ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

AROLDO GORETTI

Alcune osservazioni sul linguaggio $L(Q_1)$

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 72 (1982), n.3, p. 109–114.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1982_8_72_3_109_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 13 marzo 1982

Presiede il Presidente della Classe GIUSEPPE MONTALENTI

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Logica matematica. — *Alcune osservazioni sul linguaggio $L(Q_1)$.*
Nota di AROLDO GORETTI, presentata (*) dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — An existence theorem for 1-atomic standard models of $L_{\omega\omega}(Q_1)$ (more weak than usual "atomic models") and applications of $L_{\omega\omega}(Q_1)$ to $L_{\omega\omega}$ are the results of this note.

0. Dopo aver introdotto il concetto di modello 1-atomico (si è indebolita la definizione usuale di modello atomico) abbiamo provato un teorema di esistenza per modelli standard di $L_{\omega\omega}(Q_1)$ 1-atomici. Inoltre si è visto come alcuni risultati di $L_{\omega\omega}(Q_1)$ possano essere utilizzati in $L_{\omega\omega}$.

1. Ricordiamo che il linguaggio $L_{\omega\omega}(Q_1)$, brevemente: $L(Q_1)$, è ottenuto aggiungendo alla logica del primo ordine $L_{\omega\omega}$, brevemente L , un nuovo quantificatore $(Q_1 x)$ che, nei modelli (standard), sarà interpretato come « esiste una infinità più che numerabile di x ».

Le definizioni di formula atomica ed enunciato di $L(Q_1)$ sono date nel modo usuale. Si definisce modello debole di $L(Q_1)$ una coppia $(\mathfrak{A}, q)$ dove $\mathfrak{A}$ è in modello di L e $q \subset \mathfrak{P}(A)$ (= insieme delle parti). La nozione di n -upla $a_1, \dots, a_n \in A$ soddisfacente una $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ di $L(Q_1)$ in $(\mathfrak{A}, q)$ (scriveremo $(\mathfrak{A}, q) \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$) è definita nel modo usuale (per induzione sulla complessità di φ). La clausola $(Q_1 x)$ è data da:

$$(\mathfrak{A}, q) \models (Q_1 x) \varphi(x) \quad \text{sse} \quad A\varphi \in q, \quad \text{dove} \quad A\varphi = \{a \in A : (\mathfrak{A}, q) \models \varphi[a]\}.$$

(*) Nella seduta del 13 marzo 1982.

Diremo che $(\mathfrak{A}, q)$ è un modello standard, e scriveremo semplicemente $\mathfrak{A}$, se $|A| > \aleph_0$ e se $q = \{\text{sottoinsiemi di } A \text{ più che numerabili}\}$. Quindi

$$\mathfrak{A} \models (\mathbf{Q}_1 x) \varphi(x) \quad \text{sse} \quad |A_\varphi| > \aleph_0.$$

2. In [1] (p. 24) si dimostra il teorema di completezza per $L(\mathbf{Q}_1)$ con il seguente schema di assiomi:

- Ax 0. Tutti gli schemi di assiomi di L
- $\mathbf{Q}_1$ — Ax 1. $\neg (\mathbf{Q}_1 x) (x = y \vee x = z)$
- $\mathbf{Q}_1$ — Ax 2. $(\forall x) (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\mathbf{Q}_1 x) \varphi \rightarrow (\mathbf{Q}_1 x) \psi)$
- $\mathbf{Q}_1$ — Ax 3. $(\mathbf{Q}_1 x) \varphi(x \dots) \leftrightarrow (\mathbf{Q}_1 y) \psi(y \dots)$
- $\mathbf{Q}_1$ — Ax 4. $(\mathbf{Q}_1 y) (\exists x) \varphi \rightarrow (\exists x) (\mathbf{Q}_1 y) \varphi \vee (\mathbf{Q}_1 x) (\exists y) \varphi$
- $\mathbf{Q}_1$ — Ax 5. $(\mathbf{Q}_1 x) (x = x)$

dove φ e ψ sono formule di $L(\mathbf{Q}_1)$.

3. Segue facilmente dal teorema di completezza che, per ogni formula $\alpha(x)$, $\beta(x)$ di $L(\mathbf{Q}_1)$

$$\begin{aligned} &\vdash \neg (\mathbf{Q}_1 x) \alpha \rightarrow (\mathbf{Q}_1 x) \neg \alpha \\ &\vdash (\mathbf{Q}_1 x) (\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\mathbf{Q}_1 x) \alpha \vee (\mathbf{Q}_1 x) \beta \\ &\vdash (\mathbf{Q}_1 x) (\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\mathbf{Q}_1 x) \alpha \wedge (\mathbf{Q}_1 x) \beta. \end{aligned}$$

4. Sia $\Sigma(x)$ un insieme di formule di $L(\mathbf{Q}_1)$ con al più una variabile x libera. Diremo che un modello $(\mathfrak{A}, q)$ omette $\Sigma(x)$ sse $\bigcap_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma = \emptyset$.

