Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Ennio De Giorgi, Antonio Marino, Mario Tosques

Funzioni (p, q)-convesse

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **73** (1982), n.1-4, p. 6–14.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1982_8_73_1-4_6_0>

Analisi matematica. — *Funzioni (p, q)-convesse.* Nota (*) di ENNIO DE GIORGI (**), ANTONIO MARINO (***) e MARIO TOSQUES (***), presentata dal Corrisp. E. DE GIORGI.

SUMMARY. — We study a class of functions which differ essentially from those which are the sum of a convex function and a regular one and which have interesting properties related to Γ-convergence and to problems with non-convex constraints. In particular some results are given for the associated evolution equations.

INTRODUZIONE

La nozione di punto stazionario di una funzione regolare f è, come è noto, strettamente legata a quella di soluzione del problema

$$(\star) \qquad \frac{dU}{dt} = -\operatorname{grad} f \circ U .$$

Metodi ben noti, come quelli famosi di Morse [8] e di Lusternik e Schnirelmann [9], permettono infatti di valutare il numero dei punti stazionari di f su una varietà X, facendo ricorso, in modo essenziale, al flusso Φ delle soluzioni della equazione $(\star)$.

Sono note anche numerose generalizzazioni dei concetti classici di punto stazionario e di soluzione della $(\star)$. Un posto di rilievo fra queste riguarda le funzioni convesse e le somme di una funzione convessa e di una funzione regolare (cfr. [6]). Da vari problemi viene posta l'esigenza di ulteriori ampliamenti dei risultati esposti in [6].

In questo lavoro noi studiamo una nuova classe di funzioni che chiamiamo (p, q)-convesse e che ci sembra interessante per la espressività della sua definizione e la ricchezza delle sue proprietà. Alcune definizioni di questo lavoro e alcuni risultati ottenuti sono stati preannunciati in [10].

Tra le motivazioni dello studio di questa classe, segnaliamo problemi di teoria della Γ-convergenza e problemi di ostacolo. Per le applicazioni alla Γ-convergenza, lo studio delle funzioni (p, q)-convesse fornisce nuove condizioni sufficienti perché la Γ-convergenza di una successione di funzioni, oltre a garantire la convergenza dei minimi e dei punti di minimo, garantisca la convergenza dei punti stazionari e dei gradienti verso i punti stazionari ed i gradienti della funzione limite (cfr. [7]).

(*) Pervenuta all'Accademia il 28 ottobre 1982.
(**) Scuola Normale Superiore - Pisa.
(***) Dipartimento di Matematica - Università di Pisa.

Per quanto riguarda i problemi di ostacolo, le funzioni $(p\,,q)$-convesse consentono di trattare ostacoli che impongono vincoli di tipo non convesso al flusso Φ delle soluzioni di $(\star)$.

Questa situazione si presenta in molti problemi, vedi ad esempio [4], nei quali si vuol far ricorso al flusso Φ per valutare, con tecniche simili a quelle usate in [8] e [9], il numero dei punti stazionari di un dato funzionale. A questo argomento sono dedicati i lavori [1], [2] e [3] e si spera che seguendo le idee del presente lavoro, sia possibile semplificare le dimostrazioni di [4] e stabilire nuovi risultati di tipo analogo.

Richiamiamo alcune delle notazioni e definizioni usate nel seguito. Denotiamo con H uno spazio di Hilbert dotato del prodotto scalare $(\cdot,\cdot)$ e della norma $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$. Se $A \subset H$, poniamo, per ogni u di H, $d(u\,,A) = \inf\{\|u - v\| \mid v \in A\}$; inoltre $B(u\,,\rho) = \{v \mid v \in H\,, \|u - v\| < \rho\}$, $\forall \rho > 0$.

