
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

CRISTIANA BONDIOLI

**Un teorema di Paley-Wiener per funzioni
ultradifferenziabili su uno spazio simmetrico**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 73 (1982), n.5, p. 89–96.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1982_8_73_5_89_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi matematica. — *Un teorema di Paley-Wiener per funzioni ultradifferenziabili su uno spazio simmetrico* (*). Nota di CRISTIANA BONDIOLI (**), presentata (***) dal Corrisp. E. MAGENES.

SUMMARY. — We prove a Paley-Wiener theorem for ultradifferentiable functions of class M_p on a symmetric space of the non compact type and arbitrary rank.

INTRODUZIONE

Molti importanti risultati sulle funzioni ultradifferenziabili e sulle ultradistribuzioni di classe M_p in $\mathbf{R}^n$ sono stati ottenuti con la tecnica della trasformata di Fourier, nella quale la funzione associata alla successione (M_p) gioca un ruolo essenziale. In particolare, diversi autori (cfr. Roumieu [15] e Komatsu [10]) hanno caratterizzato, tramite teoremi di tipo Paley-Wiener, le trasformate di Fourier delle funzioni ultradifferenziabili.

In questa nota, ci si propone di dare un teorema analogo per funzioni ultradifferenziabili definite non più in $\mathbf{R}^n$, ma su uno spazio simmetrico di tipo non compatto e rango qualsiasi. Ciò appare interessante, anche in relazione ai problemi ai limiti per le equazioni a derivate parziali (cfr., ad esempio, Lions-Magenes [12]).

All'enunciato e alla dimostrazione del risultato citato sono premessi, nei numeri 1 e 2, alcuni richiami sulle nozioni che verranno utilizzate.

Desidero ringraziare E. Magenes, M. Cowling, J. Faraut per l'incoraggiamento e l'aiuto ricevuto.

1. — Richiamiamo brevemente alcune nozioni sugli spazi simmetrici e rinviamo, ad esempio, a Helgason [8], pp. 4-6, per riferimenti più dettagliati.

Siano G un gruppo di Lie semisemplice, connesso, non compatto e di centro finito, $K \subset G$ un sottogruppo compatto massimale, $X = G/K$ il corrispondente spazio simmetrico, che risulta di tipo non compatto.

Indicate con $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{k}$ le algebre di Lie di G e K rispettivamente, si ha $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$, essendo $\mathfrak{p}$ il complemento ortogonale di $\mathfrak{k}$ rispetto alla forma di Killing $\langle \cdot, \cdot \rangle$, definita su $\mathfrak{g}$.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.).

(**) Istituto di Matematica - Università di Pavia.

(***) Nella seduta del 25 novembre 1982.

Si fissi in $\mathfrak{p}$ un sottospazio abeliano massimale $\mathfrak{a}$; la dimensione di $\mathfrak{a}$ dipende solo dalla coppia (G, K) e viene detta rango dello spazio simmetrico X . Si denotino poi con $\mathfrak{a}^*$ il duale di $\mathfrak{a}$, con $\mathfrak{a}_C^*$ e $\mathfrak{a}_C$ le rispettive complessificazioni. Essendo la forma di Killing definita positiva su $\mathfrak{a}$, vi è un isomorfismo naturale tra $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{a}^*$. Ne segue che esiste una forma bilineare su $\mathfrak{a}_C^*$, denotata ancora con $\langle \cdot, \cdot \rangle$, indotta dalla forma di Killing su $\mathfrak{a}$. Precisamente, per ogni λ in $\mathfrak{a}_C^*$, sia H_λ appartenente ad $\mathfrak{a}_C$ individuato da $\langle H_\lambda, H \rangle = \lambda(H)$, per ogni H di $\mathfrak{a}$. Si ponga allora $\langle \lambda, \mu \rangle = \langle H_\lambda, H_\mu \rangle$, $\forall \lambda, \mu \in \mathfrak{a}_C^*$. In particolare, se $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, sia $|\lambda| = \langle \lambda, \lambda \rangle^{\frac{1}{2}}$.

Sia Σ l'insieme delle radici ristrette in $\mathfrak{a}^*$ e Σ^+ il sottoinsieme delle radici positive, rispetto ad un conveniente ordinamento su Σ . Per $\alpha \in \Sigma$, siano

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = \alpha(H)X \quad \forall H \in \mathfrak{a}\}$$

ed m_α la dimensione di $\mathfrak{g}_\alpha$. Si pone allora $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha \alpha$ e $n = \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\alpha$.