TEOREMA ([1] p. 35). *Sia T una teoria consistente di $L(\mathbf{Q}_1)$. Sia $\Sigma(x)$ un insieme di formule di $L(\mathbf{Q}_1)$ tale che:*

- i) $T \vdash \neg (\mathbf{Q}_1 x) \sigma(x)$ per qualche $\sigma \in \Sigma$
- ii) se $\varphi(x)$ è consistente con T allora esiste $\sigma \in \Sigma$ tale che anche $(\varphi \wedge \neg \sigma)$ lo è. Allora T ha un modello (standard) che omette $\Sigma(x)$.

Osservazione. L'ipotesi ii) da sola, in L, è necessaria e sufficiente ([2] p. 79). L'ipotesi i) in $L(\mathbf{Q}_1)$ è necessaria, come si vede con un facile controesempio.

5. Le definizioni che seguono ora sono le stesse di L tranne che invece di considerare formule $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ con al più n variabili libere considereremo formule $\alpha(x)$ con una variabile libera.

Sia T una teoria completa di $L(\mathbf{Q}_1)$. Diremo che una formula $\varphi(x)$ di $L(\mathbf{Q}_1)$ è completa in T sse per ogni altra formula $\psi(x)$ di $L(\mathbf{Q}_1)$ vale esattamente una delle due: $T \vdash (\forall x) (\varphi \rightarrow \psi)$ oppure $T \vdash (\forall x) (\varphi \rightarrow \neg \psi)$ (in particolare $T \vdash (\exists x) \varphi(x)$). Diremo che una formula $\theta(x)$ è completabile in T sse esiste

$\varphi(x)$ completa tale che $T \vdash (\forall x)(\varphi \rightarrow \theta)$. Diremo inoltre che una teoria T (completa) è 1-atomica sse da $T \vdash (\exists x)\theta(x)$ segue che $\theta(x)$ è completabile in T . Infine diremo che $\mathfrak{A}$ è un modello 1-atomico sse per ogni $a \in A$ esiste $\varphi(x)$ completa in $Th(\mathfrak{A})$ tale che $\mathfrak{A} \models \varphi[a]$.

6. *Proprietà.* Se $\mathfrak{A}$ è un modello 1-atomico (standard) di $L(Q_1)$ allora :

i) per qualche formula completa $\varphi(x)$ di $Th(\mathfrak{A})$ è $\mathfrak{A} \models (Q_1 x) \varphi(x)$

ii) qualunque siano $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ formule di $L(Q_1)$

$$(^\circ) \quad Th(\mathfrak{A}) \vdash \neg [(Q_1 x) \alpha \wedge (Q_1 x) \neg \alpha]$$

$$(^{\circ\circ}) \quad Th(\mathfrak{A}) \vdash \neg (Q_1 x) \alpha \longleftrightarrow (Q_1 x) \neg \alpha$$

$$(^{\circ\circ\circ}) \quad Th(\mathfrak{A}) \vdash (Q_1 x) \alpha \wedge (Q_1 x) \beta \longleftrightarrow (Q_1 x) (\alpha \wedge \beta).$$

Dimostrazione. i) Ogni elemento di $\mathfrak{A}$ deve soddisfare una formula completa e $|A| > \aleph_0$.

ii) ($^\circ$) Si supponga per assurdo che esista una formula $\theta(x)$ tale che $Th(\mathfrak{A}) \vdash (Q_1 x) \theta$ e $Th(\mathfrak{A}) \vdash (Q_1 x) \neg \theta$. Sia $\varphi(x)$ una formula completa di $Th(\mathfrak{A})$ tale che $\mathfrak{A} \models (Q_1 x) \varphi(x)$ come visto in i). Per definizione di formula completa deve valere esattamente una delle due: $Th(\mathfrak{A}) \vdash (\forall x)(\varphi \rightarrow \theta)$ oppure $Th(\mathfrak{A}) \vdash (\forall x)(\varphi \rightarrow \neg \theta)$ onde, applicando il $Q_1 - Ax 2$, $Th(\mathfrak{A}) \vdash (Q_1 x) \varphi \rightarrow (Q_1 x) \theta$ oppure $Th(\mathfrak{A}) \vdash (Q_1 x) \varphi \rightarrow (Q_1 x) \neg \theta$ e poichè $\mathfrak{A} \models (Q_1 x) \varphi(x)$ si ha l'assurdo.

