Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Caterina Cassisa

## Sulla dimensione dello spazio delle autosoluzioni nei problemi elastici di tensioni piane

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **73** (1982), n.5, p. 97–108.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1982_8_73_5_97_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1982.

**Analisi matematica.** — *Sulla dimensione dello spazio delle autosoluzioni nei problemi elastici di tensioni piane.* Nota di CATERINA CASSISA, presentata (*) dal Socio G. FICHERA.

SUMMARY. — This Note completes the research started in a previous Memoir of the author (see Bibliografia [2]), concerning analytical problems connected with plane stresses in Elasticity. The dimension of the spaces of eigensolutions of the relevant problems is computed.

Sia $\Sigma$ una curva di classe $C^{1+h}$, frontiera di un aperto $\Omega$ limitato e semplicemente connesso del piano $x, y$. Siano $p, q$ funzioni reali definite su $\Sigma$, appartenenti a $C^h(\Sigma)$ e tali che su tutto $\Sigma$ riesca

$$[p(x,y)]^2 + [q(x,y)]^2 > 0\,, \qquad (x,y) \in \Sigma\,. \tag{1}$$

Indichiamo con A l'insieme di tutte le tensioni piane che sono autosoluzioni del problema

$$(\sigma_{11}\nu_1 + \sigma_{12}\nu_2)\,p + (\sigma_{12}\nu_1 + \sigma_{22}\nu_2)\,q + g = 0\,, \tag{2}$$

ove $(\nu_1, \nu_2)$ è il versore normale interno a $\Sigma$, $g$ è una assegnata funzione di $C^h(\Sigma)$. In altri termini A è costituito dalle terne ordinate di funzioni $(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22})$ date da (1)

$$\sigma_{11} = by + c - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\quad,\qquad \sigma_{12} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}\quad,\qquad \sigma_{22} = ax + c + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,,$$

ove $\varphi$ è una funzione armonica di $C^1(\overline{\Omega})$ che verifica la condizione al contorno

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} \equiv p\,\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} - q\,\frac{\partial\varphi}{\partial s} = axq\nu_2 + byp\nu_1 + c\,(p\nu_1 + q\nu_2)\,; \tag{3}$$

$a, b, c$ sono costanti reali arbitrarie.

All'insieme A possiamo ovviamente dare una struttura di spazio vettoriale reale, definendo, come è naturale, la somma di due suoi elementi $\sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22})$ e $\sigma' = (\sigma'_{11}, \sigma'_{12}, \sigma'_{22})$ nel modo seguente: $\sigma + \sigma' = (\sigma_{11} + \sigma'_{11}, \sigma_{12} + \sigma'_{12}, \sigma_{22} + \sigma'_{22})$ e il prodotto di $\sigma$ per lo scalare $t$: $t\sigma = (t\sigma_{11}, t\sigma_{12}, t\sigma_{22})$.

Si consideri *il problema consistente nel determinare la dimensione dello spazio vettoriale* A.

Introduciamo l'indice $\varkappa$ del problema di derivata obliqua

$$\Delta_2\,\varphi = 0 \qquad \text{in} \quad \Omega\,, \tag{4}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} \equiv p\,\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} - q\,\frac{\partial\varphi}{\partial s} = f \qquad \text{su} \quad \Sigma\,, \tag{5}$$

(*) Nella seduta del 25 novembre 1982.

(1) Cfr. [1], [2].

ponendo

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}\left[\log\frac{p-iq}{p+iq}\right]_0^l, \tag{6}$$

ove $l$ esprime la lunghezza di $\Sigma$. Sarebbe necessario precisare la definizione dell'intero $\varkappa$, per la polidromia del logaritmo, ma rimandiamo in proposito alla Memoria [3].

Nel caso in cui riesca $\varkappa \leq 0$, il problema su posto è stato già completamente risolto in [2].

Se invece riesce $\varkappa > 0$, è utile, per quel che segue, ricordare (si veda [3]) che il problema (4)–(5) ammette soluzioni qualunque sia $f$ in $C^h(\Sigma)$, che la costante è ovviamente un'autosoluzione del problema e che, se è $\varkappa > 1$, esistono altre $\varkappa - 1$ autosoluzioni linearmente indipendenti e l'insieme delle autosoluzioni ha dimensione $\varkappa$.

Sussiste il seguente teorema:

I. *Se è* $\varkappa > 0$, *lo spazio* A *di tutte le tensioni piane, che sono autosoluzioni del problema* (2), *ha dimensione* $\varkappa + 2$ (2).

*Sia* $\varkappa > 1$. Esistono allora $\varkappa - 1$ funzioni armoniche di $C^1(\overline{\Omega})$ $\varphi_1, \cdots, \varphi_{\varkappa-1}$, linearmente indipendenti, tali che

$$\frac{\partial\varphi_h}{\partial l} \equiv 0 \qquad \text{su } \Sigma, \qquad (h = 1, \cdots, \varkappa - 1), \tag{7}$$

$$\operatorname{grad}\varphi_h \not\equiv 0 \qquad \text{in } \overline{\Omega}, \qquad (h = 1, \cdots, \varkappa - 1). \tag{8}$$

