Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mauro Biliotti, Armin Herzer

Strutture di André con gruppi di traslazioni transitivi non normali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **73** (1982), n.1-4, p. 21–27.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1982_8_73_1-4_21_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1982.

Geometria. — *Strutture di André con gruppi di traslazioni transitivi non normali* (*). Nota (**) di MAURO BILIOTTI e ARMIN HERZER, presentata dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — We give some examples of André-structures admitting translation groups which are transitive on the set of points but which are not normal in the dilatation group. André structures with this property seem to be new in the literature.

Le strutture con parallelismo di André (A–strutture) [1], [2], [3], [4] e, più in particolare, gli spazi di Sperner [13] sono stati studiati, sotto molteplici aspetti, da numerosi autori. Com'è stato messo in luce da Biliotti in [7] esistono A–strutture dotate di più gruppi di traslazioni transitivi sull'insieme dei punti. Esempi di A–strutture con tale proprietà sono stati successivamente dati anche da Will in [14], mentre studi sulle relazioni intercorrenti fra i diversi gruppi di traslazioni di una medesima A–struttura sono stati svolti in [9] (e, in un contesto più generale, in [5] e [6]). Per quanto consta agli autori è rimasto però a tutt'oggi aperto il problema dell'esistenza di A–strutture con un gruppo di traslazioni transitivo sull'insieme dei punti e non normale nel gruppo delle collineazioni. In questa Nota si mostra che, utilizzando opportunamente un metodo per la costruzione di A–strutture dovuto a Permutti [11], è possibile fornire esempi di A–strutture con gruppi di traslazioni transitivi sull'insieme dei punti e non normali neppure nel gruppo delle dilatazioni. In base a risultati dovuti a Seier [12], resta parimenti provato che un'A–struttura costruita con il classico procedimento di André [2] a partire da un gruppo T e da una partizione in sottogruppi di T può possedere collineazioni e, in particolare, dilatazioni fissanti l'elemento neutro di T, le quali non risultino indotte da automorfismi di T.

1. Sia P un insieme di elementi, detti *punti*, R una famiglia di sottoinsiemi di P, detti *rette*, e *parallelismo* (simbolo « $//$ ») una relazione binaria su R. La terna $\Sigma = (P, R, //)$ si dice una *A–struttura* se sono soddisfatti gli assiomi:

A_1) due punti distinti appartengono ad una ed una sola retta;

A_2) il parallelismo è una relazione di equivalenza; per ogni punto p ed ogni retta R esiste una ed una sola retta S tale che $p \in$ S e S $//$ R;

A_3) ad ogni retta appartengono almeno due punti; esistono tre punti non appartenenti ad una stessa retta.

Se le rette di Σ hanno tutte la stessa cardinalità, Σ è detta uno *spazio di Sperner* (S–*spazio*).

(*) Lavoro svolto nell'ambito delle attività del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 26 ottobre 1982.

Una *collineazione* di Σ è una corrispondenza biunivoca di P in sé la quale, insieme con la sua inversa, muta rette in rette e conserva il parallelismo. Una *dilatazione* δ di Σ è una collineazione tale che $R \,//\, R^{\delta}$ per ogni $R \in \mathcal{R}$. Una *traslazione* τ è una dilatazione identica o priva di punti fissi. Se τ fissa tutte le rette di una classe di parallelismo, τ è detta *centrale*. Le dilatazioni costituiscono un sottogruppo normale $D(\Sigma)$ del gruppo delle collineazioni di Σ. Le traslazioni non costituiscono, in generale, un gruppo [7]. Un'A-struttura si dice *di traslazione* se possiede un gruppo T di traslazioni transitivo sull'insieme dei punti. In tal caso, se D_0 è il gruppo delle dilatazioni che fissano uno stesso punto, si ha $D(\Sigma) = TD_0$.