($^{\circ\circ}$) Inoltre si è osservato in 3 che $\vdash \neg (Q_1 x) \alpha \rightarrow (Q_1 x) \neg \alpha$. Il viceversa segue da ($^\circ$).

($^{\circ\circ\circ}$) Infine, sempre da 3, si ha

$$\vdash \neg (Q_1 x) (\neg \alpha \vee \neg \beta) \longleftrightarrow \neg ((Q_1 x) \neg \alpha \vee (Q_1 x) \neg \beta).$$

Ma, per ($^{\circ\circ}$),

$$Th(\mathfrak{A}) \vdash \neg (Q_1 x) (\neg \alpha \vee \neg \beta) \longleftrightarrow (Q_1 x) (\alpha \wedge \beta)$$

e

$$Th(\mathfrak{A}) \vdash \neg ((Q_1 x) \neg \alpha \vee (Q_1 x) \neg \beta) \longleftrightarrow (Q_1 x) \alpha \wedge (Q_1 x) \beta. \quad \square$$

7. **TEOREMA** (Esistenza di modelli 1-atomici standard di $L(Q_1)$). Sia T una teoria completa di $L(Q_1)$. T ha un modello 1-atomico sse T è 1-atomica e, per qualche $\varphi(x)$ completa, $T \vdash \neg (Q_1 x) \neg \varphi(x)$.

Dimostrazione. La condizione necessaria segue da [2] p. 94 e dalla proprietà vista sopra. Viceversa, posto $\Sigma(x) = \{\neg \varphi_1(x), \dots, \neg \varphi_n(x), \dots\}$ con $\varphi_i(x)$ formule complete di T , la condizione sufficiente segue dal teorema visto in 4. $\square$

8. Diremo che $(\mathfrak{B}, r)$ è un'estensione elementare di $(\mathfrak{A}, q)$ e scriveremo $(\mathfrak{A}, q) < (\mathfrak{B}, r)$ sse $A \subset B$ e per ogni formula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ di $L(Q_1)$ si ha $(\mathfrak{A}, q) \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ sse $(\mathfrak{B}, r) \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ per ogni $a_1, \dots, a_n \in A$.

COROLLARIO ([1] p. 36). Sia $(\mathfrak{A}, q)$ un modello debole numerabile. Supponiamo che $(\mathfrak{A}, q)$ abbia un'estensione elementare $(\mathfrak{B}, r)$ tale che per tutte le formule $\varphi(x)$ di $L_A(Q_1) = L(Q_1) \cup \{c_a\}_{a \in A}$, $(\mathfrak{A}_A, q) \models (Q_1 x) \varphi(x)$ sse $\exists b \in B \setminus A$ tale che $(\mathfrak{B}_A, r) \models \varphi[b]$. Allora:

- i) Tutti gli assiomi di $L(Q_1)$ valgono in $(\mathfrak{A}, q)$
- ii) $(\mathfrak{A}, q)$ ha un'estensione elementare standard $\mathfrak{C}$
- iii) Se $(\mathfrak{A}, q)$ omette $\Sigma(x)$ e $(\mathfrak{A}, q) \models \neg (Q_1 x) \sigma(x)$ per qualche $\sigma(x) \in \Sigma$, allora $\mathfrak{C}$ può essere scelto in modo che ometta $\Sigma(x)$.

9. TEOREMA. Sia $\mathfrak{A}$ un modello di L contabile e sia $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ con $B \neq A$. Allora è possibile definire $q \subset \mathfrak{P}(A)$ ed $r \subset \mathfrak{P}(B)$ tali che $(\mathfrak{A}, q)$ e $(\mathfrak{B}, r)$ siano modelli deboli di $L(Q_1)$ soddisfacenti le ipotesi del corollario in 8.