Siano $\varphi_\varkappa, \varphi_{\varkappa+1}, \varphi_{\varkappa+2}$ tre funzioni armoniche di $C^1(\overline{\Omega})$ verificanti rispettivamente le condizioni al contorno

$$\frac{\partial\varphi_\varkappa}{\partial l} = xq\nu_2 \quad , \quad \frac{\partial\varphi_{\varkappa+1}}{\partial l} = yp\nu_1 \quad , \quad \frac{\partial\varphi_{\varkappa+2}}{\partial l} = p\nu_1 + q\nu_2 . \tag{9}$$

Si considerino allora gli elementi $\sigma^{(h)}$ $(h = 1, \cdots, \varkappa - 1)$ di A, dati da

$$\sigma_{11}^{(h)} = -\frac{\partial\varphi_h}{\partial x} \quad , \quad \sigma_{12}^{(h)} = -\frac{\partial\varphi_h}{\partial y} \quad , \quad \sigma_{22}^{(h)} = \frac{\partial\varphi_h}{\partial x} \qquad (h = 1, \cdots, \varkappa - 1).$$

Siano poi $\sigma^{(\varkappa)}, \sigma^{(\varkappa+1)}, \sigma^{(\varkappa+2)}$ gli elementi di A così definiti:

$$\sigma_{11}^{(\varkappa)} = -\frac{\partial\varphi_\varkappa}{\partial x} \quad , \quad \sigma_{12}^{(\varkappa)} = -\frac{\partial\varphi_\varkappa}{\partial y} \quad , \quad \sigma_{22}^{(\varkappa)} = x + \frac{\partial\varphi_\varkappa}{\partial x} ,$$

$$\sigma_{11}^{(\varkappa+1)} = y - \frac{\partial\varphi_{\varkappa+1}}{\partial x} \quad , \quad \sigma_{12}^{(\varkappa+1)} = -\frac{\partial\varphi_{\varkappa+1}}{\partial y} \quad , \quad \sigma_{22}^{(\varkappa+1)} = \frac{\partial\varphi_{\varkappa+1}}{\partial x} ,$$

$$\sigma_{11}^{(\varkappa+2)} = 1 - \frac{\partial\varphi_{\varkappa+2}}{\partial x} \quad , \quad \sigma_{12}^{(\varkappa+2)} = -\frac{\partial\varphi_{\varkappa+2}}{\partial y} \quad , \quad \sigma_{22}^{(\varkappa+2)} = 1 + \frac{\partial\varphi_{\varkappa+2}}{\partial x} .$$

(2) In [2] era stato dimostrato che: $3 \leq \dim A \leq \varkappa + 2$.

È evidente che ogni elemento $\sigma$ di A si ottiene come combinazione lineare di $\sigma^{(1)}, \cdots, \sigma^{(\varkappa+2)}$.

Si tratta quindi solo di far vedere che i detti vettori $\sigma^{(1)}, \cdots, \sigma^{(\varkappa+2)}$ sono elementi linearmente indipendenti di A.

A tal fine si considerino $\varkappa+2$ costanti reali $c_1, \cdots, c_{\varkappa+2}$, tali che risulti:

$$\sum_{k=1}^{\varkappa+2} c_k \sigma_{11}^{(k)} = -\sum_{k=1}^{\varkappa+2} c_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + c_{\varkappa+1} y + c_{\varkappa+2} \equiv 0, \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{\varkappa+2} c_k \sigma_{12}^{(k)} = -\sum_{k=1}^{\varkappa+2} c_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \equiv 0, \tag{11}$$

$$\sum_{k=1}^{\varkappa+2} c_k \sigma_{22}^{(k)} = \sum_{k=1}^{\varkappa+2} c_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + c_\varkappa x + c_{\varkappa+2} \equiv 0; \tag{12}$$

la funzione $\varphi = \sum_{k=1}^{\varkappa+2} c_k \varphi_k$ è, per la (11), funzione della sola $x$, cioè $\varphi(x,y) \equiv \varphi(x)$. Allora dalla (10) segue $-\varphi'(x) + c_{\varkappa+1} y + c_{\varkappa+2} \equiv 0$, che implica

$$c_{\varkappa+1} = 0 \quad , \quad \varphi'(x) \equiv c_{\varkappa+2}. \tag{13}$$

Sostituendo inoltre la (13) nella (12), si ottiene $c_{\varkappa+2} + c_\varkappa x + c_{\varkappa+2} \equiv 0$, dalla quale segue $c_\varkappa = c_{\varkappa+2} = 0$. Si ha pertanto $\varphi = \sum_{h=1}^{\varkappa-1} c_h \varphi_h$, con $\varphi(x) \equiv$ cost. Poichè le $\varphi_h$ $(h = 1, \cdots, \varkappa-1)$ sono linearmente indipendenti e sussiste la (8), si ha $c_h = 0$ $(h = 1, \cdots, \varkappa-1)$. La dimensione di A è quindi $\varkappa+2$.

È ovvio, come nel caso $\varkappa = 1$, vada modificata la dimostrazione.

Si consideri ora il *problema*, di per se stesso interessante, *che consiste nel determinare la dimensione della varietà* V *così definita*: $V = \{af_1 + bf_2 + cf_3\}$ al variare di $a, b, c$ in $\mathbf{R}$, dove

$$f_1 = xq\nu_2 \quad , \quad f_2 = yp\nu_1 \quad , \quad f_3 = p\nu_1 + q\nu_2 \text{ (3)}. \tag{14}$$

(3) Si osservi che questo problema, *se è* $\varkappa > 0$, è collegato alla determinazione della dipendenza o indipendenza lineare delle funzioni $\varphi_1, \cdots, \varphi_{\varkappa+2}$ introdotte nella dimostrazione del Teorema I.

