prime tre impossibili per le considerazioni precedenti, da (iv) segue l'assurdo $yt \in C_G(x) < \langle C_G(y), x\rangle$.

Sia valida (v). Si ha $xt(xyt) = xt(tyx) = xyxt^2$ e $[xy, xt] = 1$, riesce $xt \notin C_G(x)$ ed inoltre $(G : C_G(x)) \neq 2$ in quanto $C_G(x) < \langle C_G(y), x\rangle$; allora la ($\beta$) fornisce $xy \in C_G(xt) < \langle C_G(x), xt\rangle = \langle C_G(x), t\rangle$ ed $y \in \langle C_G(x), t\rangle$. Ne segue $y = ct^m$ ($c \in C_G(x)$, m intero) e le 3.1 e 3.3 comportano $[x, y] = [x, ct^m] = [x, t]^m$; per l'essere $[x, y] \neq 1$ si ottiene $[x, y] = [x, t]$ e si ha l'assurdo $y^{-1} t \in C_G(x) < \langle C_G(y), x\rangle$. $\triangle$

TEOREMA 3.6. *Un gruppo* G *possiede la proprietà di 3-permutazione se, e solo se, si ha* $|G'| \leq 2$.

Dimostrazione. Segue da 3.4 e da 3.5. $\triangle$

BIBLIOGRAFIA

[1] KNOCHE H. G. (1951) – *Über den Frobeniusschen Klassenbegriff in nilpotenten Gruppen*, « Math. Z. », *55*, pp. 71–83.

[2] NEUMANN B. H. (1954) – *Groups covered by finitely many cosets*, « Publ. Math. Debrecen », *3*, pp. 227–242.

[3] RESTIVO A. e REUTENAUER C. – *On the Burnside problem for semigroups*, (in corso di pubblicazione su " Journal of Algebra ").

[4] ROBINSON D. J. S. (1972) – *Finiteness conditions and generalized soluble groups*, Springer Verlag.