Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Sergio Bressan

Sul decadimento delle onde di accelerazione in un fluido non viscoso entro una teoria termodinamica non stazionaria

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **73** (1982), n.1-4, p. 28–34.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1982_8_73_1-4_28_0>

Fisica matematica. — *Sul decadimento delle onde di accelerazione in un fluido non viscoso entro una teoria termodinamica non–stazionaria* (*). Nota II di SERGIO BRESSAN (**), presentata (***) dal Socio G. GRIOLI.

SUMMARY. — In according to a recent thermodynamic theory proposed by G. Grioli we, consider the growth of acceleration waves in a non viscous fluid.

We determine the solutions for the growth of a plane or spherical wave advancing into the fluid in mechanical but not in thermal equilibrium.

INTRODUZIONE

Nella Nota I (*) si sono ricavate le equazioni di compatibilità per un'onda termomeccanica di accelerazione propagantesi (entro la termodinamica classica non–stazionaria) in un fluido non viscoso in connessione con uno stato S_e di equilibrio dal punto di vista meccanico ma non necessariamente da quello termodinamico. Ci si è riferiti ad una generalizzazione della teoria termodinamica proposta da G. Grioli, [8], [9].

Nella presente Nota II, supposto che l'onda si propaghi in connessione con il suddetto stato S_e, si ricavano le equazioni di trasporto nei casi piano e sferico e se ne determinano le soluzioni.

§ 3. EQUAZIONI DI TRASPORTO PER LE ONDE DI ACCELERAZIONE NEL CASO UNIDIMENSIONALE PIANO. – LORO SOLUZIONI

Ricordo che [1], detti $\gamma, \lambda, \alpha, \tau$ i parametri delle discontinuità delle derivate prime della densità ρ, della temperatura assoluta T, del flusso di calore $\boldsymbol{q}$ e della velocità $\boldsymbol{v}$ rispettivamente, nell'attraversamento della superfice mobile $\Sigma(x, t) = 0$, le condizioni di compatibilità per la propagazione si scrivono:

$$\text{(II.1)} \qquad \begin{cases} f_\rho\, \gamma\xi_i + f_T\, \alpha\xi_i + \rho\lambda_i\, \xi_0 = 0 & (i = 1, 2, 3) \\ \gamma\xi_0 + \rho\lambda_i\, \xi_i = 0 & \\ (c\alpha - \rho T\, \mathscr{F}_{T\rho}\, \gamma)\, \xi_0 + \tau_i\, \xi_i = 0 & \\ [z\tau_i - zL^{-1}(L_T\, \alpha + L_\rho\, \gamma)\, q_i]\, \xi_0 + L\alpha\xi_i = 0 & \end{cases}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M.

(**) Indirizzo dell'autore: Seminario Matematico dell'Università, via Belzoni 7, Padova.

(***) Nella seduta del 25 giugno 1982.

(1) Vedi [12].

ove $f(\rho, \mathrm{T})$ è la pressione, $\mathscr{F}$ l'energia libera, c il calore specifico a volume costante, L un opportuno operatore lineare e $\xi_0 = \partial\Sigma/\partial t$, $\xi_i = \partial\Sigma/\partial x_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

Suppongo che Σ_t sia un'onda piana propagantesi nella direzione orientata dell'asse x_1, e che invada una regione in cui inizialmente il fluido è in equilibrio meccanico con proprietà fisiche (stazionarie) funzioni della sola x_1, cosicché, per (I.3), con $\dot{q} = \dot{\mathrm{L}} = 0$ riesce pure $q_2 = q_3 = 0$. In tal caso è $\boldsymbol{n}(1, 0, 0)$, ed, essendo $\Sigma(x, t) = x_1 - \mathrm{V}^* t = 0$, risulta:

$$\xi_0 = -\mathrm{V}^* \quad ; \quad \xi_1 = 1 \quad ; \quad \xi_2 = \xi_3 = 0 . \tag{II.2}$$