Si ottengono così le decomposizioni di Iwasawa $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ e $G = KAN$, con $A = \exp \mathfrak{a}$ e $N = \exp \mathfrak{n}$; più precisamente, ogni elemento g di G si scrive in modo unico come $g = k(g) \exp H(g) n(g)$, con $k(g) \in K$, $H(g) \in \mathfrak{a}$, $n(g) \in N$.

Si denotano poi con M e M' il centralizzatore e il normalizzatore di A in K e con $W = M'/M$ il gruppo di Weyl (che risulta sempre finito). W agisce come gruppo di trasformazioni lineari su $\mathfrak{a}$ e dunque su $\mathfrak{a}_C^*$ secondo la definizione: $s\lambda(H) = \lambda(s^{-1} \cdot H)$ (per $s \in W$, $\lambda \in \mathfrak{a}_C^*$, $H \in \mathfrak{a}$).

Infine lo spazio quoziente $B = K/M = G/MAN$ viene detto frontiera di X .

2. - Quanto qui brevemente riassunto si trova in Mandelbrojt [13], p. 17, e in Roumieu [14], p. 65.

Sia (M_p) , $p = 0, 1, 2, \dots$, una successione di numeri reali positivi soddisfacente alle seguenti ipotesi:

$$(2.1) \quad M_p^2 \leq M_{p-1} M_{p+1} \quad \forall p \geq 1;$$

$$(2.2) \quad \sum_{p=1}^{\infty} \frac{M_{p-1}}{M_p} < +\infty;$$

$$(2.3) \quad \text{esiste una costante } H \text{ tale che } M_{p+1} \leq H^p M_p \quad \forall p.$$

Non è restrittivo supporre $M_0 = 1$ ed (M_p) monotona non decrescente.

Ad esempio, una successione in queste condizioni è la successione $(p!)^s$, con $s > 1$.

Si definisce funzione associata alla successione (M_p) la funzione definita su $(0, +\infty)$ da

$$M(u) = \sup_p \log \frac{u^p}{M_p}.$$

La funzione $M(u)$ gode delle seguenti proprietà:

$$(2.4) \quad M(u) \text{ è non decrescente e nulla per } 0 < u \leq M_1;$$

$$(2.5) \quad \forall k \text{ intero positivo } \lim_{u \rightarrow +\infty} u^k e^{-M(u)} = 0;$$

$$(2.6) \quad M_p = \sup_u \frac{u^p}{e^{M(u)}}.$$

Diversi autori (cfr. Komatsu [10], Lions-Magenes [12], Roumieu [14], [15] e le relative bibliografie) hanno studiato in $\mathbf{R}^n$ spazi di funzioni costruiti a partire da successioni. Più precisamente, data una successione (M_p) , si dice che una funzione f di $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ è ultradifferenziabile di classe M_p se, per ogni compatto $\mathcal{K} \subset \mathbf{R}^n$, esistono delle costanti c ed L tali che

$$\sup_{\substack{x \in \mathcal{K} \\ |\alpha|=p}} |D^\alpha f(x)| \leq c L^p M_p.$$

In particolare, se $M_p = (p!)^s$, le suddette funzioni vengono dette funzioni di Gevrey di classe s .

In Komatsu [10], p. 49 e p. 81, e in Roumieu [15], p. 155 e p. 158, vengono caratterizzate le trasformate di Fourier delle funzioni ultradifferenziabili di classe M_p a supporto compatto, tramite la funzione associata M .

Intendiamo dimostrare un teorema analogo per funzioni ultradifferenziabili definite su uno spazio simmetrico X di tipo non compatto e rango qualsiasi. A tale scopo, occorre anzitutto introdurre la nozione di funzione ultradifferenziabile di dominio X . In analogia a quanto esposto in Lions-Magenes [12], cap. 9, sez. 7.2 per i vettori di classe M_p , procediamo nel seguente modo.

Siano $X = G/K$ uno spazio simmetrico di tipo non compatto e Δ l'operatore di Laplace-Beltrami di X . Definiamo:

$$\mathcal{D}_{M_p}(X) = \{f \in C^\infty(X) \mid \text{supp } f \text{ è compatto ed}$$

$$\exists c > 0, \exists L > 0 \quad \text{per cui } \sup_{x \in X} |\Delta^p f(x)| \leq c L^{2p} M_{2p} \forall p\}.$$

Si noti che la non banalità di $\mathcal{D}_{M_p}(X)$ è assicurata dalla condizione (2.2).

3. - Siano dx e db due misure invarianti su X e B (indotte dalle misure dg, dk, dm definite su G, K, M e opportunamente normalizzate) e sia d la metrica di X (definita in modo canonico dalla forma di Killing).