Sia $f: H \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, poniamo $Df = \{u \mid u \in H\,, f(u) \in \mathbf{R}\}$. Diciamo « pendenza (discendente) » di f e la denotiamo con $|\nabla f|$, (cfr. [1], [2]) la applicazione di H in $[0\,, +\infty]$ così definita:

$$\text{se} \qquad u \in Df \quad , \quad |\nabla f|(u) = \max\left\{0\,, \max\lim_{v \to u} \frac{f(u) - f(v)}{\|v - u\|}\right\};$$

$$\text{se} \qquad f(u) = +\infty \quad , \quad |\nabla f|(u) = +\infty\,.$$

Inoltre per ogni u in Df, denotiamo con $\partial^- f(u)$, l'insieme (eventualmente vuoto) dei vettori α di H, tali che

$$\min\lim_{u \to v} \frac{f(v) - f(u) - (\alpha\,, v - u)}{\|v - u\|} \geq 0$$

e poniamo $\partial^- f(u) = \varnothing$ se $f(u) = +\infty$; $\partial^- f(u)$ si dirà il sottodifferenziale di f in u, (cfr. [1]). Se ora $u \in Df$ e se $\partial^- f(u) \neq \varnothing$ esiste α_0 in $\partial^- f(u)$ con la proprietà $\|\alpha_0\| = \inf\{\|\alpha\| \mid \alpha \in \partial^- f(u)\}$; diciamo che α_0 è il « gradiente (inferiore) di f » in u e lo indichiamo con il simbolo $\operatorname{grad}^- f(u)$. Nel seguito usiamo la convenzione che $\|\operatorname{grad}^- f(u)\| = +\infty$ se $\partial^- f(u) = \varnothing$. Si ha evidentemente che $|\nabla f|(u) \leq \|\operatorname{grad}^- f(u)\|$ per ogni u di H.

Richiamiamo ora la definizione di curva di massima pendenza, introdotta in [1], rinviando il lettore al lavoro [2] per un più approfondito studio delle proprietà di tali curve.

Sia $f: H \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ semicontinua inferiormente e sia I un intervallo con $\mathring{I}$ non vuota. Diciamo che una applicazione $U: I \to H$, è una « curva di massima pendenza (in media) per f » se U è continua, $f \circ U(t) < +\infty$ per ogni t di I, con $t > \inf I$ e se

$$\| U(t_2) - U(t_1) \| \leq {}_{\star}\!\int_{t_1}^{t_2} |\nabla f| (U(\tau))\, d\tau ,$$

$$f \circ U(t_2) - f \circ U(t_1) \leq - {}^{\star}\!\!\int_{t_1}^{t_2} (|\nabla f| (U(\tau)))^2\, d\tau$$

per ogni t_1, t_2 in I con $t_1 < t_2$.

Si vede facilmente che, se U è una curva di massima pendenza, allora la funzione $|\nabla f| \circ U$ è misurabile e dunque nelle formule precedenti si può sostituire il semplice integrale agli integrali inferiore ${}_{\star}\!\int$ e superiore ${}^{\star}\!\!\int$.

Se ϕ è una applicazione definita in I ed a valori in uno spazio vettoriale topologico sul campo reale e se $t \in I$, poniamo

$$\phi'_+(t) = \lim_{\tau \to 0^+} \frac{\phi(t+\tau) - \phi(t)}{\tau} \qquad \text{se} \quad t < \sup I$$

e

$$\phi'(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{\phi(t+\tau) - \phi(t)}{\tau} \qquad \text{se} \quad t \in \mathring{I} .$$

Infine, rimandiamo il lettore, ad esempio, al lavoro [5], [11], per la definizione di Γ–convergenza.

§ 1. Definizioni ed esempi di funzioni (p, q)–convesse

Definizione 1.1. Sia $f : H \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ una funzione semicontinua inferiormente. Siano p, q due numeri reali con $p \geq 0$. Diciamo che f è «(p,q)–convessa» se per ogni u e per ogni v in H esiste z in H tale che

$$\left\| z - \frac{u+v}{2} \right\| \leq p \| u - v \|^2 \quad , \quad 2f(z) \leq f(u) + f(v) - 2q \| u - v \|^2 .$$

Osservazione 1.2. Sia f_1 una funzione (p_1, q_1)–convessa e sia f_2 (p_2, q_2)–convessa ed f_2 sia anche lipschitziana di costante L. Allora

a) $f_1 + f_2$ è $(p_1, q_1 + q_2 - L(p_1 + p_2))$–convessa

b) $\sup(f_1, f_2)$ è $(p_1, \inf\{q_1, q_2 - L(p_1 + p_2)\})$–convessa.