In base a (II.2) ora delle (II.1) non sono più significative le $(\mathrm{II}.1)_{1,4}$ per $i = 2, 3$, e le incognite scalari sono le seguenti quattro: $\lambda_1, \gamma, \tau_1, \alpha$. La matrice A, formata con i coefficienti dei parametri delle discontinuità è quindi:

$$\mathrm{A} \equiv \begin{Vmatrix} \rho\xi_0 & f_\rho\, \xi_1 & 0 & f_\mathrm{T}\, \xi_1 \\ \rho\xi_1 & \xi_0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho \mathrm{T}\, \mathscr{F}_{\mathrm{T}\rho}\, \xi_0 & \xi_1 & c\xi_0 \\ 0 & -z\mathrm{L}^{-1}\, \mathrm{L}_\rho\, \xi_0\, \xi_1 & z\xi_0 & \mathrm{L}\xi_1 - z\mathrm{L}^{-1}\, \mathrm{L}_\mathrm{T}\, \xi_0\, q_1 \end{Vmatrix} . \tag{II.3}$$

Si noti che, nonostante nel caso in esame risulti $\xi_1 = 1$, si è scritto ovunque ξ_1 poiché la (II.3) e le formule che da essa seguiranno valgono anche nel caso sferico (che sarà trattato al § 2) ove le (II.2) non valgono più.

È noto (vedi [8], [9]) che l'equazione in ξ_0, $\det \mathrm{A} = 0$, ammette quattro radici non nulle $\overset{j}{\xi}_0 \, (j = 1, 2, 3, 4)$ reali e distinte.

Per ognuna di tali radici la matrice ha caratteristica 3 ed è quindi annullata da una famiglia di autovettori sinistri $\boldsymbol{l}$ e da una di autovettori destri $\boldsymbol{r}$; ossia è:

$$\sum_{h=1}^{h} \overset{j}{l}_h \mathrm{A}_{hk} = 0 \quad ; \quad \sum_{k=1}^{h} \mathrm{A}_{hk} \overset{j}{r}_h = 0 \qquad (j = 1, 2, 3, 4) . \tag{II.4}$$

Per determinarli si consideri, in base a (II.3), la matrice A' $[\mathrm{A}'']$ formata colla prima, terza e quarta colonna [prima, seconda e terza riga]. Poiché i minori di ordine massimo di tali matrici non sono tutti nulli, risulta che le soluzioni di (II.4) sono date da:

$$\overset{j}{l}_h = (-1)^h \overset{j}{\delta}{}' \, \|\mathrm{A}_h'\| \qquad (j = 1, 2, 3, 4) \tag{II.5}$$

$$\overset{j}{r}_k = (-1)^k \overset{j}{\delta}{}'' \, \|\mathrm{A}_k''\| \qquad (j = 1, 2, 3, 4) \tag{II.6}$$

dove $\overset{j}{\delta}{}'$ e $\overset{j}{\delta}{}''$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ sono parametri reali e con $\|\mathrm{A}_h'\|$ $[\|\mathrm{A}_k''\|]$ si indica il minore di ordine massimo ottenuto da A' $[\mathrm{A}'']$ sopprimendo la riga h-esima [la colonna k-esima].

Per brevità ometto, d'ora in avanti, di scrivere l'indice j relativo alla radice $\overset{j}{\xi}_0$ considerata.

Scelgo nelle (II.5) e (II.6) gli autovettori destro e sinistro dati rispettivamente da $\delta' = \delta'' = -1$. Le loro componenti sono:

$$\text{(II.7)} \qquad \begin{cases} l_1 = \rho\xi_1 (\mathrm{L}\xi_1^2 - z\mathrm{L}^{-1}\,\mathrm{L_T}\,q_1\,\xi_0\,\xi_1 - cz\,\xi_0^2)\,, \\ l_2 = \rho\xi_0 (-\mathrm{L}\xi_1^2 + z\mathrm{L}^{-1}\,\mathrm{L_T}\,q_1\,\xi_0\,\xi_1 + cz\,\xi_0^2)\,, \\ l_3 = \rho z f_\mathrm{T}\,\xi_0\,\xi_1^2\,, \\ l_4 = -\rho f_\mathrm{T}\,\xi_1^3\,. \end{cases}$$