Si consideri l'applicazione $A: X \times B \rightarrow \mathfrak{a}$ definita da $A(x, b) = A(gK, kM) = -H(g^{-1}k)$. Se f è una funzione su X , la sua trasformata di Fourier $\tilde{f}$ è definita da

$$\tilde{f}(\lambda, b) = \int_X f(x) e^{(-i\lambda + \rho)(A(x, b))} dx$$

per tutte le coppie $(\lambda, b) \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times B$ per le quali l'integrale suddetto ha valore assoluto finito (cfr., ad esempio, Helgason [9], p. 458).

Sia $V(x^0, R)$ la sfera chiusa in X , di centro $x^0 = K$ e raggio $R > 0$.

Si ha allora il seguente Teorema di tipo Paley-Wiener (cfr. Helgason [9], p. 474):

TEOREMA. Una funzione ψ definita su $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times B$ è la trasformata di Fourier di una e una sola funzione f di $C^\infty(X)$ con $\text{supp } f \subseteq V(x^0, R)$ se e solo se ψ verifica:

i) $\psi(\lambda, b)$ è C^∞ su $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times B$, è olomorfa in λ e soddisfa l'identità

$$\int_B e^{(is\lambda + \rho)(A(x, b))} \psi(s\lambda, b) db = \int_B e^{(i\lambda + \rho)(A(x, b))} \psi(\lambda, b) db \quad (s \in W, \lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*, x \in X);$$

ii) per ogni intero $N \geq 0$ esiste una costante c_N tale che

$$|\psi(\lambda, b)| = |\psi(\xi + i\eta, b)| \leq c_N (1 + (|\xi|^2 + |\eta|^2)^{\frac{1}{2}})^{-N} e^{R|\eta|}$$

$$\forall (\lambda, b) \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times B \quad (\lambda = \xi + i\eta; \xi, \eta \in \mathfrak{a}^*).$$

Il teorema analogo per le funzioni ultradifferenziabili si enuncia allora nel seguente modo.

TEOREMA. Una funzione ψ definita su $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times B$ è la trasformata di Fourier di una e una sola funzione f di $\mathcal{D}_{M_p}(X)$ con $\text{supp } f \subseteq V(x^0, R)$ se e solo se ψ verifica:

i) come nel teorema precedente;

ii') esistono due costanti positive d e k tali che

$$|\psi(\lambda, b)| = |\psi(\xi + i\eta, b)| \leq d \exp \left\{ -M \left(\frac{|\eta| |\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle|}{k} \right) + R|\eta| \right\} \\ \forall (\lambda, b) \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times B.$$

Dimostrazione. Si ricordi (cfr. Lewis [11], p. 298) che, se $x = gK$, $|H(g)| \leq d(x, x^0)$. Pertanto, se $x \in V(x^0, R)$, si ha:

$$(3.1) \quad |e^{(-i\lambda + \rho)(A(x, b))}| = |e^{(-i\xi + \eta + \rho)(A(x, b))}| \leq e^{|\eta + \rho|R} = ce^{|\eta|R}.$$

Inoltre (cfr. Lewis [11], p. 290) vale l'uguaglianza

$$\Delta e^{(-i\lambda + \rho)(A(x, b))} = -[\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle] e^{(-i\lambda + \rho)(A(x, b))}$$

e di conseguenza $\widetilde{\Delta} f(\lambda, b) = -[\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle] f(\lambda, b)$.

Si ha così

$$(3.2) \quad |\widetilde{\Delta^p f}(\lambda, b)| = |\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle|^p |\tilde{f}(\lambda, b)|.$$

Sia ora $f \in \mathcal{D}_{M_p}(\mathbf{X})$ con $\text{supp } f \subseteq V(x^0, \mathbf{R})$. Ricordando la (3.1) si ottiene

$$(3.3) \quad |\widetilde{\Delta^p f}(\lambda, b)| \leq \int_{V(x^0, \mathbf{R})} |\Delta^p f(x)| |e^{(-i\lambda + \rho)(A(x, b))}| dx \leq c_1 L_1^{2p} M_{2p} e^{R|\eta|}.$$

Da (3.2) e (3.3) segue

$$(3.4) \quad |\tilde{f}(\lambda, b)| \leq c_1 \inf_p \frac{L_1^{2p} M_{2p}}{|\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle|^{2p}} e^{R|\eta|} \quad (\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle \neq 0).$$