Se $\varphi_1, \cdots, \varphi_{\varkappa+2}$ fossero linearmente dipendenti, esisterebbero $\varkappa+2$ costanti non tutte nulle tali che

$$\sum_{k=1}^{\varkappa+2} c_k \varphi_k \equiv 0. \tag{*}$$

Applicando alla (*) l'operatore $\partial/\partial l$ introdotto in (3), si ottiene, per le (7):

$$c_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial l} + c_{\varkappa+1} \frac{\partial \varphi_{\varkappa+1}}{\partial l} + c_{\varkappa+2} \frac{\partial \varphi_{\varkappa+2}}{\partial l} \equiv 0$$

che implica, per la (9) $c_\varkappa xq\nu_2 + c_{\varkappa+1} yp\nu_1 + c_{\varkappa+2}(p\nu_1 + q\nu_2) \equiv 0$.

Sussiste il seguente teorema, valido qualunque sia $\varkappa$ (maggiore, minore o uguale a zero).

II. *Fissate* $\Sigma$ , $p$ , $q$, *la dimensione della varietà* V *generata dalle tre funzioni* $f_1, f_2, f_3$ *è almeno* 2.

Supponiamo che la dimensione di V sia, al più, 1. Esistono allora due terne di numeri $(a, b, c)$, $(a', b', c')$ tali che

$$af_1 + bf_2 + cf_3 \equiv 0 \quad , \quad a'f_1 + b'f_2 + c'f_3 \equiv 0 \tag{15}$$

con $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0$, ove si è posto

$$\alpha = ab' - a'b \quad , \quad \beta = cb' - c'b \quad , \quad \gamma = ac' - a'c \text{ [4]} . \tag{16}$$

Scritto il sistema (15) nel modo seguente

$$q\nu_2(ax + c) + p\nu_1(by + c) \equiv 0 \quad , \quad q\nu_2(a'x + c') + p\nu_1(b'y + c') \equiv 0 ,$$

dalla (1) si trae

$$\begin{vmatrix} \nu_2(ax + c) & \nu_1(by + c) \\ \nu_2(a'x + c') & \nu_1(b'y + c') \end{vmatrix} \equiv 0 ,$$

ovvero, per le (16) $\nu_1\nu_2(\alpha xy + \beta y + \gamma x) \equiv 0$. Quindi sulla curva regolare $\Sigma$ di $C^{1+h}$, rappresentata parametricamente dalle equazioni $x = x(s), y = y(s)$, $s \in [0, l]$ si ha identicamente

$$\frac{dy}{ds}\frac{dx}{ds}[\alpha x(s)\,y(s) + \beta y(s) + \gamma x(s)] \equiv 0 \qquad s \in S , \tag{17}$$

ove abbiamo scritto, per brevità, S in luogo di $[0, l]$.

Poniamo ora $H(s) = \alpha x(s)\,y(s) + \beta y(s) + \gamma x(s)$ ed indichiamo con $H_0$ l'insieme dei punti di S tali che $H(s) = 0$; indichiamo poi con $X_0$ e $Y_0$, rispettivamente, gli insiemi di S ove è $dx/ds = 0$ o $dy/ds = 0$. Per la (17) si ha $H_0 \cup X_0 \cup Y_0 = S$.

È evidente che sia $X_0$, sia $Y_0$ non sono vuoti; anche l'insieme $H_0$ non è vuoto, perchè altrimenti sarebbe $X_0 \cup Y_0$ coincidente con S e ciò è in contraddizione con le ipotesi fatte sulla curva chiusa $\Sigma$, che non può avere tangente (normale) sempre parallela agli assi coordinati. È altresì evidente che $X_0$, $Y_0$ e $H_0$ sono insiemi chiusi. Osserviamo inoltre che $H_0$ è dotato di punti interni. Infatti, se così non fosse, l'insieme $K = S - H_0$, contenuto in $X_0 \cup Y_0$, sarebbe denso in S; si avrebbe quindi $S = \overline{K} \subset X_0 \cup Y_0$. Ciò è assurdo.

(4) Perché la dimensione di V sia 1, è evidente che per ogni altra terna $(a'', b'', c'')$, indipendente dalle precedenti, deve aversi $a''f_1 + b''f_2 + c''f_3 \not\equiv 0$.

*Supponiamo* $\beta\gamma \neq 0$.

Se è $\alpha = 0$, la curva $\Sigma$, in corrispondenza degli intervalli di $H_0$, giace su una retta non parallela agli assi coordinati; se è invece $\alpha \neq 0$, l'immagine su $\Sigma$ degli intervalli di $H_0$ è su una iperbole, i cui asintoti sono rette parallele agli assi coordinati (5).

Sia $[s_1, s_2]$ un intervallo massimale di $H_0$; con ciò intendiamo che ogni intervallo I, contenente propriamente $[s_1, s_2]$, ha intersezione non vuota con K. Certamente $[s_1, s_2]$ non coincide con S, in quanto, essendo $\Sigma$ una curva chiusa, esistono punti di S non appartenenti ad $H_0$.