2. Sia A un anello di integrità, con unità, dotato di massimo comun divisore (m.c.d.) destro e sia $n \geq 2$ un intero. Denotiamo con $\boldsymbol{a} = (a_i)$, $1 \leq i \leq n$, gli elementi della somma diretta A^n di n copie di $A(+)$ e con $\mathbf{0}$ l'elemento neutro di A^n. Inoltre, se $\boldsymbol{x} = (x_i) \in A^n$, $a \in A$, scriviamo $\boldsymbol{x}a$ in luogo di $(x_i a)$ ed $a\boldsymbol{x}$ in luogo di (ax_i). Infine poniamo $\boldsymbol{x}A = \{\boldsymbol{x}a : a \in A\}$. Sia

$$\mathcal{A} = \{(a_i)\,A : \text{m.c.d.}\,(a_1, \cdots, a_n) = 1\}\,.$$

Si verifica [11] che gli elementi di $\mathcal{A}$ sono sottogruppi di A^n e costituiscono una partizione di A^n, ossia:

- $A^n = \bigcup_{\boldsymbol{a}A \in \mathcal{A}} \boldsymbol{a}A$;
- per ogni $\boldsymbol{a}A, \boldsymbol{b}A \in \mathcal{A}$, o $\boldsymbol{a}A = \boldsymbol{b}A$ o $\boldsymbol{a}A \cap \boldsymbol{b}A = \mathbf{0}$.

È allora ben noto [2] che la struttura di incidenza con parallelismo (simbolo « // ») definita nel modo seguente:

- i punti sono gli elementi di A^n;
- le rette sono i laterali di elementi di $\mathcal{A}$;

$$\boldsymbol{a}A + \boldsymbol{b} \,//\, \boldsymbol{a}'A + \boldsymbol{b}'$$

se e solo se $\boldsymbol{a}A = \boldsymbol{a}'A$;

è un S-spazio di traslazione che denoteremo con $[A^n]$.

Le applicazioni di A^n in sé del tipo

$$\tau_{\boldsymbol{c}} : \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}\,, \qquad \boldsymbol{c} \in A^n$$

sono traslazioni centrali di $[A^n]$ e costituiscono un gruppo transitivo su A^n [11]. Se U denota il gruppo costituito dagli elementi unitari di A, le applicazioni di A^n in sé del tipo

$$\delta_u : \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}u\,, \qquad u \in U$$

sono tutte e sole le dilatazioni di $[A^n]$ che fissano il punto $\mathbf{0}$ [11] e costituiscono un gruppo $\overline{U}$, isomorfo ad U.

PROPOSIZIONE 1. *Sia* $|\ |$ *un omomorfismo di* A^n *in* U, H *il suo nucleo ed* U_0 *la sua immagine. Se* $|\ |$ *soddisfa la condizione :*

a) $$x(1-u) \in H \qquad \textit{per ogni} \quad x \in A^n, \quad u \in U_0,$$

l'insieme A^n, *dotato dell'operazione binaria* « $\circ$ » *definita da*

$$x \circ y = x\,|y| + y, \qquad x, y \in A^n$$

è un gruppo. Le applicazioni di A^n *in sé del tipo*

$$\sigma_c : x \to x \circ c, \qquad c \in A^n$$

sono traslazioni di $[A^n]$ *e costituiscono un gruppo* $\overline{A^n(\circ)}$ *isomorfo ad* $A^n(\circ)$ *e transitivo su* A^n.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che da a) segue $|xu| = |x|$ per ogni $x \in A^n$, $u \in U_0$ e quindi $\big|x\,|y|\big| = |x|$ per ogni $x, y \in A^n$. Siano $x, y, z \in A^n$. È

$$\begin{aligned}(x \circ y) \circ z &= (x \circ y)\,|z| + z = \\ &= (x\,|y| + y)\,|z| + z = x\,|y|\,|z| + y\,|z| + z.\end{aligned}$$

D'altra parte è

$$\begin{aligned}x \circ (y \circ z) &= x\,|(y \circ z)| + (y \circ z) \\ &= x\,\big|y\,|z| + z\big| + y\,|z| + z \\ &= x\,\big|y\,|z|\big| \cdot |z| + y\,|z| + z \quad \text{poiché } |\ | \text{ è un omomorfismo,} \\ &= x\,|y|\,|z| + y\,|z| + z \qquad \text{per quanto osservato.}\end{aligned}$$

Pertanto « $\circ$ » è associativa.