Dimostrazione. Definiamo q nel seguente modo

$$X \in q \quad \text{sse} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{esiste una formula di } L_A \varphi(x) \text{ tale che} \\ X = \{a \in A \mid \mathfrak{A}_A \models \varphi[a]\} \text{ e inoltre} \\ \exists b \in B \setminus A \text{ tale che } \mathfrak{B}_A \models \varphi[b] \end{array} \right.$$

$q \neq \emptyset$ in quanto $A \in q$. Ovviamente se $\varphi(x)$ è una formula di L_A si ha

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A}, q) \models (Q_1 x) \varphi(x) & \quad \text{sse} \quad \exists b \in B \setminus A \quad \text{tale che} \quad \mathfrak{B}_A \models \varphi[b] \\ (\mathfrak{A}, q) \models \neg (Q_1 x) \varphi(x) & \quad \text{sse} \quad \forall b \in B \setminus A \quad \text{si ha} \quad \mathfrak{B}_A \models \neg \varphi[b]. \end{aligned}$$

Definiamo ora $(\mathfrak{B}, r)$ nel seguente modo:

- i) Se α è un enunciato di L_B diremo $(\mathfrak{B}_B, r) \models \alpha$ sse $\mathfrak{B}_B \models \alpha$
- ii) Se α è un enunciato di $L_A(Q_1)$ diremo $(\mathfrak{B}_A, r) \models \alpha$ sse $(\mathfrak{A}_A, r) \models \alpha$
- iii) Infine se α è un enunciato di $L_B(Q_1)$ definiamo $(\mathfrak{B}_B, r) \models \alpha$ per induzione sulla complessità di α con la clausola $(\mathfrak{B}_B, r) \models (Q_1 x) \psi(x)$ sse $\exists b \in B \setminus A$ tale che $(\mathfrak{B}_B, r) \models \psi[b]$, ove $\psi(x)$ è una formula di $L_B(Q_1)$.

È $(\mathfrak{A}, q) < (\mathfrak{B}, r)$. Resta da vedere che

$$(*) \quad (\mathfrak{A}_A, q) \models (Q_1 x) \varphi(x) \quad \text{sse} \quad \exists b \in B \setminus A \quad \text{tale che} \quad (\mathfrak{B}_A, r) \models \varphi[b]$$

per tutte le formule $\varphi(x)$ di $L_A(Q_1)$.

Se $\varphi(x)$ è una formula di L_A , la (*) segue dalla definizione di q e da i). Altrimenti si ha $(\mathfrak{A}_A, q) \models (Q_1 x) \varphi(x)$ sse $X = \{a \in A \mid (\mathfrak{A}_A, s) \models \varphi[a]\} \in q$. Ma, se $X \in q$, esiste $\alpha(x)$ di L_A tale che $X = \{a \in A \mid \mathfrak{A}_A \models \alpha[a]\} = A_\alpha$ ed $\exists b \in B \setminus A$ tale che $\mathfrak{B}_A \models \alpha[b]$ e infine $(\mathfrak{A}_A, q) \models (Q_1 x) \alpha(x)$. Poichè $X = A$ ne segue $(\mathfrak{A}_A, q) \models (\forall x) (\varphi(x) \leftrightarrow \alpha(x))$ ed essendo $(\mathfrak{A}, q) < (\mathfrak{B}, r)$ è anche

$(\mathfrak{B}_A, r) = (\forall x)(\varphi(x) \leftrightarrow \alpha(x))$. Pertanto $(\mathfrak{B}_A, r) = \varphi[b]$ con $b \in B \setminus A$. Viceversa supponiamo che $\exists b \in B \setminus A$ tale che $(\mathfrak{B}_A, r) = \varphi[b]$ con $\varphi(x)$ formula di $L_A(Q_1)$. Da iii) segue $(\mathfrak{B}_B, r) = (Q_1 x)\varphi(x)$ e poichè $\varphi(x)$ è una formula di $L_A(Q_1)$ ne segue $(\mathfrak{B}_A, r) = (Q_1 x)\varphi(x)$ da cui, ii), $(\mathfrak{A}_A, q) = (Q_1 x)\varphi(x)$. $\square$

COROLLARIO. *Sia $\mathfrak{A}$ un modello contabile per L e sia $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ con $B \neq A$ allora esiste $\mathfrak{C} > \mathfrak{A}$ con C più che numerabile tale che:*

i) *se $\varphi(x)$ è una formula di L_A e $\mathfrak{B}_A = \varphi[b]$ con $b \in B \setminus A$ allora esiste una infinità più che numerabile di $c \in C$ tali che $\mathfrak{C} = \varphi[c]$*

ii) *se $\varphi(x)$ è una formula di L_A e $\mathfrak{B}_A = \neg \varphi[b] \forall b \in B \setminus A$ allora sono contabili i $c \in C$ tali che $\mathfrak{C} = \varphi[c]$*

Dimostrazione. Segue dalla dimostrazione del teorema precedente e dal corollario in 8. $\square$