Sia ora $|\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle| \geq 1$. Valgono le seguenti disuguaglianze:

$$(3.5) \quad |\tilde{f}(\lambda, b)| \leq c_1 \sqrt[2p]{|\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle|} \inf_p \frac{L_1^{2p} M_{2p}}{|\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle|^{2p}} e^{R|\eta|}$$

e

$$(3.6) \quad |\tilde{f}(\lambda, b)| \leq c_1 \sqrt[2p+1]{|\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle|} \inf_p \frac{L_1^{2p+1} M_{2p+1}}{|\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle|^{2p+1}} e^{R|\eta|}$$

che insieme danno

$$(3.7) \quad |\tilde{f}(\lambda, b)| \leq c_1 \sqrt[2p]{|\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle|} \inf_p \frac{L_1^p M_p}{|\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle|^p} e^{R|\eta|}.$$

Risulta così

$$(3.8) \quad |\tilde{f}(\lambda, b)| \leq c_1 \exp \left\{ \log \sqrt[2p]{|\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle|} - \log \sup_p \frac{\sqrt[2p]{|\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle|}^p}{L_1^p M_p} + R|\eta| \right\}$$

e dunque

$$(3.9) \quad |\tilde{f}(\lambda, b)| \leq c_2 \exp \left\{ \log \frac{\sqrt[2p]{|\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle|}}{L_1} - M \left(\frac{\sqrt[2p]{|\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle|}}{L_1} \right) + R|\eta| \right\}.$$

La (2.3) implica che esistono $H > 0$ e c_3 reale tali che

$$M \left(\frac{\sqrt[2p]{|\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle|}}{L_1} \right) \geq \log \frac{\sqrt[2p]{|\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle|}}{L_1} + M \left(\frac{\sqrt[2p]{|\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle|}}{L_1 H} \right) + c_3.$$

Si ottiene così

$$(3.10) \quad |\tilde{f}(\lambda, b)| \leq c_4 \exp \left\{ -M \left(\frac{\sqrt[2p]{|\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle|}}{k_1} \right) + R|\eta| \right\}.$$

Sia ora $|\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle| \leq 1$. Da (3.4) si ha

$$|\tilde{f}(\lambda, b)| \leq c_1 \inf_p \frac{L_1^p M_p}{\sqrt{|\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle|}^p} e^{R|\eta|} \quad (\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle \neq 0)$$

e dunque

$$(3.11) \quad |\tilde{f}(\lambda, b)| \leq c_1 \exp \left\{ -M \left(\frac{\sqrt{|\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle|}}{L_1} \right) + R|\eta| \right\}.$$

Da (3.10) e (3.11) si ottiene così quanto voluto.

Viceversa supponiamo che ψ verifichi le proprietà $i)$ e $ii')$. Dalla (2.5) discende che ψ verifica pure $ii')$. Posto

$$(3.12) \quad f(x) = \frac{1}{w} \int_{\alpha^* \times B} \psi(\lambda, b) e^{(i\lambda + \rho)(A(x, b))} |c(\lambda)|^{-2} d\lambda db$$

(essendo w l'ordine del gruppo W e $c(\lambda)$ la funzione di Harish-Chandra; cfr. Harish-Chandra [4], pp. 291, 612), per il Teorema di tipo Paley-Wiener per funzioni C^∞ a supporto compatto si ha che $f \in C^\infty(X)$, $\text{supp } f \subseteq V(x^0, R)$ e $\tilde{f} = \psi$. Resta dunque da dimostrare che $f \in \mathcal{D}_{M_p}(X)$. Si ha:

$$|\Delta^p f(x)| \leq \frac{1}{w} \int_{\alpha^* \times B} |\psi(\lambda, b)| |\Delta^p e^{(i\lambda + \rho)(A(x, b))}| |c(\lambda)|^{-2} d\lambda db.$$

Ricordando l'ipotesi su ψ , le proprietà già usate in (3.1) e (3.2) e il fatto che la funzione $|c(\lambda)|^{-2}$ può essere maggiorata da un polinomio su α^* (il cui grado sarà indicato con m ; cfr. Helgason [6], p. 574), si ottiene

$$(3.13) \quad |\Delta^p f(x)| \leq c_1 \int_{\alpha^*} \exp \left\{ -M \left(\frac{\sqrt{|\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle|}}{k} \right) \right\} (\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle)^{p+m} d\lambda.$$