$$\text{(II.8)} \qquad \begin{cases} r_1 = f_\mathrm{T}\,\xi_0\,\xi_1^2\,, \\ r_2 = -\rho f_\mathrm{T}\,\xi_1^3\,, \\ r_3 = \rho\xi_0\,[c\xi_0^2 - \xi_1^2\,(cf_\rho + \rho\mathrm{T}\,\mathscr{F}_{\mathrm{T}\rho}\,f_\mathrm{T})]\,, \\ r_4 = -\rho\xi_1\,(\xi_0^2 - f_\rho\,\xi_1^2)\,. \end{cases}$$

Siamo ormai in grado di scrivere in modo esplicito le equazioni di trasporto per le grandezze delle discontinuità ordinarie σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 (relative alle derivate di $\boldsymbol{v}$, ρ, $\boldsymbol{q}$ e T rispettivamente); ossia, ad esempio, $[\mathrm{d}v_1/\mathrm{d}t] = \sigma_1\,r_1$, ecc.

Mi baso su un noto teorema di Analisi (vedi [10], pag. 517) che, nel nostro caso, si può enunciare: *se si considera, nel punto* x_1, *la matrice caratteristica* A *come funzione delle variabili* ξ_β $(\beta = 0\,,1\,,2\,,3)$ *e ci si pone nell'ipotesi* $\|\mathrm{A}\| = 0$, *allora, se* A *ha rango* 3, *le bicaratteristiche soddisfano le relazioni*:

$$\text{(II.9)} \qquad \grave{x}_i = l\mathrm{A}_{\xi_i}\,r \qquad (i = 0\,,1\,,2\,,3)$$

ove l'accento grave indica derivazione (lungo il raggio) rispetto ad un opportuno parametro s, ove l ed r denotano un autovettore sinistro e uno destro, rispettivamente, della matrice A stessa ($l\mathrm{A} = \mathrm{A}r = 0$) e ove A_{ξ_i} è la matrice derivata della A rispetto a ξ_i. È pure noto un teorema di Analisi che dà l'equazione di trasporto per la grandezza della discontinuità lungo le bicaratteristiche - vedi [10], p. 619.

Sempre nel caso che il rango di A sia 3, nel nostro caso le equazioni si scrivono:

$$\text{(II.10)} \qquad \grave{\sigma} + \mathrm{P}\sigma = 0$$

ove l'accento grave rappresenta sempre derivazione lungo la bicaratteristica rispetto al suddetto parametro s, ed è: $\mathrm{P} = l\,[\Sigma_i\,\mathrm{A}^i\,r_i + b\,(r)]$; ove con $b\,(r)$ si rappresentano i termini ottenuti da quelli che nel sistema (I.9) (con $i = 1$) non contengono le derivate prime di v_1, ρ, q_1, T e nei quali si sono sostituite ordinatamente le componenti di $\boldsymbol{r}$ a v_1, ρ, q_1 e T.

In base a (II.3), tenendo conto delle (II.7) e (II.8), le (II.10) nel caso in esame si scrivono:

$$(\text{II.11})\qquad \begin{cases} \grave{\sigma}_1 + l_1 \left(\rho \dfrac{\partial r_1}{\partial t} + f_\rho \dfrac{\partial r_2}{\partial x_1} + f_{\mathrm{T}} \dfrac{\partial r_4}{\partial x_1} - \mathrm{F}_1 r_2\right) \sigma_1 = 0 \\[2ex] \grave{\sigma}_2 + l_2 \left(\rho \dfrac{\partial r_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial r_2}{\partial t}\right) \sigma_2 = 0 \\[2ex] \grave{\sigma}_3 + l_3 \left(-\rho \mathrm{T}\, \mathscr{F}_{\mathrm{T}\rho}\left(\dfrac{\partial r_2}{\partial t} + \dfrac{\partial r_3}{\partial x_1} + \dfrac{\partial r_4}{\partial t}\right) \sigma_3 = 0 \\[2ex] \grave{\sigma}_4 + l_4 \left(-z\mathrm{L}^{-1}\,\mathrm{L}_\rho\, q_1 \dfrac{\partial r_2}{\partial t} + z \dfrac{\partial r_3}{\partial t} - z\mathrm{L}^{-1}\,\mathrm{L}_{\mathrm{T}}\, q_1 \dfrac{\partial r_4}{\partial t} + \right. \\[2ex] \qquad\qquad \left. + \dfrac{\partial r_4}{\partial x_1} + r_3\right) \sigma_4 = 0\,. \end{cases}$$