È subito visto che $\mathbf{0}$ è l'elemento neutro. Inoltre si ha

$$-x\,|x|^{-1} \circ x = -x\,|x|^{-1}\,|x| + x = \mathbf{0},$$

cioè ogni elemento ammette inverso sinistro e quindi $A^n(\circ)$ è un gruppo. Se $aA + b$ è una retta di $[A^n]$ risulta

$$\begin{aligned}(aA + b)\,\sigma_c &= (aA + b) \circ c = (aA + b)\,|c| + c = \\ &= aA + b\,|c| + c = aA + b \circ c\end{aligned}$$

poiché $A\,|c| = A$ essendo $|c|$ un elemento unitario di A. Ciò prova che σ_c è una dilatazione di $[A^n]$. Dalla definizione segue immediatamente che le dilatazioni σ_c sono prive di punti fissi per $c \neq \mathbf{0}$ e costituiscono un gruppo transitivo su A^n e isomorfo ad $A^n(\circ)$.

Una traslazione σ_c è centrale se e solo se $|c| = 1$, ossia $c \in H$. $A^n(+)$ ed $A^n(\circ)$ sono ambedue estensioni di H, in sintonia con i risultati di [6].

PROPOSIZIONE 2. *Il gruppo* $\overline{A^n(\circ)}$ *è normale nel gruppo delle dilatazioni di* $[A^n]$ *se e solo se per ogni* $c \in A^n$, $u \in U$ *risulta*

$$\text{b)} \qquad |cu| = u^{-1} |c| u .$$

Dimostrazione. Supponiamo $\overline{A^n(\circ)}$ normale. Siano $c \in A^n$, $u \in U$. Si ha $\delta_u^{-1} \sigma_c \delta_u \in \overline{A^n(\circ)}$ e quindi $\delta_u^{-1} \sigma_c \delta_u = \sigma_d$ per un certo $d \in A^n$. Si ha

$$x(\delta_u^{-1} \sigma_c \delta_u) = ((xu^{-1}) \circ c) u = x(u^{-1} |c| u) + cu$$

e quindi deve aversi

$$x(u^{-1} |c| u) + cu = x|d| + d$$

per ogni $x \in A^n$. In particolare, per $x = \mathbf{0}$, deve essere $d = cu$. Segue allora immediatamente b). Il viceversa è analogo ove si tenga conto che è sufficiente provare che $\overline{U}$ normalizza $\overline{A^n(\circ)}$, poiché, come si verifica con un semplice calcolo che omettiamo, è sempre $\tau_a^{-1} \overline{A^n(\circ)} \tau_a = \overline{A^n(\circ)}$ qualunque sia τ_a, con $a \in A^n$.

Denotiamo con $\mathbf{Z}_m$ l'anello delle classi di resto mod m. È utile per il seguito il seguente lemma.

LEMMA 3. *Sia* v *un elemento unitario di periodo finito* m *dell'anello* A *e sia* φ *un omomorfismo di* A^n *in* $\mathbf{Z}_m(+)$ *soddisfacente la condizione*

$$\text{a}') \qquad \textit{per ogni} \quad x \in A^n, \ x(1 - v) \ \textit{è nel nucleo di} \quad \varphi ,$$

allora l'applicazione $|\;| : A^n \to U$ *definita da*

$$|x| = v^{x\varphi}$$

per ogni $x \in A^n$ *è un omomorfismo soddisfacente la condizione* a).

Dimostrazione. Chiaramente $|\;|$ è un omomorfismo. Mostriamo che $x(1 - v^s)$, $1 \leq s \leq m$, è nel nucleo di φ. L'asserto è vero per $s = 1$. Supposto vero per $s - 1$ si ha

$$(xv^s)\varphi = ((x_i v) v^{s-1}) \varphi = (x_i v) \varphi = (x_i) \varphi = x\varphi$$

e quindi è vero per s. Allora si ha

$$|x(1 - v^s)| = v^{(x(1-v^s))\varphi} = v^0 = 1$$

e quindi $|\;|$ soddisfa a).

