Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Sergio Bressan

Sul decadimento delle onde di accelerazione in un fluido non viscoso entro una teoria termodinamica non-stazionaria

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **72** (1982), n.6, p. 347–351.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1982_8_72_6_347_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1982.

Fisica matematica. — *Sul decadimento delle onde di accelerazione in un fluido non viscoso entro una teoria termodinamica non–stazionaria* (*). Nota I di SERGIO BRESSAN (**), presentata (***) dal Socio G. GRIOLI.

SUMMARY. — In according to a recent thermodynamic theory proposed by G. Grioli, we consider the growth of acceleration waves in a non viscous fluid.

We determine the solutions for the growth of a plane or spherical wave advancing into the fluid in mechanical but not in thermal equilibrium.

INTRODUZIONE

Coleman, Gurtin ed altri (vedi [1], [2], [3], [4] e [5]) hanno studiato l'evoluzione delle onde di accelerazione nei materiali con memoria. In tali lavori gli autori trattano, tra l'altro, l'influenza termodinamica sull'evoluzione di un'onda di accelerazione unidimensionale e ricavano le equazioni differenziali che reggono il decadimento dell'ampiezza di tali onde nei conduttori definiti (ossia pei quali la derivata del flusso di calore rispetto al gradiente della temperatura è strettamente negativo) e nei non conduttori (per i quali è nullo il flusso di calore). Essi trovano le soluzioni di queste equazioni sia nel caso di conduttori definiti in equilibrio con « strain » omogeneo e a temperatura costante e uniforme, sia nel caso di non conduttori in equilibrio con « strain » omogeneo e ad entropia uniforme e costante.

In un suo articolo, Chen, [6], tratta la propagazione e l'evoluzione dell'ampiezza per onde di accelerazione in un corpo isotropo che obbedisca alla teoria generale della termoelasticità compatibile colla disuguaglianza di Clausius–Duhem. Esaminate le proprietà generali di onde di accelerazione nei conduttori definiti e nei non–conduttori e le equazioni di evoluzione delle ampiezze di tali onde, l'autore ottiene soluzioni di queste equazioni nelle seguenti ipotesi: *a*) per un conduttore definito in equilibrio in uno strato di « strain » omogeneo a temperatura uniforme e costante; *b*) per un non–conduttore in equilibrio in uno stato di « strain » omogeneo a entropia uniforme e costante.

T. W. Wright [7] considera l'evoluzione delle onde di accelerazione nei materiali elastici col metodo classico delle caratteristiche e delle bicaratteristiche soffermandosi in particolare sul sistema alle derivate parziali lineare ed iper-

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M.

(**) Indirizzo dell'autore: Seminario Matematico dell'Università, via Belzoni 7, Padova.

(***) Nella seduta del 25 giugno 1982.

bolico relativo al trasporto di tali onde. Egli si limita all'aspetto puramente meccanico del problema.

Si può constatare che nei suddetti lavori vengono presentate alcune soluzioni delle equazioni di evoluzione, tutte riguardanti o il caso puramente meccanico o quello termomeccanico stazionario (il flusso di calore $\boldsymbol{q}$ è infatti sempre supposto nullo). Inoltre tutte queste pubblicazioni sull'evoluzione delle onde di accelerazione sono formulate entro la termodinamica ordinaria (stazionaria).

Nel presente lavoro si studia, entro la termodinamica classica non–stazionaria, l'evoluzione di una generica onda termomeccanica di accelerazione Σ_t (di intensità anche finita), propagantesi in un fluido non viscoso in connessione con uno stato, S_e che è di equilibrio dal punto di vista meccanico ma non necessariamente dal punto di vista termodinamico; ossia nel senso che Σ_t invade una regione in cui il fluido è in uno stato S_e.

Più precisamente mi riferisco alla teoria termomeccanica proposta da G. Grioli in [8], [9] per evitare il paradosso della propagazione con velocità infinita, e, anzi, a una sua certa generalizzazione – inclusa come caso particolare in [11] – in modo da evitare che, per un fissato materiale, quando $\boldsymbol{q}$ sia sufficientemente grande, si possano avere velocità di propagazione per Σ_t superiori a valori arbitrariamente prefissati (per esempio maggiori della velocità della luce). Nella Parte I^a scrivo le equazioni di compatibilità per il propagarsi di un'onda di accelerazione. Nella Parte II^a, supposto che Σ_t sia connessa col detto stato S_e, ricavo le equazioni differenziali che reggono l'evoluzione delle ampiezze di Σ_t nei casi piano e sferico e ne determino le soluzioni.