Ricordo che è: $f = f(\rho\,, \mathrm{T})\,, \mathrm{L} = \mathrm{L}(\rho\,, \mathrm{T})\,, c = -\rho \mathrm{T}\, \mathscr{F}_{\mathrm{TT}}$. Se nella regione ancora non invasa da Σ_t il fluido è in equilibrio puramente meccanico, si dovrà ammettere un gradiente della temperatura anche non nullo (indipendente dal tempo) e quindi anche $\rho\,, f\,, \mathrm{L}\,, \mathscr{F}, \boldsymbol{q}$ ecc. in generale dipenderanno dal posto. In tali ipotesi, essendo costanti ξ_0 e ξ_1, risulta $\partial r_i / \partial t = 0$ $(i = 1\,, 2\,, 3\,, 4)$. Le (II.11) si possono quindi scrivere:

$$(\text{II.12})\qquad \begin{cases} \grave{\sigma}_1 + l_1 \left(f_\rho \dfrac{\partial r_2}{\partial x_1} + f_{\mathrm{T}} \dfrac{\partial r_4}{\partial x_1} - \mathrm{F}_1 r_2\right) \sigma_1 = 0 \\[2ex] \grave{\sigma}_2 + l_2\, \rho \dfrac{\partial r_1}{\partial x_1}\, \sigma_2 = 0 \\[2ex] \grave{\sigma}_3 + l_3 \dfrac{\partial r_3}{\partial x_1}\, \sigma_3 = 0 \\[2ex] \grave{\sigma}_4 + l_4 \left(\mathrm{L} \dfrac{\partial r_4}{\partial x_1} + r_3\right) \sigma_4 = 0\,. \end{cases}$$

Le (II.12) sono quindi del tipo:

$$(\text{II.13})\qquad \grave{\sigma}_j + g_j(x_1)\, \sigma_j = 0 \qquad (j = 1\,, 2\,, 3\,, 4)$$

ove si sono indicati con $g_j(x_1)$ i coefficienti delle σ_j nelle (II.12).

L'integrale generale delle (II.12) è allora:

$$(\text{II.14})\qquad \sigma_j = e^{-\int_{s_0}^{s} g_j(x_1)\, \mathrm{d}s} \qquad (j = 1\,, 2\,, 3\,, 4)\,.$$

Osservazione I. Se si desidera conoscere l'andamento delle grandezze delle discontinuità σ_j nel tempo, basta osservare che, detto al solito s il parametro opportuno di derivazione delle (II.9) e (II.10), è:

$$\dot{\sigma}_j = \frac{d\sigma_j}{ds}\frac{ds}{dt} \qquad (j = 1, 2, 3, 4) \tag{II.15}$$

ove si è indicato con il punto la derivazione rispetto al tempo.

Dalle (II.9), per $i = 0$, si ha $dt/ds = lA_{\xi_0} r$, ove A_{ξ_0} è la matrice ottenuta da A derivando rispetto a ξ_0 i rispettivi elementi. Nel caso piano risulta allora:

$$\frac{dt}{ds} = \rho^2 f_T \xi_1^3 [\xi_0 (2 L\xi_1^2 - 4 cz \xi_0^2) + zL^{-1} L_T q_1 \xi_1 (f_\rho \xi_1^2 - 3 \xi_0^2)]. \tag{II.16}$$

