Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marco Degiovanni

Sul problema del rimbalzo in un insieme convesso

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **73** (1982), n.1-4, p. 1–5.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1982_8_73_1-4_1_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1982.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1982 (Luglio-Ottobre)

(Ogni Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo o di presentazione)

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Analisi matematica. — *Sul problema del rimbalzo in un insieme convesso.* Nota (*) di MARCO DEGIOVANNI (**), presentata dal Corrisp. E. DE GIORGI.

SUMMARY. — In the present paper we seek the bounce trajectories in a convex set which assume assigned positions in two fixed time instants. We find sufficient conditions in order to obtain the existence of infinitely many bounce trajectories.

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbf{R}^n$ con frontiera $\partial\Omega$ di classe C^1 e sia U in $L^1(0, T; C^1(\overline{\Omega}))$.

Nel seguito indicheremo con ν la normale esterna a Ω, con $(\mid)$ il prodotto scalare di $\mathbf{R}^n$ e con I_A la funzione caratteristica di A.

Il nostro scopo è studiare il moto di un punto materiale che si muove in $\overline{\Omega}$ sotto l'azione di un campo di forze conservativo di potenziale U e che rimbalza elasticamente contro la frontiera $\partial\Omega$.

Ricordiamo la definizione di rimbalzo usata in [8]:

DEFINIZIONE 1. *Diciamo che*

$$\gamma : [0, T] \to \overline{\Omega}$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 3 agosto 1982.

(**) Scuola Normale Superiore, Pisa.

è una soluzione del problema del rimbalzo con potenziale U *se*

i) γ *è lipschitziana;*

ii) *esiste una misura di Borel positiva* μ *su* $]0, T[$ *con* $\operatorname{supp} \mu \subset C = \{t \in]0, T[: \gamma(t) \in \partial\Omega\}$ *tale che* $\gamma'' = -\nabla U(t, \gamma) - \nu(\gamma)\mu$ *nel senso delle distribuzioni, ossia*

$$\int_0^T (\gamma' \mid \phi')\, dt = \int_0^T (\nabla U(t, \gamma) \mid \phi)\, dt + \int_C (\phi \mid \nu(\gamma))\, d\mu \qquad \forall \phi \in (C_0^\infty(0, T))^n;$$

iii) γ *ammette derivata destra e sinistra in ogni t di* $]0, T[$ (*questa è una conseguenza di* ii)) *e si ha*

$$|\gamma'_+(t)| = |\gamma'_-(t)| \qquad \forall t \in]0, T[.$$

OSSERVAZIONE 1. Se γ è una soluzione del problema del rimbalzo, allora

i) $\mu(]0, T[) < +\infty$;

ii) γ ammette derivata destra in $t = 0$ e derivata sinistra in $t = T$;

iii) $\frac{1}{2}|\gamma'_\pm(t_2)|^2 - \frac{1}{2}|\gamma'_\pm(t_1)|^2 = -\int_{t_1}^{t_2} (\gamma' \mid \nabla U(t, \gamma))\, dt \qquad \forall t_1, t_2 \in [0, T];$

iv) $\gamma'_+ = \gamma'_- - 2(\gamma'_- \mid \nu(\gamma))\nu(\gamma)$ in C.

DEFINIZIONE 2. *Sia* γ *una soluzione del problema del rimbalzo. Diciamo che* γ *è una soluzione classica del problema del rimbalzo se l'insieme* C *dei punti di rimbalzo è finito.*

Le soluzioni classiche del problema del rimbalzo sono state studiate anzitutto dal punto di vista ergodico [1], [2] nel caso in cui U sia nullo attraverso una tecnica di trasformazioni successive.

Ad ogni modo è interessante osservare [3] che esistono degli Ω convessi con $\partial\Omega$ di classe C^∞ ed opportuni dati iniziali $(\gamma(0), \gamma'_+(0))$ in $\Omega \times \mathbf{R}^n$ per i quali non esistono soluzioni classiche del problema del rimbalzo con potenziale U nullo definite su tutto $[0, T]$. In tal caso può esservi mancanza di unicità in grande per il problema di Cauchy [3], [4] nell'ambito delle soluzioni considerate nella Definizione 1.

Delle situazioni particolari, in cui tutte le soluzioni sono classiche, vengono prese in considerazione in [3] (la curvatura gaussiana di $\partial\Omega$ deve essere strettamente positiva in ogni punto) ed in [5] in un contesto leggermente diverso (Ω deve essere un poliedro e sono ammesse solo le traiettorie che non toccano mai gli spigoli).