Ci limitiamo a considerare il caso in cui sia $s_2 \neq l$ e in cui riesca, ad esempio, $x'(s_2) \neq 0$. Sarà allora, in tutto un intorno di $s_2$, $x'(s) \neq 0$. Essendo $s_2$ un punto di frontiera di $H_0$ e conseguentemente di accumulazione di punti dell'insieme K, si avrà $s_2 \in \mathscr{D}Y_0 \subset Y_0$. Ma $s_2$ appartiene ad $H_0$ e quindi nel punto di $\Sigma$, corrispondente ad $s_2$, la tangente non può essere parallela ad uno degli assi coordinati. Siamo pervenuti ad un assurdo.

Analogamente si può procedere nel caso in cui riesca $y'(s_2) \neq 0$, in luogo di $x'(s_2) \neq 0$. Che se poi $s_2$ coincide con $l$, si potrà agevolmente operare, con il medesimo ragionamento, su $s_1$.

*Supponiamo* $\beta\gamma = 0$.

È facile vedere allora che in corrispondenza degli intervalli di $H_0$ la curva giace sugli assi coordinati o su rette parallele agli assi.

Sia $[s_1, s_2]$ un intervallo massimale di $H_0$. Essendo $\Sigma$ una curva chiusa di $C^{1+h}$, $[s_1, s_2]$ non coincide con S.

Si supponga, per esempio, che in corrispondenza di $[s_1, s_2]$, $\Sigma$ sia su una retta $r$ parallela all'asse delle $x$ e ancora che sia $s_2 \neq l$; si avrà $y'(s_2) = 0$. Quindi per la continuità di $x'$ esiste tutto un intervallo di S : $[s_2, s_3]$ in cui è $x'(s) \neq 0$. Ne segue che $[s_2, s_3]$ è contenuto in $H_0 \cup Y_0$. Si può inoltre supporre $s_3$ tale che l'immagine su $\Sigma$ degli eventuali punti di $H_0 \cap (s_2, s_3]$ sia in $r$; in altri termini, se $s$ appartiene ad $H_0 \cap (s_2, s_3]$, risulta $y(s) = y(s_2)$.

Essendo $s_2$ un punto di frontiera di $H_0$, esiste un punto $s_4 \in (s_2, s_3)$ tale che $H(s_4) \neq 0$; si ha pertanto $y(s_4) \neq y(s_2)$.

Sia $s_0$ il massimo dell'insieme dei punti di $H_0 \cap [s_2, s_4]$; in $s_0$ riesce $y(s_0) = y(s_2)$.

Applicando il teorema di Lagrange, nell'intervallo $[s_0, s_4]$, alla funzione $y(s)$ si ottiene

$$y(s_4) - y(s_0) = y'(s^*)(s_4 - s_0), \tag{18}$$

ove $s^*$ è un punto di $(s_0, s_4)$.

Dalle considerazioni precedenti e dalla (18) si trae che $y'(s^*)$ è diverso da zero.

(5) Si ha, infatti: $y = \frac{\gamma}{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha x + \beta} - 1\right)$.

In conclusione $s^*$ non può appartenere né ad $X_0$, né ad $Y_0$, né, per la definizione di $s_0$, ad $H_0$. Ciò è assurdo.

La dimostrazione potrebbe essere ripetuta, senza modificazioni, negli altri casi non esaminati. Si ha dunque: $\dim V \geq 2$.

Seguono ora alcuni esempi i quali dimostreranno che la dimensione di V può essere sia 2 che 3, con indice $\varkappa$ positivo, negativo o nullo.

È sorprendente il fatto che mentre, per $\varkappa > 0$, la dimensione di A, $(\varkappa + 2)$, dipende solo da $\varkappa$, non così accade per quella di V.

Esempio 1. *Esistono curve* $\Sigma$ *di classe* $C^\infty$ *e funzioni* $p, q$ *di* $C^\infty(\Sigma)$, *tali che l'indice* $\varkappa$ *del problema* (4)-(5) *sia positivo e tali inoltre che, in corrispondenza ad esse, risulti* $\dim V = 2$.

Sia $\Sigma$ la curva del piano $x, y$ così definita: $x^2 + y^2 - xy - 3 = 0$ e siano $p$ e $q$ le funzioni date, su $\Sigma$, da

$$p = \left(\frac{3}{4}x + 1\right)\nu_2 \quad , \quad q = (3y - 1)\nu_1 . \tag{19}$$

La curva $\Sigma$ è una ellisse che incontra gli assi cartesiani nei punti di coordinate $(\pm\sqrt{3}, 0), (0, \pm\sqrt{3})$. Inoltre riesce $\nu_2 = 0$ nei punti $P_1 = (2, 1)$ e $P_5 = (-2, -1)$; riesce invece $\nu_1 = 0$ nei punti $P_2 = (1, 2)$ e $P_7 = (-1, -2)$ (fig. 1).