Proposizione 1.3. *Se* f *è* (p, q)*-convessa, se* $\rho \in \mathbf{R}$ *e* $0 < 8p\rho \leq 1$, *allora per ogni* u_0 *in* H *è* (p, q)*-convessa la funzione così definita*

$$\tilde{f}(u) = \begin{cases} f(u) & \textit{se} \ \|u - u_0\| \leq \rho \\ +\infty & \textit{altrove}. \end{cases}$$

Osservazione 1.4. Sia f (p, q)–convessa. Consideriamo la funzione $F : H \times \mathbf{R} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ così definita

$$F(u, x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \ f(u) \leq x \\ +\infty & \text{se} \ x < f(u). \end{cases}$$

Allora F è $(\sqrt{p^2 + q^2}, 0)$–convessa se in $H \times \mathbf{R}$ consideriamo la seguente norma $\|(u, x)\|^2 = \|u\|^2 + x^2$.

(1.5) *Esempi di funzioni* (p, q)*–convesse.*

a) Ogni funzione convessa $f : H \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ semicontinua inferiormente è $(0, 0)$–convessa. In particolare, dato $u_0 \in H$, la funzione $f(u) = \|u - u_0\|^2$ è $(0, 1/4)$–convessa.

b) Se f è una funzione con gradiente Lipschitziano, essa è $(0, K/8)$–convessa dove K è la costante di lipschitz del gradiente.

c) Per ogni numero reale non negativo ρ, le funzioni

$$\chi_1(u) = \begin{cases} 0 & \text{se} \ \|u\| \geq \rho \\ +\infty & \text{se} \ \|u\| < \rho \end{cases} \quad \text{e} \quad \chi_2(u) = \begin{cases} 0 & \text{se} \ \|u\| = \rho \\ +\infty & \text{se} \ \|u\| \neq \rho \end{cases}$$

sono $(1/(4\rho), 0))$ convesse.

d) La somma di una funzione del tipo indicato in *c*) con una convessa lipschitziana o con una funzione con gradiente lipschitziano è ancora (p, q)–convessa.

Osserviamo che la equazione di evoluzione

$$U'(t) \in -\partial^- f(U(t))$$

associata ad una funzione f del tipo considerato nella *d*) di (1.5) esula sostanzialmente dall'ambito in cui generalmente viene svolta la teoria delle equazioni di evoluzione (cfr. ad esempio [6]). (In tale ambito rientrano ad esempio le somme di funzioni dei tipi *a*) e *b*) della (1.5)).

§ 2. Minimi locali e sottodifferenziali di funzioni (p, q)–convesse

In questo paragrafo f denota una funzione (p, q)–convessa.

PROPOSIZIONE 2.1. *Per ogni u in* H *e per ogni ρ reale con* $0 < 4p\rho < 1$, *f è inferiormente limitata in* $\overline{\mathrm{B}(u, \rho)}$.

Se $p = 0$, f è inferiormente limitata sui limitati di H.

TEOREMA 2.2. *Sia* $\mathrm{D}f \neq \varnothing$ *e* $q > 0$. *Se f è inferiormente limitata su* H *allora f ammette uno ed un sol punto di minimo.*

Quindi (cfr (1 3) e (2.1)) *se* $\rho \in \mathbf{R}$ *e* $0 < 8p\rho \leq 1$, *f ha minimo unico su* $\overline{\mathrm{B}(u, \rho)}$, *per ogni u di* H *tale che* $\overline{\mathrm{B}(u, \rho)} \cap \mathrm{D}f = \varnothing$.

Si osservi che non è detto che f sia sequenzialmente semicontinua inferiormente in $\mathrm{B}(u, \rho)$ rispetto alla topologia debole di H (vedi esempio *c*) di (1.5)).

Dalla (1.2), (1.3), dalla *a*) di (1.5) e dal teorema precedente si deduce il seguente enunciato.

COROLLARIO 2.3. *Sia λ reale positivo tale che* $16 q\lambda + 1 > 0$. *Sia u_0 un elemento di* H *e sia ρ un numero tale che* $32 p\rho < 1$ *e* $\overline{\mathrm{B}(u_0, \rho)} \cap \mathrm{D}f \neq \varnothing$. *Allora per ogni u in* $\overline{\mathrm{B}(u_0, \rho)}$, *la funzione di* $v : \lambda f(v) + \frac{1}{2} \| v - u \|^2$ *ammette uno ed uno solo punto di minimo in* $\overline{\mathrm{B}(u_0, \rho)}$.

TEOREMA 2.4. *Sia* $q \geq 0$. *Allora ogni elemento u di* H *tale che* $|\nabla f|(u) = 0$, *è un punto di minimo per f su* $\mathrm{B}(u, 1/2p)$. *Se inoltre* $p = 0$, *allora u è di minimo per f su tutto* H.