§ 1. Preliminari

Sia $\mathscr{C}$ un continuo in movimento rispetto ad uno spazio inerziale S_3. Riferisco le configurazioni, attuale C e di riferimento C*, di esso ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Siano x^r $(r = 1, 2, 3)$ le coordinate del punto generico di $\mathscr{C}$ nella configurazione attuale e X^L $(L = 1, 2, 3)$ quelle relative alla configurazione di riferimento. Se il continuo è un fluido non viscoso, le equazioni dinamiche si possono scrivere:

$$\text{(I.1)} \qquad \begin{cases} \operatorname{grad}_P p = \rho\,(\mathbf{F} - \dot{\boldsymbol{v}}) \\ \dot{\rho} + \rho \operatorname{div}_P \boldsymbol{v} = 0 \end{cases}$$

ove ρ è la densità nella configurazione attuale, $\mathbf{F}$ la forza specifica (di massa) e p la pressione.

Dette inoltre $\eta = \eta(x, t)$ l'entropia specifica, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(x, t)$ il flusso di calore e $T = T(x, t)$ la temperatura assoluta nel punto x all'istante t, il secondo principio della termodinamica implica la nota relazione:

$$\text{(I.2)} \qquad T\rho\dot{\eta} + \operatorname{div}_P \boldsymbol{q} \geq 0 .$$

Per quanto riguarda il legame tra il flusso di calore e la temperatura, al posto della classica relazione di Fourier, associo alle precedenti equazioni quella costitutiva, più generale, proposta da G. Grioli (vedi [8]):

$$z\dot{\boldsymbol{q}} + (1 - z\dot{\mathrm{L}}\,\mathrm{L}^{-1})\,\boldsymbol{q} + \mathrm{L}\,\mathrm{grad}_{\mathrm{P}}\,\mathrm{T} = 0 \tag{I.3}$$

ove L è in generale un operatore lineare funzione della deformazione e della temperatura (nelle nostre ipotesi di fluido non viscoso L si riduce ad un semplice coefficiente), e z è una funzione reale, positiva e continua opportuna degli argomenti ρ, T e $\boldsymbol{q}$. In realtà, l'equazione costitutiva proposta da G. Grioli è una relazione integrale che caratterizza il flusso di calore che soddisfa così l'equazione (I.3) in cui z è però una costante positiva opportuna. Ritenerla una funzione da un lato non complica quanto esporrò, dall'altro, oltre che rendere la teoria più generale, ha il vantaggio detto nell'introduzione. Assumeremo quindi la (I.3) come equazione costitutiva.

Suppongo inoltre che si tratti di un continuo a trasformazioni reversibili. La (I.2) vale allora come uguaglianza e inoltre, detto $\alpha_{\mathrm{L}}^{r}\ (= \partial x^r/\partial X^{\mathrm{L}})$ il gradiente di posizione, w l'energia interna specifica, $\mathscr{F}$ l'energia libera specifica, valgono le seguenti relazioni costitutive:

$$\left\{\begin{aligned} &\mathscr{F} = w - \mathrm{T}\eta\,,\\ &\mathrm{T} = \frac{\partial w\,(x\,,\,\alpha\,,\,\eta)}{\partial \eta}\,. \end{aligned}\right. \tag{I.4}$$

È noto che la $(\mathrm{I.4})_2$ può invertirsi nel senso che è possibile scrivere:

$$\eta = \eta\,(x\,,\,\alpha\,,\,\mathrm{T}) = -\frac{\partial\mathscr{F}\,(x\,,\,\alpha\,,\,\mathrm{T})}{\partial\mathrm{T}} \tag{I.5}$$

per cui, data una qualunque funzione $f(x\,,\,\alpha\,,\,\eta)$ si può scrivere:

$$\hat{f}\,(x\,,\,\alpha\,,\,\mathrm{T}) = f\,(x\,,\,\alpha\,,\,\eta)\,;$$

ossia come variabile termodinamica si può scegliere tra T ed η.