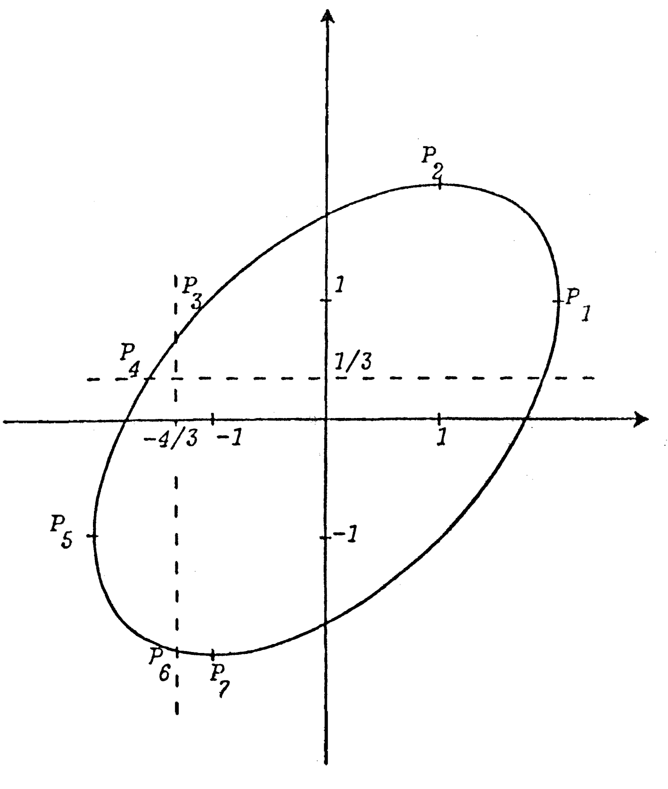


Fig. 1.

Osserviamo intanto che le funzioni $p$ e $q$ verificano la (1). Si ha infatti

$$\left(\frac{3}{4}x+1\right)^2 \nu_2^2 + (3y-1)^2 \nu_1^2 > 0 \qquad (x, y) \in \Sigma ,$$

sia per quanto osservato precedentemente, sia perchè il punto $P = (-4/3, 1/3)$ non appartiene a $\Sigma$ ($P$ è interno ad $\Omega$).

L'indice $\varkappa$ del problema (4)-(5), definito dalla (6), è fornito dalla seguente espressione:

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}\left[\log\frac{p-iq}{p+iq}\right]_0^L = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{Arg}(p-iq)\right]_0^L , \tag{20}$$

ove con L si è indicata la lunghezza della curva $\Sigma$. Per il calcolo di $\varkappa$ procediamo esaminando i punti in cui $p - iq$ è reale o immaginario puro; si tratta di studiare il seguente argomento:

$$\operatorname{Arg}\left\{\left(\frac{3}{4}x+1\right)\nu_2 + i(-3y+1)\nu_1\right\} .$$

Si considerino le rette di equazioni, rispettivamente, $x = -4/3$ e $y = 1/3$. Esse intersecano $\Sigma$ in 4 punti che indicheremo con $P_3, P_6, P_4, P_8$ (vedi fig. 1).

È ben facile riconoscere che per il calcolo di $\varkappa$ basta studiare $p - iq$ negli 8 punti introdotti.

Fissiamo in $P_1$ una determinazione dell'argomento di $p - iq$, per esempio la determinazione principale, e, procedendo su $\Sigma$ in verso antiorario, facciamo variare l'argomento di $p - iq$ in modo continuo. Se si tiene conto del segno di $\nu_1, \nu_2$ e di $\frac{3}{4}x + 1, -3y + 1$ negli 8 punti considerati, si vede che risulta:

$$\operatorname{Arg} P_1 = \pi/2 \;,\quad \operatorname{Arg} P_2 = \pi \;,\quad \operatorname{Arg} P_3 = 3\pi/2 \;,\quad \operatorname{Arg} P_4 = 2\pi ,$$

$$\operatorname{Arg} P_5 = \operatorname{Arg} P_6 = 5\pi/2 \;,\quad \operatorname{Arg} P_7 = \operatorname{Arg} P_8 = 2\pi \;,\quad \operatorname{Arg} P_1 = 5\pi/2 .$$

Si può pertanto concludere che $\varkappa = 2$.

Dalla (14) e dalla (19) segue che, presi $(a, b, c) = (3/4, -3, 1)$, si ha

$$\frac{3}{4}f_1 - 3f_2 + f_3 =$$

$$= \left[\frac{3}{4}x(3y-1) - 3y\left(\frac{3}{4}x+1\right) + \frac{3}{4}x + 1 + 3y - 1\right]\nu_1\nu_2 \equiv 0 ,$$

come volevasi dimostrare.

Esempio 2. *Esistono curve* $\Sigma$ *di classe* $C^\infty$ *e funzioni* $p, q$ *di* $C^\infty(\Sigma)$, *tali che l'indice del problema* (4)-(5) *sia positivo e tali inoltre che, in corrispondenza ad esse, risulti* $\dim V = 3$.

Come $\Sigma$ assumiamo la circonferenza di centro l'origine degli assi e di raggio unitario; poniamo ancora

$$p = -y \quad , \quad q = -x \,. \tag{21}$$

L'indice del problema (4)–(5) è pertanto dato, per la (20) e la (21), da

$$\varkappa = \frac{1}{\pi} [\operatorname{Arg}(-y + ix)]_0^{2\pi} = 2 \,.$$

Supponiamo che esistano tre costanti $a, b, c$, tali che sia su $\Sigma$: $af_1 + bf_2 + cf_3 \equiv 0$, cioè $axq\nu_2 + byp\nu_1 + c(p\nu_1 + q\nu_2) = ax^2 y + by^2 x + cxy \equiv 0$; ne segue $a = b = c = 0$. Risulta quindi $\dim V = 3$.