TEOREMA 2.5. *Vale la seguente disuguaglianza:*

$$f(v) \geq f(u) + (\alpha, v - u) + 8(q - p\|\alpha\|)\|v - u\|^2$$

per ogni u, v in H *tali che* $16 p \| v - u \| \leq 1$ *e per ogni α in* $\partial^- f(u)$.

Conseguentemente per ogni u, v in H *con* $16 p \| v - u \| \leq 1$ *e per ogni α in* $\partial^- f(u)$ *e per ogni β in* $\partial^- f(v)$ *è*

$$\langle \alpha - \beta, u - v \rangle \geq 8(2q - p(\|\alpha\| + \|\beta\|))\|u - v\|^2 .$$

Dalle proprietà sopra esposte relative ai minimi locali, si deducono le seguenti proprietà del sottodifferenziale.

PROPOSIZIONE 2.6:

a) *Sia* (u_h) *una successione convergente ad u in* H *ed* (α_h) *una successione debolmente convergente ad α in* H *con* $\alpha_h \in \partial^- f_h(u_h)$, *per ogni h. Allora* $\alpha \in \partial^- f(u)$.

b) *La funzione di* $u : \| \mathrm{grad}^- f(u) \|$ *è semicontinua inferiormente.*

Proposizione 2.7. *Valgono i seguenti fatti:*

a) $|\nabla f|(u) < +\infty$ *se e solo se* $\partial^- f(u) \neq \varnothing$

b) $\|\operatorname{grad}^- f(u)\| = |\nabla f|(u)$.

Ricordiamo che proprietà analoghe alle (2.6) e (2.7) sono state stabilite nel § 4 di [1].

§ 3. Γ–convergenza di funzioni (p, q)–convesse

Definizione 3.1. Sia $f_h : \mathrm{H} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ una successione di funzioni. Diciamo che (f_h) è « localmente coerciva » se

per ogni C in $\mathbf{R}$, i sottoinsiemi limitati di $\bigcup_{h \in \mathbf{N}} \{u \mid f_h(u) \leq \mathrm{C}\}$ hanno chiusura compatta.

Teorema 3.2. *Sia* (f_h) *una successione localmente coerciva di funzioni* (p, q)*–convesse (con gli stessi* p *e* q*).*

Sia $f : \mathrm{H} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, *tale che* $f = \Gamma(\mathrm{H}^-) \lim\limits_{h \to +\infty} f_h$. *Allora* f *è* (p, q)*–convessa.*

Teorema 3.3. *Sia* (f_h) *una successione localmente coerciva di funzioni* (p, q)*–convesse e sia* $f = \Gamma(\mathrm{H}^-) \lim\limits_{h \to +\infty} f_h$. *Allora valgono i seguenti fatti.*

a) *Sia* (u_h) *una successione convergente in* H *ad* u *tale che* $16 p \, \mathrm{d}(u, \mathrm{D}_f) < 1$ *e sia* (α_h) *una successione, con* $\alpha_h \in \partial^- f_h(u_h)$, *debolmente convergente in* H *ad* α. *Allora* $u \in \mathrm{D}f$, $\lim\limits_{h \to +\infty} f_h(u_h) = f(u)$ *ed* $\alpha \in \partial^- f(u)$.

b) *Se* $u \in \mathrm{D}f$ *ed* $\alpha \in \partial^- f(u)$, *esistono una* (u_h) *convergente ad* u *ed una* (α_h) *convergente (fortemente) ad* α *in* H *con* $\alpha_h \in \partial^- f_h(u_h)$.

Il Teorema 3 3 consente di dedurre dalla Γ^-–convergenza delle funzioni, informazioni sui limiti dei sottogradienti. Un risultato inverso è fornito dal seguente enunciato.

Teorema 3.4. *Sia* (f_h) *una successione localmente coerciva di funzioni* (p, q)*–convesse e sia* f (p, q)*–convessa. Supponiamo che valgano le* a) *e* b) *di* (3.3) *che* $u_0 \in \mathrm{D}f$ *e che* $f(u_0) = \Gamma(\mathrm{H}^-) \lim\limits_{h \to +\infty} f_h(u_0)$. *Allora* $f(u) = \Gamma(\mathrm{H}^-) \lim\limits_{h \to +\infty} f_h(u)$ *per ogni* u *in* H *con* $16 p \|u - u_0\| < 1$.