Trattandosi di un fluido non viscoso è noto, inoltre, che le variabili geometrico–cinematiche si riducono allo jacobiano della trasformazione che muta lo stato iniziale in quello attuale. Anzi, questo può essere sostituito dalla densità ρ. In base a ciò e alla (I.5) si ha:

$$\dot{\eta} = -\frac{\partial^2\mathscr{F}}{\partial\mathrm{T}\,\partial\rho}\,\dot{\rho} - \frac{\partial^2\mathscr{F}}{\partial\mathrm{T}^2}\,\dot{\mathrm{T}}\,. \tag{I.6}$$

È poi noto che anche in termodinamica non–stazionaria, per fluidi non viscosi, il secondo principio (I.2) vale come eguaglianza – vedi ad esempio [11]. –

Allora, per (I.6) la (I.2) si scrive:

$$c\dot{\mathrm{T}} - \rho \mathrm{T} \frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial \mathrm{T}\, \partial \rho} \dot{\rho} + \mathrm{div}_{\mathrm{P}}\, \boldsymbol{q} = 0 \tag{I.7}$$

ove si è posto $c = -\rho \mathrm{T}\, \partial^2 \mathscr{F}/\partial \mathrm{T}^2$ (calore specifico a volume costante).

Si può notoriamente scrivere:

$$p = \rho^2 \frac{\partial w}{\partial \rho} = f(\rho, \mathrm{T}),$$

da cui:

$$\mathrm{grad}_{\mathrm{P}}\, p = \frac{\partial f}{\partial \rho} \mathrm{grad}_{\mathrm{P}}\, \rho + \frac{\partial f}{\partial \mathrm{T}} \mathrm{grad}_{\mathrm{P}}\, \mathrm{T}. \tag{I.8}$$

Il sistema (I.1), (I.2) e (I.3), tenendo conto di (I.7) e (I.8), si scrive:

$$\left\{\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial \rho} \mathrm{grad}_{\mathrm{P}}\, \rho + \frac{\partial f}{\partial \mathrm{T}} \mathrm{grad}_{\mathrm{P}}\, \mathrm{T} = \rho\, (\mathbf{F}^{(e)} - \dot{\boldsymbol{v}}) \\ & \dot{\rho} + \rho\, \mathrm{div}_{\mathrm{P}}\, \boldsymbol{v} = 0 \\ & c\dot{\mathrm{T}} - \rho \mathrm{T} \frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial \mathrm{T}\, \partial \rho} \dot{\rho} + \mathrm{div}_{\mathrm{P}}\, \boldsymbol{q} = 0 \\ & z\dot{\boldsymbol{q}} + (1 - z\dot{\mathrm{L}}\, \mathrm{L}^{-1})\, \boldsymbol{q} + \mathrm{L}\, \mathrm{grad}_{\mathrm{P}}\, \mathrm{T} = 0\,. \end{aligned}\right. \tag{I.9}$$

§ 2. Condizioni di compatibilità per un'onda di accelerazione

Considero le seguenti ipotesi: *a*) ρ, T, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{v}$ sono continui ovunque sono definiti; *b*) le loro derivate prime sono continue ovunque, ma con discontinuità di prima specie nell'attraversamento della superfice mobile $\Sigma(x, t) = 0$.

Inoltre chiamo γ, $\boldsymbol{\lambda}$, α, $\boldsymbol{\tau}$ i parametri delle discontinuità delle derivate prime di ρ, $\boldsymbol{v}$, T, e $\boldsymbol{q}$ rispettivamente. Ossia pongo:

$$\begin{aligned} & [\dot{\rho}] = -\gamma \mathrm{V}^*; \quad [\mathrm{grad}_{\mathrm{P}}] = \gamma \boldsymbol{n}; \quad [\dot{\boldsymbol{v}}] = -\boldsymbol{\lambda} \mathrm{V}^*; \quad [\mathrm{div}_{\mathrm{P}}\, \boldsymbol{v}] = \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{n}; \\ & [\dot{\mathrm{T}}] = -\alpha \mathrm{V}^*; \quad [\mathrm{grad}_{\mathrm{P}}\, \mathrm{T}] = \alpha \boldsymbol{n}; \quad [\dot{\boldsymbol{q}}] = -\boldsymbol{\tau} \mathrm{V}^*; \quad [\mathrm{div}_{\mathrm{P}}\, \boldsymbol{q}] = \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{n}, \end{aligned} \tag{I.10}$$

ove la parentesi quadra indica il salto dell'argomento attraverso Σ, V* è la velocità di propagazione, $\boldsymbol{n}$ il versore della normale a $\Sigma(x, t) = 0$ orientata verso la $\Sigma(x + \mathrm{d}x, t + \mathrm{d}t) = 0$.