Per completare la risposta al problema di determinare le possibili dimensioni della varietà V, ci limitiamo a fornire la seguente tabella, ove sono raccolti alcuni esempi.

| $\Sigma$ | $p$ | $q$ | $\varkappa$ | dim V |
|---|---|---|---|---|
| $x^2 + y^2 - xy - 3 = 0$ | $\left(\frac{3}{4} x + 1\right) \nu_2$ | $(3y - 1)\nu_1$ | 2 | 2 |
| $x^2 + y^2 = 1$ | $-y$ | $-x$ | 2 | 3 |
| $x^2 + y^2 = 1$ | 1 | 0 | 0 | 2 |
| $x^2 + y^2 = 1$ | $y^2$ | $-x$ | 0 | 3 |
| $x^2 + y^2 = 1$ | $y$ | $-x$ | $-2$ | 2 |
| $x^2 + y^2 = 1$ | $y^3$ | $-x$ | $-2$ | 3 |

Per ricostruire la dimostrazione degli ultimi quattro esempi, è sufficiente ripercorrere le considerazioni svolte negli Esempi 1 e 2. Inoltre si assuma rispettivamente $(a, b, c) = (1, 0, 0)$ e $(a, b, c) = (0, 0, 1)$ nel terzo e nel quinto esempio.

## BIBLIOGRAFIA

[1] A. GHIZZETTI (1949) – *Sugli stati di tensione piana in un corpo elastico.* « An. Mat. pura e appl. » (IV), *29*, 125–130.

[2] C. CASSISA (1982) – *Sui problemi analitici originati dalla ricerca degli stati di tensione piana in un cilindro elastico,* « Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Memorie, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. » (VIII), *17*, 1, 1–27.

[3] G. FICHERA (1958) – *Una introduzione alla teoria delle equazioni integrali singolari.* « Rend. Mat. » (V), *17*, 82–191.

**Analisi matematica.** — *Condizioni per la regolarità della soluzione di un problema di Dirichlet per un'equazione iperbolica del secondo ordine.* Nota di BRUNO FIRMANI, presentata (*) dal Socio G. FICHERA.

SUMMARY. — Necessary and sufficient conditions are given for the existens of a regular solution of the Dirichlet problem for a hyperbolic equation in a particular domain of the plane.

1. Siano $\Gamma_1 : y = \alpha(x)\ (0 \leq x \leq 1)$ e $\Gamma_2 : x = \beta(y)\ (0 \leq y \leq \sigma)$ due curve del piano cartesiano tali che: $\alpha \in C^1[0,1]$, $\beta \in C^1[0,\sigma]$, $\alpha(0) = \beta(0) = 0$, $\alpha(1) = \sigma$, $\beta(\sigma) = 1$, $\alpha'(x) > 0\ (0 \leq x \leq 1)$, $\beta'(y) > 0\ \ (0 \leq y \leq \sigma)$,

$$\alpha'(0)\,\beta'(0) < 1 \quad , \quad \alpha'(1)\,\beta'(\sigma) > 1 \,. \tag{1}$$

Inoltre, posto $\tau(x) = \beta[\alpha(x)]\ (0 \leq x \leq 1)$, risulti

$$\tau(x) < x \qquad\qquad (0 < x < 1). \tag{2}$$

Indicato con R il rettangolo $[0,1] \times [0,\sigma]$ e con R′ il rettangolo $[0,1) \times [0,\sigma)$ denotiamo con $\mathscr{U}$ (con $\mathscr{U}'$) la classe delle funzioni definite in R (in R′) continue con le loro derivate prime e con la derivata seconda mista. Se $f(x,y,u)$ è una funzione della classe $C^0(R \times (-\infty, +\infty))$ tali che

$$|f(x,y,u)| \leq H + K\,|u| \qquad (x,y) \in R, \qquad u \ \text{reale} \tag{3}$$

con H e K costanti positive, assunte comunque due funzioni $\varphi_1$ e $\varphi_2$ appartenenti, rispettivamente alle classi $C^1[0,1]$ e $C^1[0,\sigma]$ e tali che

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) \quad , \quad \varphi_1(1) = \varphi_2(\sigma)\,, \tag{4}$$

possiamo considerare il seguente problema di Dirichlet:

$$u_{xy}(x,y) = f(x,y,u(x,y)) \qquad\qquad (x,y) \in R' \tag{5}$$

$$u(x,\alpha(x)) = \varphi_1(x)\ \ (0 \leq x < 1) \quad , \quad u(\beta(y),y) = \varphi_2(y)\ \ (0 \leq y < \sigma). \tag{6}$$

È noto (1) che tale problema, per le ipotesi assunte su $f$, ammette almeno una soluzione in $\mathscr{U}'$ e tutte le soluzioni dello stesso problema sono limitate. Sussiste, inoltre, un teorema di unicità se la funzione $f$ risulta lipschitziana nella variabile $u$ uniformemente rispetto alle altre due variabili in ogni insieme chiuso contenuto

(*) Nella seduta del 25 novembre 1982.