§ 4. Equazioni di evoluzione

Teorema 4.1. *Sia* f *una funzione* (p, q)*–convessa ed* I *un intervallo con* $\mathrm{I} \neq \varnothing$. *Una curva* $U : \mathrm{I} \to \mathrm{H}$ *è di massima pendenza per* f *se e solamente se* U *è assolutamente continua e verifica l'equazione*

$$U'(t) \in -\partial^- f(U(t)) \quad \textit{quasi ovunque in } \mathrm{I}. \tag{4.2}$$

Dal 2.5 si deduce il seguente enunciato:

PROPOSIZIONE 4.3. *Sia* f (p, q)*-convessa e siano* $U, V : \mathrm{I} \to \mathrm{H}$ *due curve di massima pendenza per* f. *Allora*

$$(\| U(t) - V(t) \|)' \leq 8 (2q - p (\| U'(t) \| + \| V'(t) \|) \| U(t) - V(t) \|$$

quasi ovunque in I, *purché per ogni* t *di* I *sia* $16 p \| U(t) - V(t) \| < 1$.

Da questa Proposizione si ottiene il seguente enunciato:

TEOREMA DI UNICITÀ (4.4). *Sia* f (p, q)*-convessa. Se* V *e* U *sono due curve di massima pendenza per* f *definita su uno stesso intervallo* $[0, \mathrm{T}[(\mathrm{T} > 0)$ *e se* $U(0) = V(0)$ *allora* U *e* V *coincidono.*

Per quanto riguarda l'esistenza vale il seguente enunciato locale:

TEOREMA DI ESISTENZA (4.5). *Sia* f (p, q)*-convessa. Se* $u_0 \in \mathrm{H}$ *e se* $f(u_0) < \infty$, *allora esiste* $\mathrm{T} > 0$ *ed esiste una* $U : [0, \mathrm{T}[\to \mathrm{H}$ *di massima pendenza per* f, *con* $U(0) = u_0$.

TEOREMA DI REGOLARITÀ DELLA SOLUZIONE (4.6). *Sia* f (p, q)*-convessa e sia* $U : \mathrm{I} \to \mathrm{H}$ $(\mathring{\mathrm{I}} \neq \varnothing)$ *una curva di massima pendenza per* f. *Valgono allora i seguenti fatti:*

a) $\partial^- f(U(t)) \neq \varnothing$, *se* $t > \inf \mathrm{I}$,

b) $U'_+(t) = -\operatorname{grad}^- f(U(t))$, *per ogni* t *tale che* $\partial^- f(U(t)) \neq \varnothing$,

c) *fuori da un insieme numerabile in* I, $\operatorname{grad}^- f \circ U$ *è continua ed* U *è derivabile. Precisamente ciò accade per ogni punto di* I *in cui* $\| \operatorname{grad}^- f \circ U \|$ *è continua,*

d) $f \circ U$ *è continua su* I *e lipschitziana sui compatti di* I *ed inoltre* $(f \circ U)'_+(t) = -\| \operatorname{grad}^- f(U(t)) \|^2$,

e) *per ogni* t, t_0 *in* I *su* $t > t_0$ *è*

$$\| \operatorname{grad}^- f(U(t)) \| \leq \| \operatorname{grad}^- f(U(t_0)) \| \cdot$$
$$\exp \{ -16 q (t - t_0) + 16 p \sqrt{(t - t_0)(f(U(t_0)) - f(U(t))} \}.$$

OSSERVAZIONE 4.7. Sia u_0 in H e sia $[0, \mathrm{T}[$ il massimo intervallo di estremo sinistro 0, nel quale è definita una curva U di massima pendenza per f con $U(0) = u_0$. Se $\mathrm{T} < +\infty$, allora il $\lim_{t \to \mathrm{T}^-} f \circ U(t) = -\infty$, il $\lim_{t \to \mathrm{T}^-} \| \operatorname{grad} f(U(t)) \| = +\infty$, il $\min \lim_{t \to \mathrm{T}^-} \| U(t) - u_0 \| \geq 1/2p$ e non esiste il $\lim_{t \to \mathrm{T}^-} U(t)$.