3. Sia p un numero primo dispari, $1 \neq \zeta \in \mathbf{C}$, $\zeta^p = 1$ e $A = \mathbf{Z}[\zeta]$ (cioè A è l'ordine massimale del p–esimo campo ciclotomico $\mathbf{Q}(\zeta)$. Vedi [8]).

Consideriamo l'applicazione $\alpha : A \to \mathbf{Z}_p$ così definita

$$x \mapsto \sum_{j=0}^{p-1} x^{(j)} \quad \bmod p$$

ove

$$x \in A \quad , \quad x = \sum_{j=0}^{p-1} x^{(j)} \zeta^j \quad , \quad x^{(j)} \in \mathbf{Z}\,.$$

L'applicazione α è ben definita. Infatti se

$$\sum_{j=0}^{p-1} x^{(j)} \zeta^j = \sum_{j=0}^{p-1} y^{(j)} \zeta^j, \qquad \text{allora} \quad \sum_{j=0}^{p-1} (x^{(j)} - y^{(j)}) \zeta^j = 0\,.$$

Pertanto il polinomio minimo $1 + t + \cdots + t^{p-1}$ di ζ divide $\sum_{j=0}^{p-1}(x^{(j)} - y^{(j)}) t^j$. Ne segue $c(1 + t + \cdots + t^{p-1}) = \sum_{j=0}^{p-1} (x^{(j)} - y^{(j)}) t^j$ con $c \in \mathbf{Z}$, ossia $x^{(j)} - y^{(j)} = c$, da cui $\sum_{j=0}^{p-1} (x^{(j)} - y^{(j)}) \equiv 0 \bmod p$ e quindi

$$\left(\sum_{j=0}^{p-1} x^{(j)} \zeta^j\right) \alpha = \left(\sum_{j=0}^{p-1} y^{(j)} \zeta^j\right) \alpha\,.$$

È subito visto che

$$(x + y)\,\alpha = x\alpha + y\alpha\,;$$

$$(x\zeta^i)\,\alpha = x\alpha\,;$$

$$(xz)\,\alpha \equiv x\alpha\, z \bmod p$$

per ogni $x, y \in A$, $z \in \mathbf{Z}$. Quindi è

$$(xy)\,\alpha = \sum_{j=0}^{p-1} (xy^{(j)} \zeta^j)\,\alpha = \sum_{j=0}^{p-1} (xy^{(j)})\,\alpha \equiv x\alpha \sum_{j=0}^{p-1} y^{(j)} \quad \bmod p\,,$$

ma è anche $x\alpha\, y\alpha \equiv x\alpha \sum_{j=0}^{p-1} y^{(j)} \bmod p$ e perciò $(xy)\,\alpha = x\alpha\, y\alpha$ per ogni $x, y \in A$.

L'applicazione α è un epimorfismo di A su $\mathbf{Z}_p$.

Se $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 2$, definiamo $\varphi : A^n \to \mathbf{Z}_p$ nel modo seguente

$$(x_i) \to \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \alpha\,.$$

È immediatamente visto che

$$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\,\varphi = \boldsymbol{x}\varphi + \boldsymbol{y}\varphi$$

per ogni $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A^n$. Inoltre si ha

$$(\boldsymbol{x}a)\,\varphi = (x_i\,a)\,\varphi = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\,a\right)\alpha = \sum_{i=1}^{n} (x_i\,a)\,\alpha =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i\,\alpha\,a\alpha = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\alpha\,a\alpha = \boldsymbol{x}\varphi\,a\alpha$$

per ogni $\boldsymbol{x} \in A^n$, $a \in A$. In particolare vale

$$(\boldsymbol{x}\zeta)\,\varphi = \boldsymbol{x}\varphi$$

e quindi l'omomorfismo φ soddisfa la condizione a') del Lemma 3 con $v = \zeta$. Se l'anello A è a fattorizzazione unica, e ammette quindi m.c.d., in base ai risultati del § 2 è possibile costruire, mediante A e φ, un S-spazio $[A^n]$ il quale ammette $\overline{A^n(\circ)}$ come gruppo di traslazioni transitivo sull'insieme dei punti. Ricordiamo [10] che i numeri primi p per i quali A è a fattorizzazione unica sono 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.