La (II.16), per quanto osservato più sopra, è quindi del tipo $dt/ds = \varphi(x_1)$, ove si è indicato con $\varphi(x_1)$ il secondo membro della (II.16) stessa. Ponendo $G_j(x_1) = g_j(x_3)/\varphi(x_1)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$, il sistema differenziale espresso mediante le derivate temporali delle σ_j si può scrivere:

$$\dot{\sigma}_j + G_j(x_1)\sigma_j = 0 \qquad (j = 1, 2, 3, 4). \tag{II.17}$$

L'integrale generale è dato allora da:

$$\sigma_j = e^{-\int_{t_0}^{t} G_j(x_1)\,dt} \qquad (j = 1, 2, 3, 4). \tag{II.18}$$

Osservazione II. È bene notare che anche il vettore $\boldsymbol{r}$ dipende dal posto (come risulta dalla (II.8)) e che quindi le grandezze effettive delle discontinuità sono rappresentate da: $\sigma_j r_j$ $(j = 1, 2, 3, 4)$. Nel caso piano risulta per esse:

$$\begin{cases} \sigma_1 r_1 = e^{-\int_{t_0}^{t} G_1(x_1)\,dt} \cdot f_T \xi_0, \\ \sigma_2 r_2 = - e^{-\int_{t_0}^{t} G_2(x_1)\,dt} \cdot \rho f_T, \\ \sigma_3 r_3 = e^{-\int_{t_0}^{t} G_3(x_1)\,dt} \cdot \rho\xi_0 (c\xi_0^2 - cf_\rho - \rho T \mathscr{F}_{T\rho} f_T), \\ \sigma_4 r_4 = - e^{-\int_{t_0}^{t} G_4(x_1)\,dt} \cdot \rho (\xi_0^2 - f_\rho). \end{cases} \tag{II.19}$$

§ 4. Caso di simmetria sferica

Considero un fluido non viscoso ed omogeneo, in equilibrio meccanico e suppongo che, a partire da un punto, si propaghi in esso un'onda sferica. Con ovvia scelta dell'origine del sistema cartesiano ortogonale di riferimento si può scrivere:

$$\Sigma(x, t) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - V^* t = 0, \tag{II.20}$$

da cui risulta:

$$\xi_0 = -2 V^* t \quad ; \quad \xi_i = 2 x_i \quad ; \quad n_i = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{II.21}$$

Data l'isotropia sferica del fenomeno non è restrittivo considerare, per semplicità, l'evolversi dell'onda lungo la caratteristica costituita dall'asse di indice 1. Lungo qualsiasi altro raggio uscente dall'origine le cose si svolgono in modo analogo.

Considero dunque un'onda propagantesi lungo l'asse x_1 con velocità diversa da zero ($\xi_0 \neq 0$). Allora, per (II.21)$_1$ è $\xi_2 = \xi_3 = 0$, onde le (II.1)$_{1,4}$ $(i = 2, 3)$ danno: $\lambda_2 = \lambda_3 = \tau_2 = \tau_3 = 0$.

Dunque solo le rimanenti delle (II.1) sono significative. Esse coincidono con quelle significative del caso unidimensionale. La differenza fra i due casi casi consiste solo nel fatto che ora valgono le (II.21) invece delle (II.2).

È facile controllare che le equazioni di evoluzione (significative) nel caso presente sono ancora le (II.11), considerate nel caso unidimensionale, sotto le definizioni (II.7) e (II.8). In base a (II.21), però, le (II.11), a differenza del caso piano, sono ora del tipo:

$$\grave{\sigma}_j + \mu_j(x_1, t)\, \sigma_j = 0 \qquad (j = 1, \cdots, 4) \tag{II.22}$$

ove si sono indicati con $\mu_j(x_3, t)$ i coefficienti delle σ_j nelle (II.11). Inoltre, con conti piuttosto laboriosi, si vede che, nel caso presente, la (II.16) assume la forma:

$$\frac{dt}{ds} = \sum_{i=1}^{3} \rho l_i r_i + l_4 r_4 + (c r_8 - \rho T \mathscr{F}_{T\rho} r_4)\, l_5 + \\ + \sum_{i=1}^{3} [z r_{4+i} - z L^{-1} q_i (L_\rho r_4 + L_T r_8)]\, l_{5+i} \tag{II.23}$$