TEOREMA DI DIPENDENZA CONTINUA DEI DATI INIZIALI 4.8. *Sia f (p, q)–convessa. Sia (u_h) una successione convergente ad u in* H, *tale che* $\sup_{h \in \mathbf{N}} \{f(u_h)\} < +\infty$. *Sia* $U : [0, \mathrm{T}[\to \mathrm{H}$ $(\mathrm{T} \in \mathbf{R})$ *la curva di massima pendenza per f con* $U(0) = u$ *e siano* $U_h : [0, \mathrm{T}_h[\to \mathrm{H}$ *una successione di curve di massima pendenza per f con* $U_h(0) = u_h$. *Supponiamo che $f \circ U$ sia limitata in* $[0, \mathrm{T}[$.

Allora :

a) *per h abbastanza grande le U_h ed U sono estensibili a curve di massima pendenza su* $[0, \mathrm{T}]$,

b) *le U_h convergono uniformemente ad U su* $[0, \mathrm{T}]$.

Se al posto di una singola funzione (p, q)–convessa si ha una successione Γ^-–convergente, localmente coerciva, di funzioni (p, q)–convesse si ha il seguente enunciato di convergenza per le curve di massima pendenza.

TEOREMA 4.9. *Sia (f_h) una successione localmente coerciva di funzioni (p, q)–convesse, sia (u_h) una successione convergente ad u in* H *con* $\sup_{h \in \mathbf{N}} \{f_h(u_h)\} < +\infty$. *Sia* $f : \mathrm{H} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ *tale che* $f = \Gamma(\mathrm{H}^-) \lim_{h \to +\infty} f_h$ *e sia* $U : [0, \mathrm{T}[\to \mathrm{H}$ *la curva di massima pendenza per f con* $U(0) = u$ *e* $\mathrm{T} \in \mathbf{R}$.

Se $f \circ U$ è limitata su $[0, \mathrm{T}[$, *si ha che :*

a) *per h abbastanza grande, le curve U_h di massima pendenza per f con* $U_h(0) = u_h$ *e la stessa U sono definite su* $[0, \mathrm{T}]$. *Inoltre le U_h convergono uniformemente ad U su* $[0, \mathrm{T}]$.

b) *Per ogni* $t > 0$, *il* $\lim_{h \to +\infty} f_h \circ U_h(t) = f \circ U(t)$ *e* $|\nabla f| \circ U_h$ *sono equilimitate sui compatti di* $]0, \mathrm{T}]$.

c) *La successione (U_h') converge ad U' in* $L^{2-\varepsilon}(]0, \mathrm{T}[, \mathrm{H})$ *per ogni ε tale che* $0 < \varepsilon \leq 1$ *ed in* $L^2(]0, \mathrm{T}[, \mathrm{H})$ *se* $\lim_{h \to +\infty} f_h(u_h) = f(u)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. DI GIORGI, A. MARINO e M. TOSQUES (1980) – *Problemi di evoluzione e curve di massima pendenza*, « Atti Acc. Naz. Lincei », Vol. LXVIII (marzo).

[2] A. MARINO e M. TOSQUES (1982) – *Curves of maximal slope for a certain class of non regular functions*, « Boll. U.M.I. », (6) *1–B*.

[3] A. MARINO e M. TOSQUES – *Existence and properties of the curves of maximal slope*, in preparazione.

[4] A. MARINO e D. SCOLOZZI – *Geodetiche con ostacolo*, in corso di stampa sul « Boll. U.M.I. ».

[5] E. DE GIORGI (1977) – *Γ–convergenza e G–convergenza*, « Boll. U.M.I. », (5) *14–A*.

[6] H. Brezis - *Operateurs Maximaux Monotones*, « Notes de Mathematica », (50), North-Holland.

[7] A. Ambrosetti e C. Sbordone (1976) - *Γ-convergenza e G-convergenza per problemi non lineari di tipo ellittico*, « Boll. U.M.I. », (5) *13-A*.

[8] R. Palais (1963) - *Morse theory on Hilbert manifolds*, « Topology », Vol. 2.

[9] R. Palais (1966) - *Lusternik-Schnirelmann theory on Banach manifolds*, « Topology », Vol. 5.

[10] E. De Giorgi (1981) - « Proceed. Meeting on Mathematical Theory of Optimization », S. Margherita Ligure, Dic. (to appear).

[11] E. De Giorgi (1980-81) - *Generalized Limits in Calculus of Variation*, « Topics in Functional Analysis », Quaderno della Scuola Norm. Sup. Pisa.