10. In particolare, considerato il seguente problema aperto (di L): « Sia $\mathfrak{A}$ un modello contabile per L, sia $\Sigma(x)$ un insieme di formule di L e $\mathfrak{A}$ ometta $\Sigma(x)$. Supponiamo ancora che $\mathfrak{A}$ abbia un'estensione elementare propria che ometta $\Sigma(x)$. $\mathfrak{A}$ ha un'estensione elementare più che numerabile che omette $\Sigma(x)$? » possiamo dare la seguente risposta parziale:

COROLLARIO. *Sia $\mathfrak{A}$ un modello contabile per L. Sia $\Sigma(x)$ un insieme di formule di L. $\mathfrak{A}$ ometta $\Sigma(x)$ e sia $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ con $B \neq A$. Se esiste $\sigma \in \Sigma$ tale che $\mathfrak{B} = \neg \sigma[b] \forall b \in B \setminus A$, allora esiste $\mathfrak{C} > \mathfrak{A}$ con C più che numerabile che omette $\Sigma(x)$.*

Dimostrazione. In base al teorema in 9, $(\mathfrak{A}, q)$ omette $\Sigma(x)$ e inoltre $(\mathfrak{A}, q) = \neg (Q_1 x)\sigma(x)$. Dal corollario in 8 segue la tesi. (Si osservi che anche $\mathfrak{B}[(\mathfrak{B}, r)]$ omette $\Sigma(x)$).

Nota. L'ipotesi che esista $\mathfrak{B}$ ($B \neq A$) che omette $\Sigma(x)$ è necessaria.

Controesempio: « $\Sigma(x) = \{x \neq c_n\}$ con $c_n \in C$, insieme numerabile di costanti ».

11. Altre risposte parziali a tale problema di L vengono fornite da L (Q₁) nel seguente modo:

LEMMA. *Siano $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$, modelli di L. Sia $\mathfrak{B}$ più che numerabile. Allora esiste $q \in \mathfrak{B}(A)$ tale che $(\mathfrak{A}, q)$ è un modello debole di L (Q₁) verificante i Q₁-Assiomi e inoltre $(\mathfrak{A}, q) < \mathfrak{B}$ in L (Q₁).*

Dimostrazione. Poichè ogni modello più che numerabile di L è un modello standard di L (Q₁) (verificante i Q₁-Assiomi) basta porre, per ogni enunciato α di $L_A(Q_1)$: $(\mathfrak{A}, q) = \alpha$ sse $\mathfrak{B} = \alpha$

COROLLARIO. *Sia $\mathfrak{A}$ un modello di L che omette $\Sigma(x)$. Se tra le estensioni elementari più che numerabili di $\mathfrak{A}$ ve ne è una $\mathfrak{B}$ tale che $B_\sigma = \{b \in B \mid \mathfrak{B} = \sigma[b]\}$*

è contabile, per qualche $\sigma \in \Sigma$, allora esiste $\mathfrak{C} > \mathfrak{A}$ più che numerabile che omette $\Sigma(x)$.

Dimostrazione. Dal lemma si ottiene $(\mathfrak{A}, q) \models \neg (Q_1 x) \sigma(x)$ per qualche $\sigma \in \Sigma$. Inoltre poichè $(\mathfrak{A}, q)$ verifica i Q_1 -Assiomi e omette $\Sigma(x)$ allora $Th(\mathfrak{A}, q)$ soddisfa le ipotesi del teorema in 4 (per la condizione ii) di tale teorema cfr. [2] p. 79).

Nota. $\mathfrak{B}$ non necessariamente omette $\Sigma(x)$.

COROLLARIO. Sia $\mathfrak{A}$ un modello infinito numerabile di L che omette $\Sigma(x)$. Se $A\sigma = \{a \in A \mid \mathfrak{A} \models \sigma[a]\}$ è finito, per qualche $\sigma \in \Sigma$, allora esiste $\mathfrak{C} > \mathfrak{A}$ più che numerabile che omette $\Sigma(x)$.

Dimostrazione. Posto $q_\infty = \{\text{sottoinsiemi infiniti di } A\}$ si osservi che $(\mathfrak{A}, q_\infty)$ è un modello debole verificante i Q_1 -Assiomi e inoltre $(\mathfrak{A}, q_\infty) \models \neg (Q_1 x) \sigma(x)$ per qualche $\sigma \in \Sigma$.

TESTI CITATI

- [1] H. J. KEISLER (1970) - *Logic with the quantifier "there exist uncountably many"*.
« Annals of mathematical logic », 1.
[2] C. C. CHANG e H. J. KEISLER (1977) - « Model Theory », North Holland.