Nel caso generale, in cui U può non essere nullo, ci sono alcuni recenti articoli concernenti l'approssimazione del problema del rimbalzo con problemi più regolari, l'approssimazione delle soluzioni con soluzioni classiche e lo studio dell'unicità per il problema di Cauchy [4], [6], [7], [8].

Il nostro scopo è cercare le soluzioni del problema del rimbalzo che assumono assegnati valori negli istanti $t=0$ e $t=\mathrm{T}$.

Con un ragionamento elementare si può provare il

TEOREMA 1. *Supponiamo* Ω *convesso. Allora* $\forall \mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \overline{\Omega}$, $\forall k \in \mathbf{N}$ *esiste una soluzione classica* γ *del problema del rimbalzo con potenziale* U *nullo tale che*

$$\gamma(0)=\mathrm{P} \quad , \quad \gamma(\mathrm{T})=\mathrm{Q} \quad , \quad \operatorname{card}(\mathrm{C})=k .$$

Nel caso generale, in cui U può non essere nullo, abbiamo dimostrato alcuni risultati simili al Teorema 1.

TEOREMA 2. *Sia* Ω *convesso con* $\partial\Omega$ *di classe* C^2. *Supponiamo che esista* $\mathrm{E} \subset [0, \mathrm{T}]$ *tale che*

$$m(\mathrm{E})=0\,, \quad (\nabla \mathrm{U}(t, x) \mid \nu(x)) \leq 0 \qquad \forall t \in [0, \mathrm{T}]-\mathrm{E} \qquad \forall x \in \partial\Omega .$$

Allora $\forall \mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \overline{\Omega}, \forall \mathrm{L}>0$ *esiste una soluzione* γ *del problema del rimbalzo con potenziale* U *tale che*

$$\gamma(0)=\mathrm{P} \quad , \quad \gamma(\mathrm{T})=\mathrm{Q} \quad , \quad \int_0^{\mathrm{T}} |\gamma'|^2 \, dt \geq \mathrm{L} .$$

In particolare, ci sono infinite soluzioni γ *del problema del rimbalzo con potenziale* U *tali che* $\gamma(0)=\mathrm{P}$, $\gamma(\mathrm{T})=\mathrm{Q}$.

TEOREMA 3. *Sia* Ω *convesso con* $\partial\Omega$ *di classe* C^2. *Supponiamo che la curvatura gaussiana di* $\partial\Omega$ *sia strettamente positiva in ogni punto e che* U *sia in* $\mathrm{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathrm{C}^1(\overline{\Omega}))$.

Allora continua a sussistere la stessa tesi del Teorema 2.

L'idea della dimostrazione si basa su di una relazione fra soluzioni del problema del rimbalzo e geodetiche su varietà.

Se M è una sottovarietà compatta e senza bordo di $\mathbf{R}^n$ e P e Q sono due punti di M, è stato provato [9], [10] che ci sono infinite geodetiche su M congiungenti P e Q.

Intuitivamente possiamo considerare il biliardo $\overline{\Omega}$ come una « piastra » con due facce e P e Q come due punti che possono stare sulla stessa faccia o su facce opposte, associando le geodetiche su questa « piastra » alle soluzioni del problema del rimbalzo (con potenziale U nullo).

In questo modo il problema del rimbalzo viene ricondotto allo studio delle geodetiche su di una opportuna varietà. Inoltre il caso in cui U non sia nullo può essere trattato in maniera del tutto simile.

Nel tradurre questa intuizione in una dimostrazione rigorosa, poiché la « piastra » è una varietà piuttosto irregolare, conviene ricorrere ad una approssimazione con varietà più regolari, conformemente ad una idea già espressa in [1], [11], [12].

La linea della dimostrazione dei teoremi sopra enunciati che abbiamo seguito è basata sulla considerazione delle traiettorie su tali varietà soddisfacenti delle stime che assicurino l'esistenza di infinite soluzioni anche per il problema limite.

La possibilità di considerare il problema del rimbalzo come problema limite si fonda sui seguenti lemmi:

LEMMA 1. *Sia* Ω *convesso con* $\partial\Omega$ *di classe* C^2. *Supponiamo*

$$\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n : V(x) < 1\}$$

con $V : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^+$ *convessa e di classe* C^2.

Sia $S_\varepsilon = \{(x_0, x_1) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} : V(x_0) + x_1^2/\varepsilon = 1\}$ *per* $0 < \varepsilon \leq 1$.