(1) Cfr. [4], Teorema VI. Per la limitatezza della soluzione cfr. Teorema IX. L'unicità della soluzione è dimostrata nel Teorema VIII.

in R. Nel presente lavoro verranno determinate condizioni necessarie e sufficienti affinchè una soluzione del problema (5) (6) appartenga alla classe $\mathcal{U}$ e risulti, di conseguenza, soluzione dello stesso problema in R. Verranno così estesi taluni dei risultati contenuti in [1] e [2] nei quali è stato considerato il caso $f(x, y, u) \equiv 0$. Nel paragrafo 2 di questa Nota verrà esaminata la stessa problematica quando risulta

$$\alpha'(0)\,\beta'(0) = 1 \quad , \quad \alpha'(1)\,\beta'(\sigma) = 1 . \tag{7}$$

In [4] è stato dimostrato che ogni soluzione del problema (5) (6) è anche soluzione della seguente equazione:

$$u(x, y) = \varphi_2(y) + \sum_{0}^{\infty}{}_h \{\varphi[\tau^h(x)] - \varphi[\tau^h\{\beta(y)\}]\} + \tag{8}$$

$$+ \int_{\beta(y)}^{x} d\xi \int_{0}^{y} u(\xi, \eta)\, d\eta + \sum_{0}^{\infty}{}_h \{\Psi[u, \tau^h(x)] - \Psi[u, \tau^h\{\beta(y)\}]\} \qquad (x, y) \in R'$$

avendo posto $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2[\alpha(x)]$ $(0 \leq x \leq 1)$ e

$$\Psi[u_0, x] = \int_{x}^{\tau(x)} d\xi \int_{0}^{\alpha(x)} f(\xi, \eta, u_0(\xi, \eta))\, d\eta \qquad (0 \leq x < 1) \qquad u_0 \in C^0(R') .$$

Sia $u$ una soluzione della equazione (8) e consideriamo la serie

$$v(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_h \{\Psi[u, \tau^h(x)] + \varphi[\tau^h(x)]\} . \tag{9}$$

Tale funzione appartiene alla classe $C^1[0, 1)$ ed è limitata. Cerchiamo ora di determinare le condizioni sotto le quali tale funzione è della classe $C^1[0, 1]$. Dalla teoria svolta in [2] si ha che la funzione $v$ è soluzione del seguente problema

$$v(x) - v[\tau(x)] = \Psi[u, x] + \varphi(x) \quad , \quad v(0) = 0 \qquad (0 \leq x < 1). \tag{10}$$

Prolunghiamo ora la funzione $\Psi[u, x]$ ponendo $\Psi[u, 1] = 0$. È subito visto che questa funzione è della classe $C^1[0, 1) \cap C^0[0, 1]$ e la sua derivata prima è limitata. Posto $\mu(x) = \tau^{-1}(x) = \alpha^{-1}[\beta^{-1}(x)]$ consideriamo il problema:

$$w(x) - w[\mu(x)] = \Psi[u, \mu(x)] + \varphi[\mu(x)] \quad , \quad w(1) = 0 \qquad (0 < x \leq 1). \tag{11}$$

È facile osservare che esso ammette una ed una sola soluzione data dalla serie

$$w(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_h \{\Psi[u, \mu^{h+1}(x)] + \varphi[\mu^{h+1}(x)]\} . \tag{12}$$

Poniamo ora $\vartheta(x) = v(x) + w(x)$, si ha $\vartheta(x) - \vartheta[\mu(x)] = 0$ $(0 < x < 1)$.

Inoltre la funzione $v(x)$ appartiene alla classe $C^1[0,1]$ se e solo se la funzione $\vartheta(x)$ è di $C^1(0,1]$. Dalla teoria svolta in [2] si ha che $\vartheta(x)$ può essere regolare nel punto 1 se e solo se essa è costante. Pertanto si può formulare, tenuto conto delle (9) e (12) e ponendo $\tau^{-n}(x) = \mu^n(x)$, il seguente risultato:

*la funzione* $v(x)$ *data dalla* (9) *appartiene alla classe* $C^1[0,1]$ *se e solo se risulta* $\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_h \{\Psi[u, \tau^h(x)] + \varphi[\tau^h(x)]\} =$ *costante.*

Poichè l'appartenenza di $v$ a $C^1[0,1]$ equivale all'appartenza di $u$, soluzione della (8), ad $\mathcal{U}$ abbiamo fornito una condizione necessaria e sufficiente affinché una soluzione $u$ del problema (5) (6) sia della classe $\mathcal{U}$.

Prima di concludere il paragrafo vogliamo costruire esplicitamente la soluzione del problema (5) (6) in un caso particolare. Supponiamo, quindi, che esista una costante $b$ per la quale risulti:

$$(13) \qquad |f(x,y,u') - f(x,y,u'')| \leq b\,|u' - u''| \qquad (x,y) \in R,\ u', u'' \text{ reali.}$$

Sia $B^0(R')$ l'insieme delle funzioni continue e limitate in $R'$. Per ogni funzione $u_0$ di $B^0(R')$ indichiamo con $\mathcal{T}$ il seguente operatore di $B^0(R')$ in sé (2):

$$\mathcal{T}u_0(x,y) = \int_{\beta(y)}^{x} d\xi \int_0^y u_0(\xi,\eta)\,d\eta + \sum_0^{\infty}{}_h \{\psi[u_0, \tau^h(x)] - \psi[u_0, \tau^h\{\beta(y)\}]\},$$

con $\psi[u_0, x] = \int_x^{\tau(x)} d\xi \int_0^{\alpha(x)} u_0(\xi,\eta)\,d\eta$ mentre con $\mathcal{S}$ indichiamo la seguente trasformazione di $B^0(R')$ in sé: $\mathcal{S}u_0(x,y) = f(x,y,u_0(x,y))$. Posto