Ricordando la (2.4) si ha che

$$\sup_{u > 0} \frac{u^p}{e^{M(u)}} = \sup_{u \geq M_1} \frac{u^p}{e^{M(u)}}.$$

Per quanto segue occorre che $\frac{\sqrt{|\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle|}}{k}$ assuma anche valori minori o uguali a M_1 . Ci si può sempre ricondurre a questo caso modificando, se necessario, la costante k : se infatti la funzione ψ soddisfa $ii')$ per una certa costante k , essa soddisfa ancora $ii')$ per ogni $\tilde{k} \geq k$. È allora conveniente

riscrivere la (3.13) nel modo seguente

$$\begin{aligned}
 |\Delta^p f(x)| &\leq c_1 \int_{\alpha^*; \frac{\sqrt{\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle}}{k} \leq M_1} \exp \left\{ -M \left(\frac{\sqrt{\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle}}{k} \right) \right\} (\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle)^{p+m} d\lambda + \\
 &+ c_1 \int_{\alpha^*; \frac{\sqrt{\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle}}{k} \geq M_1} \exp \left\{ -M \left(\frac{\sqrt{\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle}}{k} \right) \right\} (\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle)^{p+m} d\lambda = \\
 &= c_2 + c_1 \int_{\alpha^*; \frac{\sqrt{\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle}}{k} \geq M_1} \exp \left\{ -M \left(\frac{\sqrt{\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle}}{k} \right) \right\} \sqrt{\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle}^{2(p+m)} d\lambda = \\
 &= c_2 + c_1 k^{2(p+m+l)} \int_{\alpha^*; \frac{\sqrt{\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle}}{k} \geq M_1} \exp \left\{ -M \left(\frac{\sqrt{\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle}}{k} \right) \right\} \cdot \\
 &\quad \cdot \left(\frac{\sqrt{\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle}}{k} \right)^{2(p+m+l)} \frac{d\lambda}{\sqrt{\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle}^{2l}} \leq
 \end{aligned}$$

(dove con $l \geq 1$ si è indicato il rango di X)

$$\begin{aligned}
 &\leq c_2 + c_3 k^{2(p+m+l)} \cdot \\
 &\quad \cdot \sup_{\frac{\sqrt{\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle}}{k} \geq M_1} \left\{ \exp \left[-M \left(\frac{\sqrt{\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle}}{k} \right) \right] \left(\frac{\sqrt{\langle \lambda, \lambda \rangle + \langle \rho, \rho \rangle}}{k} \right)^{2(p+m+l)} \right\} = \\
 &= c_2 + c_3 k^{2(p+m+l)} M_{2(p+m+l)}.
 \end{aligned}$$

Tenendo presente la (2.3), si ottiene infine

$$|\Delta^p f(x)| \leq c L^p M_p$$

con c, L costanti opportune.

BIBLIOGRAFIA

- [1] J. FARAUT (1980) - *Analyse harmonique sur les espaces riemanniens symétriques de rang un*, CIMPA, Université de Nancy I.
- [2] J. FARAUT (1981) - *Un théorème de Paley-Wiener pour la transformation de Fourier sur un espace riemannien symétrique de rang un* (preprint).
- [3] R. GANGOLLI (1971) - *On the Plancherel formula and the Paley-Wiener theorem for spherical functions on semisimple Lie groups*, « Ann. of Math. », 93, 150-165.
- [4] HARISH-CHANDRA (1958) - *Spherical functions on a semisimple Lie group*, I, II, « Amer. J. Math. », 80, 241-310, 553-613.
- [5] S. HELGASON (1962) - *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York.

- [6] S. HELGASON (1964) - *Fundamental solutions of invariant differential operators on symmetric spaces*, « Amer. J. Math. », 86, 565-601.
- [7] S. HELGASON (1968) - *Lie groups and symmetric spaces*, in « Battelle Rencontres 1967 », W. A. Benjamin, Inc., New York, pp. 1-71.
- [8] S. HELGASON (1970) - *A duality for symmetric spaces, with applications to group representations*, « Advan. Math. », 5, 1-154.
- [9] S. HELGASON (1973) - *The surjectivity of invariant differential operators on symmetric spaces*, « Ann. of Math. », (2) 98, 451-479.
- [10] H. KOMATSU (1973) - *Ultradistributions, I, Structure theorems and a characterization*, « J. Fac. Sci. Univ. Tokyo », Sec. IA, 20, 25-105.
- [11] J. B. LEWIS (1978) - *Eigenfunctions on symmetric spaces with distribution-valued boundary forms*, « J. Functional Analysis », 29, 287-307.
- [12] J. L. LIONS e E. MAGENES (1973) - *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*, Vol. III, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.
- [13] S. MANDELBROJT (1952) - *Séries adhérentes, régularisations des suites. Applications*, Gauthier-Villars, Paris.
- [14] C. ROUMIEU (1960) - *Sur quelques extensions de la notion de distribution*, « Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. », 77, 47-121.
- [15] C. ROUMIEU (1962) - *Ultradistributions définies sur $\mathbf{R}^n$ et sur certaines classes de variétés différentiables*, « J. Analyse Math. », 10, 153-192.