Sia $\{\eta^\varepsilon\}_{0<\varepsilon\leq 1} \subset (H^{2,1}(0, T))^{n+1}$ *tale che*

$$\eta^\varepsilon(t) \in S_\varepsilon \qquad \forall t \in [0, T],$$

$$\eta^{\varepsilon\prime\prime} + (\nabla U(t, \eta_0^\varepsilon), 0) = (\eta^{\varepsilon\prime\prime} + (\nabla U(t, \eta_0^\varepsilon), 0) \mid \nu_\varepsilon(\eta^\varepsilon))\, \nu_\varepsilon(\eta^\varepsilon)$$

dove ν_ε *è la normale a* S_ε.

Supponiamo che esista $\eta \in (H^{1,2}(0, T))^{n+1}$ *tale che* $\eta^\varepsilon \to \eta$ *in* $(H^{1,2}(0, T))^{n+1}$ *debole per* $\varepsilon \to 0^+$.

Allora $\eta_1(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]$ *e, posto* $\gamma(t) = \eta_0(t)$, *si ha*

i) γ *lipschitziana e* $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \eta^\varepsilon = (\gamma, 0)$ *in* $(H^{1,p}(0, T))^{n+1}$ *forte per* $p < \infty$;

ii) *esiste una misura di Borel positiva* μ *su* $]0, T[$ *con*

$$\operatorname{supp} \mu \subset C' = \{t \in\,]0, T[\, : \gamma(t) \in \partial\Omega\}$$

tale che

$$\gamma'' = -\nabla U(t, \gamma) + (\nabla U(t, \gamma) \mid \nu(\gamma))\, I_{C'}\, \nu(\gamma) - \nu(\gamma)\, \mu$$

nel senso delle distribuzioni;

iii) γ *ammette derivata destra e sinistra in ogni* t *di* $]0, T[$ *e*

$$|\gamma'_+(t)| = |\gamma'_-(t)| \qquad \forall t \in\,]0, T[\,.$$

LEMMA 2. *Se valgono le ipotesi del Teorema 2, la curva* γ *del Lemma 1 è una soluzione del problema del rimbalzo con potenziale* U.

LEMMA 3. *Se valgono le ipotesi del Teorema 3, la curva* γ *del Lemma 1 è una soluzione del problema del rimbalzo con potenziale* U, *purché* $\int_0^T |\gamma'|^2 \, dt$ *sia sufficientemente grande.*

Se invece Ω non è convesso, non sappiamo se esiste in generale almeno una soluzione del problema del rimbalzo congiungente due punti assegnati.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. PORITSKY (1950) – *The billiard ball problem on a table with a convex boundary—an illustrative dynamical problem.* « Ann. Math. », *51*, 446–470.

[2] JA. G. SINAI (1970) – *Dynamical systems with elastic reflections. Ergodic properties of dispersing billiards* (Russian), « Uspehi Mat. Nauk », *25*, 141–192.

[3] M. SCHATZMAN (1978) – *A class of nonlinear differential equations of second order in time*, « Nonlinear analysis », *2*, 355–373.

[4] M. CARRIERO e E. PASCALI (1980) – *Il problema del rimbalzo unidimensionale e sue approssimazioni con penalizzazioni non convesse*, « Rend. Mat. Roma », *13*, 541–553.

[5] JA. G. SINAI (1978) – *Billiard trajectories in a polyhedral angle* (Russian), « Uspehi Mat. Nauk », *33*, 229–230.

[6] M. CARRIERO e E. PASCALI – *Uniqueness of the one-dimensional bounce problem as a generic property in* $L^1([0, T], \mathbf{R})$, to appear.

[7] G. BUTTAZZO e D. PERCIVALE – *Sull'approssimazione del problema del rimbalzo unidimensionale*, to appear su « Ricerche Mat. ».

[8] G. BUTTAZZO e D. PERCIVALE – *On the approximation of the elastic bounce problem on Riemannian manifolds*, to appear su « Jour. Diff. Equations ».

[9] J. T. SCHWARTZ (1964) – *Generalizing the Lusternik-Schnirelman theory of critical points*, « Comm. Pure Appl. Mat. », *17*, 307–315.

[10] J. P. SERRE (1951) – *Homologie singulière des espaces fibrés*, « Ann. Math. », *54*, 425–505.

[11] V. ARNOLD e A. AVEZ (1967) – *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars, Paris.

[12] V. ARNOLD (1976) – *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Editions MIR, Moscou.

[13] L. AMERIO (1976) – *Su un problema di vincoli unilaterali per l'equazione non omogenea della corda vibrante*, IAC (Ist. Appl. Calcolo « Mauro Picone ») Pubblicazioni, serie D, n. *109*, 3–11.

[14] C. CITRINI (1979) – *Discontinuous solutions of nonlinear hyperbolic equation with unilateral constraints*, « Manuscripta Mat. », *29*, 323–352.