Osserviamo che si ha $|\,\boldsymbol{c}a\,| = |\,\boldsymbol{c}\,|$, $\boldsymbol{c} \in A^n$, $a \in A$, se e solo se $(\boldsymbol{c}a)\,\varphi = \boldsymbol{c}\varphi$, ossia se e solo se $a\alpha \equiv 1 \bmod p$. L'anello A contiene elementi unitari tali che $a\alpha \not\equiv 1 \bmod p$, ad esempio gli elementi $-\zeta^i$ e $1 + \zeta + \cdots + \zeta^s$ con $1 \leq s < p - 1$. Pertanto, per la Proposizione 2, il gruppo $\overline{A^n(\circ)}$ non è normale nel gruppo delle dilatazioni di $[A^n]$.

È interessante notare che, essendo $1 - \zeta$ un divisore primo di p in $A = \mathbf{Z}[\zeta]$ (vedi [8], 3.1, Lemma 1), l'applicazione α può essere riguardata come l'epimorfismo naturale di A su $A/\mathfrak{p} \simeq \mathbf{Z}_p$, ove $\mathfrak{p}$ denota l'ideale primo generato da $1 - \zeta$. Si può allora considerare la localizzazione $A_\mathfrak{p}$ di A rispetto a $\mathfrak{p}$ e l'epimorfismo naturale.

$$\tilde{\alpha} : A_\mathfrak{p} \twoheadrightarrow A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \simeq A/\mathfrak{p} \simeq \mathbf{Z}_p\,.$$

Poiché $A_\mathfrak{p}$ è sempre a fattorizzazione unica, è possibile, più in generale, ripetere la costruzione precedente facendo uso di $A_\mathfrak{p}$ ed $\tilde{\alpha}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. ANDRÉ (1961) - *Über Parallelstrukturen* I. *Grundbegriffe.* « Math. Z. », *76*, 85-102.

[2] J. ANDRÉ (1961) - *Über Parallelstrukturen* II. *Translationsstrukturen.* « Math. Z. », *76*, 155-163.

[3] J. ANDRÉ (1961) - *Über Parallelstrukturen* III. *Zentrale t-Strukturen.* « Math. Z. », *76*, 240-256.

[4] J. ANDRÉ (1961) - *Über Parallelstrukturen* IV. *T-Strukturen.* « Math. Z. », *76*, 311-333.

[5] H. J. ARNOLD (1971) – *Die Geometrie der Ringe im Rahmen allgemeiner affiner Strukturen*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.

[6] I. BECKER (1976) – *Methoden zur Bestimmung geometrisch äquivalenter Gruppen*. « Proc. Sympos. Duisburg », Birkhauser, Basel.

[7] M. BILIOTTI (1978) – *Sulle strutture di traslazione*. « Boll. Un. Mat. It. », (5) *15-A*, 667–677.

[8] Z. I. BOREVICH e I. R. SHAFAREVICH (1966) – *Number Theory*. Academic Press, New York.

[9] M. MARCHI (1980) – *Su una particolare classe di* S–*spazi*. « Rend. Sem. Mat. Brescia », *4*, 3–42.

[10] J. M. MASLEY e H. L. MONTGOMERY (1976) – *Cyclotomic fields with unique factorization*. « J. Reine Angew. Math. », *286/287*, 248–256.

[11] R. PERMUTTI (1967) – *Geometria affine su di un anello*. « Mem. Acc. Naz. Lincei », (8), *8*, 259–287.

[12] W. SEIER (1971) – *Kollineationen von Translationsstrukturen*. « J. Geometry », *1*, 183–195.

[13] E. SPERNER (1960) – *Affine Räume mit schwacher Inzidenz und zugehörige algebraische Strukturen*. « J. Reine Angew. Math. », *204*, 205–215.

[14] R. WILL (1980) – *Über einige Probleme in Translationsstrukturen*. Staatsexamensarbeit, Mainz.