$$\varphi_0(x,y) = \varphi_2(y) + \sum_0^{\infty}{}_h \{\varphi[\tau^h(x)] - \varphi[\tau^h\{\beta(y)\}]\}$$

si ha che la soluzione $u$ del problema (5) (6) è soluzione della equazione $u = \varphi_0 + \mathcal{T}\mathcal{S}u$, $u \in B^0(R')$. Introdotta in $B^0(R')$ la norma uniforme, dalle ipotesi assunte segue che $\mathcal{T}$ ha raggio spettrale nullo, cioè $\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{T}^n\|^{1/n} = 0$, mentre, posto $a = \sup|f(x,y,0)|$ si ha $|\mathcal{S}u_0(x,y)| \leq a + b\,|u_0(x,y)|$, $u_0 \in B^0(R')$. Poniamo $u_0(x,y) \equiv 0$, $u_n = \varphi_0 + \mathcal{T}\mathcal{S}u_{n-1}$, $n = 1, 2, \cdots$. Ne segue $\|u_n - u_{n-1}\| = \|\mathcal{T}\mathcal{S}u_{n-1} - \mathcal{T}\mathcal{S}u_{n-2}\| \leq \|\mathcal{T}(\mathcal{S}u_{n-1} - \mathcal{S}u_{n-2})\| \leq$ $\leq \|\mathcal{T}(b\,|u_{n-1}(x,y) - u_{n-2}(x,y)|)\| \leq \|\mathcal{T}^n(b^n\,|u_1(x,y) - u_0(x,y)|)\| \leq$ $\leq b^n \|\mathcal{T}^n\|\,\|u_1\|$. Dalla convergenza della serie $\sum_0^{\infty}{}_n b^n \|\mathcal{T}^n\|$ segue la convergenza della successione $\{u_n\}$ in $B^0(R')$. Il limite di quest'ultima sarà la soluzione del problema (5) (6).

(2) Per le dimostrazioni di quanto asserito nel seguito cfr. [4].

2. Supponiamo ora che le funzioni $\alpha$ e $\beta$ verifichino le condizioni di regolarità elencate all'inizio del paragrafo precedente e le (7) invece delle (1). La funzione $\tau(x)$ verificherà, quindi, le condizioni (2) e risulterà $\tau'(0) = \tau'(1) = 1$. Supponiamo, inoltre, che la funzione $f$ soddisfi la relazione (3). Assumeremo, infine, che esistano due numeri positivi $p$ e $q$ tali che

$$\lim_{x \to 0}{}' \{1 - \tau'(x)\} x^{-p} = l > 0 \quad , \quad \lim_{x \to 1}{}' \{\tau'(x) - 1\} (1 - x)^{-q} = \lambda > 0 \tag{14}$$

e che le funzioni $\varphi_1$ e $\varphi_2$ verifichino, invece della (4), le condizioni seguenti:

$$\varphi'(x) = o(x^{p+r}) \quad , \quad \varphi'(x) = o(1 - x)^{q+s} \tag{15}$$

con $r$ ed $s$ numeri positivi. Anche in questo caso esiste almeno una soluzione $u$ del problema (5) (6) in R′ che verifica la relazione (8). Risulterà, pertanto, nuovamente convergente la serie (9) e determineremo ora condizioni che garantiscano l'appartenenza di questa serie alla classe $\mathscr{C}^1[0, 1]$. Consideriamo, quindi, il problema (11). Per la teoria svolta in [3] quest'ultimo ammetterà soluzione nella classe $\mathscr{C}^1(0, 1]$ se e solo se apparterrà alla stessa classe la serie (12) che è quanto veniamo ora a dimostrare. La serie $\sum_0^\infty{}_h \varphi[\mu^h(x)]$ è una funzione di $\mathscr{C}^1(0, 1]$. Questa appartenenza può essere dimostrata utilizzando le (14) e (15) e seguendo un procedimento analogo a quello seguito nel caso della dimostrazione del teorema 3 di [3]. Per quanto concerne la convergenza uniforme della serie $\sum_0^\infty{}_h \Psi[u, \mu^h(x)]$ si può consultare il teorema X di [4]. Possiamo quindi dare per acquisita la desiderata regolarità della (12). È possibile allora procedere come nel paragrafo precedente e giungere alla stessa caratterizzazione. Si noti, infine, che se la funzione $f$, verifica la (13) la soluzione $u$ può essere esplicitamente calcolata come limite di una successione.

È evidente come può essere affrontata la caratterizzazione in questione quando le funzioni $\alpha$ e $\beta$ verificano la prima delle (1) e la seconda delle (7) o, viceversa, la seconda delle (1) e la prima delle (7).

## Bibliografia


[1] G. Fichera (1970–71) – *Su un problema di Dirichlet per l'equazione* $u_{xy} = 0$. «Atti Accad. Sc. Torino», *105*, 355–366.

[2] G. Fichera (1971) – *Studio delle singolarità della soluzione di un problema di Dirichlet per l'equazione* $u_{xy} = 0$. «Rend. Accad. Naz. Lincei», (VIII) *50*, 6–17.

[3] B. Firmani (1982) – *Sui casi singolari del problema di Goursat*. «Rend. Mat.», (VII) *2*, 237–256.

[4] B. Firmani – *Sul problema di Dirichlet per un'equazione del secondo ordine di tipo iperbolico*, in corso di stampa sugli «Annali di Matematica».