In base alle (I.10), le (I.9) comportano sulla superfice le:

$$
\text{(I.11)}\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial f}{\partial \rho}\,\gamma n_i + \dfrac{\partial f}{\partial \mathrm{T}}\,\alpha n_i - \rho\lambda_i\,\mathrm{V}^* = 0 & (i=1,2,3)\\[2mm]
\gamma\mathrm{V}^* - \rho\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{n} = 0 & \\[2mm]
-c\alpha\mathrm{V}^* + \rho\mathrm{T}\,\dfrac{\partial^2\mathscr{F}}{\partial\mathrm{T}\,\partial\rho}\,\gamma\mathrm{V}^* + \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n} = 0 & \\[2mm]
-z\tau_i\,\mathrm{V}^* + z\mathrm{L}^{-1}\left(\dfrac{\partial\mathrm{L}}{\partial\mathrm{T}}\,\alpha\mathrm{V}^* + \dfrac{\partial\mathrm{L}}{\partial\rho}\,\gamma\mathrm{V}^*\right) q_i + \mathrm{L}\alpha n_i = 0 & \\
 & (i=1,2,3)\,.
\end{cases}
$$

Per semplicità intendo, ad esempio, $f_\rho = \partial f/\partial\rho$ ecc., e pongo $\xi_0 = \partial\Sigma/\partial t$ e $\xi_i = \partial\Sigma/\partial x^i$ $(i=1,2,3)$. Ricordo inoltre che risulta $\xi_i/\xi_0 = -n_i/\mathrm{V}^*$ $(i=1,2,3)$, per cui le (I.11) si scrivono:

$$
\text{(I.12)}\quad
\begin{cases}
f_\rho\,\gamma\xi_i + f_\mathrm{T}\,\alpha\xi_i + \rho\lambda_i\,\xi_0 = 0 & (i=1,2,3)\\
\gamma\xi_0 + \rho\lambda_i\,\xi_i = 0 & \\
(c\alpha - \rho\mathrm{T}\,\mathscr{F}_{\mathrm{T}\rho}\,\gamma)\,\xi_0 + \tau_i\,\xi_i = 0 & \\
[z\tau_i - z\mathrm{L}^{-1}(\mathrm{L}_\mathrm{T}\,\alpha + \mathrm{L}_\rho\,\gamma)\,q_i]\,\xi_0 + \mathrm{L}\alpha\xi_i = 0 & (i=1,2,3)\,.
\end{cases}
$$

BIBLIOGRAFIA

[1] B. D. COLEMAN, M. E. GURTIN e I. HERRERA R. (1965) – *The velocity of onedimensional*..., « Arch. Rational Mech. Anal. », *19*, pp. 1–19.

[2] B. D. COLEMAN e M. E. GURTIN (1965) – *On the growth and decay*..., « Arch. Rational Mech. Anal. », *19*, n. 4.

[3] B. D. COLEMAN e M. E. GURTIN (1965) – *Thermodynamics Influences on the growth*..., « Arch. Rational Mech. Anal. », *19*, pp. 266–298.

[4] B. D. COLEMAN e M. E. GURTIN (1965) – *Thermodynamics and the velocity of*...., « Arch. Rational Mech. Anal. », *19*, pp. 317–338.

[5] B. D. COLEMAN, J. M. GREENBERG e M. E. GURTIN (1966) – *On the Amplitude of acceleration*..., « Arch. Rational Mech. Anal. », *22*, pp. 333–335.

[6] P. J. CHEN – *Thermodynamic influences on the propagation and the growth*..., « Arch. Rational Mech. Anal. », *31*.

[7] T. W. WRIGHT *Acceleration Waves in simple elastic materials*, « Arch. Rational Mech. Anal. », *50*, 1972.

[8] G. GRIOLI (1979) – *Sulla propagazione di onde termomeccaniche nei continui*, Nota I « Rend. Acc. Naz. Lincei », LXVII, pp. 332–339.

[9] G. GRIOLI (1979) – *Sulla propagazione di onde termomeccaniche nei continui*, Nota II « Rend. Acc. Naz. Lincei », LXVII, pp. 426–432.

[10] COURANT–HILBERT (1962) – « Meth. of Math. Phis. », Vol. II.

[11] A. BRESSAN – In corso di stampa sulle Mem. Acc. Naz. Lincei (presentata nel 1981).