ove è:

$$l_i = z^2 \rho^3 \xi_0^4 \xi_i \left(\sum_{j=1}^{3} M_j \xi_j - c z \xi_0^2\right) \qquad r_i = z^3 \rho^2 f_T \xi_0^6 \xi_i$$

$$l_4 = z^2 \rho^3 \xi_0^5 \left(c z_0 \xi_0^2 - \sum_{1}^{3}{}_j M_j \xi_j\right) \qquad r_4 = -z^3 \rho^3 f_T \xi_0^5 \sum_{1}^{3}{}_j \xi_j^2$$

$$l_5 = z^3 \rho^3 f_T \xi_0^5 (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) \qquad r_{i+4} = z^2 \rho^3 \xi_0^4 \Big[\xi_0^2 M_i + \\ + (f_T N_i - f_\rho M_i) \sum_{1}^{3}{}_j \xi_j^2\Big]$$

$$l_{i+5} = -z^2 \rho^3 f_T \xi_0^4 \xi_i (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) \qquad r_8 = -z^3 \rho^3 \xi_0^5 \left(\xi_0^2 - f_\rho \sum_1^3{}_j \xi_j^2 \right)$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

e in cui risulta:

$$\mathrm{M}_i = \mathrm{L}\xi_i - z\mathrm{L}^{-1} \mathrm{L_T} \xi_0 q_i \quad ; \quad \mathrm{N}_i = -z\mathrm{L}^{-1} \mathrm{L}_\rho \xi_0 q_i; \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Se si sa integrare la (II.23), nota la $t(s)$, la (II.22) si scrive:

$$\text{(II.24)} \qquad \grave{\sigma}_j + \hat{\mu}_j (x_1, s) \sigma_j = 0 \qquad (j = 1, \cdots, 4)$$

e quindi l'integrale generale è:

$$\text{(II.25)} \qquad \sigma_j = e^{-\int_{s_0}^{s} \hat{\mu}_j (x_1, s) \, \mathrm{d}s} \qquad (j = 1, \cdots, 4).$$

Bibliografia

[1] B. D. Coleman, M. E. Gurtin e I. Herrera R. (1965) – *The velocity of onedimensional...*, « Arch. Rational Mech. Anal. », *19* pp. 1–19.

[2] B. D. Coleman e M. E. Gurtin (1965) – *On the growth and decay...*, « Arch. Rational Mech. Anal. », *19*, n. 4.

[3] B. D. Coleman e M. E. Gurtin (1965) – *Thermadynamics influences on the growth...*, « Arch. Rational Mech. Anal. », *19* pp. 266–298.

[4] B. D. Coleman e M. E. Gurtin (1965) – *Thermodynamic and the velocity of...*, « Arch. Ratioanl Mech. Anal. », *19* pp. 317–318.

[5] B. D. Coleman, J. M. Greenberg e M. E. Gurtin (1966) – *On the amplitude of acceleration...* « Arch. Rational Mech. Anal. », *22* pp. 333–335.

[6] P. J. Chen 1968 – *Thermodynamic influences on the propagation and the growth...* « Arch. Rational Mech. Anal. », *31*.

[7] T. W. Wrigh (1972) – *Acceleration waves in simple elastic materials*, « Arch. Rational Mech. Anal. », *50*.

[8] G. Grioli (1979) – *Sulla propagazione di onde termomeccaniche nei continui*, Nota I « Rend. Acc. Naz. Lincei », LXVII, pp. 332–339.

[9] G. Grioli (1979) – *Sulla propagazione di onde termomeccaniche nei continui*, Nota II « Rend. Acc. Naz. Lincei », LXVII, 426–432.

[10] Courant–Hilbert (1962) – « Mech. of Math. Phis. », Vol. II.

[11] S. Bressan – In corso di stampa sulle « Mem. Acc. Naz. Lincei » (presentata nel 1981).

[12] S. Bressan – Nota I dallo stesso titolo della presente, in corso di stampa su questi Rendiconti.