Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Mauro Meschiari

## Il gruppo delle isometrie di un cono aperto, convesso, regolare, omogeneo, irriducibile ed autoaggiunto

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **72** (1982), n.1, p. 29–35.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1982_8_72_1_29_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1982.

**Geometria.** — *Il gruppo delle isometrie di un cono aperto, convesso, regolare, omogeneo, irriducibile ed autoaggiunto.* Nota di MAURO MESCHIARI (*), presentata (**) dal Corrisp. E. VESENTINI.

SUMMARY. — The group of isometries of a convex irreducible homogeneous self adjoint cone is investigated.

It is proved that all elements of the connected component of the identity of the group of all isometries are linear automorphisms, and that every isometry can be extended as an holomorphic automorphism of the associated tube domain.

## 1. DEFINIZIONI E PREMESSE

(Vedi E. B. Vinberg [1], G. Gentili [2], M. A. O'Connor [3]). Sia V un cono in uno spazio vettoriale, che d'ora in avanti supporremo di dimensione finita, R. V lo diremo *aperto* se tale è nel sottospazio di R da esso generato, L (V); lo diremo *regolare* se la suo chiusura, $\overline{V}$, nella topologia canonica di spazio vettoriale, non contiene alcuna retta affine di R.

Sia $(\cdot\,,\cdot)$ un prodotto scalare definito positivo su L (V), con V cono aperto convesso regolare; diremo *cono aggiunto* di V il cono convesso aperto regolare

$$V' = \{x/x \in L(V) \quad \text{tale che} \quad (x\,,y) > 0 \quad \text{per tutti} \quad y \in \overline{V} - \{0\}\}.$$

V lo diremo *autoaggiunto* se $V = V'$ per qualche prodotto scalare definito positivo su L (V).

Siano $V_1$ un cono di $R_1$ e $V_2$ un cono di $R_2$; il cono prodotto di $V_1$ con $V_2$ è il prodotto cartesiano nella somma diretta $R_1 \oplus R_2$. Se diciamo *isomorfi* due coni fra i quali esista una applicazione biunivoca che sia la restrizione di un isomorfismo fra gli spazi vettoriali da essi generati, chiameremo *riducibile* un cono isomorfo al prodotto cartesiano di due coni di dimensione positiva, *irriducibile* un cono non riducibile.

In fine, un cono V è detto *omogeneo* se il gruppo dei suoi automorfismi, G (V), è transitivo.

Per ogni cono aperto convesso regolare V possiamo definire la funzione $C^\infty$, detta *funzione caratteristica* di V,

$$\phi(x) = \int_{V'} \exp(-(x\,,y))\,dy$$

(*) Istituto Matematico « G. Vitali », Università, Via G. Campi 213/B, 41100 Modena.

(**) Nella seduta del 9 gennaio 1982.

(ove d$y$ rappresenta la misura di Lebesgue su L (V) e V′ il cono aggiunto di V nel prodotto $(\cdot\,,\cdot)$). (E. B. Vinberg [1]). La funzione $\phi(\cdot)$ risulta positiva, illimitata nell'intorno di ogni punto di $\bar{\mathrm{V}} - \mathrm{V}$, e strettamente convessa assieme alla funzione $\log\phi(\cdot)$. Il differenziale secondo di $\log\phi(\cdot)$ definisce pertanto su V una struttura riemmaniana $\mathrm{C}^{\infty}$; struttura che risulta indipendente dal prodotto scalare scelto su L (V) e rispetto alla quale ogni isomorfismo è una isometria.

Nel presente lavoro si intende studiare la relazione fra il gruppo G (V) ed il gruppo delle isometrie, I (V), del cono aperto convesso regolare V. In M. Meschiari [4] ho dimostrato che G (V) è sempre un sottogruppo *proprio* di I (V) e, nel caso che V sia riducibile, anche la componente connessa dell'identità, $\mathrm{G}_c(\mathrm{V})$, di G (V) è un sottogruppo *proprio* di quella, $\mathrm{I}_c(\mathrm{V})$, di I (V). Qui dimostrerò che se V è un cono, che d'ora in avanti supporrò sempre convesso aperto regolare omogeneo autoaggiunto ed irriducibile, si ha

$$\mathrm{I}(\mathrm{V}) = \mathrm{G}(\mathrm{V})\,\{\text{Identità},\ \mu\}\,,$$

con $\mu$ l'isometria involutoria di V su se stesso definita da $(\mu(x)\,,y) = \partial\log\phi(y\,;x)$ ($\partial\log\phi(y\,;x)$ è la derivata in $x$, nella direzione $y$, di $\log\phi(\cdot)$). Da ciò segue che $\mathrm{G}_c(\mathrm{V}) = \mathrm{I}_c(\mathrm{V})$ e che ogni elemento di I (V) si estende ad una trasformazione olomorfa del dominio tubolare associato a V.

Una dimostrazione, del tutto indipendente, nel caso particolare dei coni sferici si trova in G. Gentili [5].

Per i particolari delle dimostrazioni rimandiamo ad altra pubblicazione.

## 2. T-algebre e coni omogenei regolari

Sia $\mathscr{A}$ un'algebra reale di dimensione finita, $\mathscr{A}$ si dice *un'algebra di matrici di rango m, a diagonale reale* e *involuzione* *, se essa è munita di un automorfismo involutorio * ed è bigraduata da $m^2$ sottospazi $\mathscr{A}_{ij}\,, i\,, j = 1\,,\cdots, m$, tali che:

| | |
|---|---|
| $(a^*)^* = a$ | per ogni $a \in \mathscr{A}$; |
| $(ab)^* = b^*\,a^*$ | per tutti gli $a\,, b \in \mathscr{A}$; |
| $\mathscr{A}_{ij}^* = \mathscr{A}_{ji}$ | per tutti gli $i\,, j = 1\,,\cdots, m$; |
| $\dim \mathscr{A}_{ii} = 1$ | per $i = 1\,,\cdots, m$; |
| $\mathscr{A}_{ij}\cdot\mathscr{A}_{jk} \subseteq \mathscr{A}_{ik}$ | per tutti $i\,, j\,, k = 1\,,\cdots, m$; |
| $\mathscr{A}_{ij}\,\mathscr{A}_{hk} = 0$ | per tutti $i\,, j\,, h\,, k = 1\,,\cdots, m$ e $j \neq h$. |

Se $\mathscr{A}$ è un'algebra di matrici a diagonale reale e di rango $m$, per tutti gli $i = 1\,,\cdots, m$, $\mathscr{A}_{ii}$ risulta una sottoalgebra di $\mathscr{A}$ canonicamente isomorfa al campo dei numeri reali.

Denotiamo con $\rho_i$ tale isomorfismo, con $e_i = \rho_i^{-1}(1)$ e con $e = \Sigma_j\, e_j$ $(j = 1\,,\cdots, m)$, per ogni $i = 1\,,\cdots, m$.

Sempre restando con le stesse ipotesi su $\mathscr{A}$, fissiamo alcune notazioni. Per ogni $a \in \mathscr{A}$ indichiamo con:

$a_{ij}, i, j = 1, \cdots, m$, l'elemento di $\mathscr{A}$ tale che $a - a_{ij} \in \Sigma_{rs} \mathscr{A}_{rs}$ $(r, s = 1, 2, \cdots, m$ e $r \neq i, s \neq j)$;

$\rho_i(a), i = 1, \cdots, m$, il numero reale $\rho_i(a_{ii})$;

$\mathrm{S}p\,(a) = \Sigma_r\, n_r\, \rho_r\,(a)$ $(r = 1, \cdots, m)$ (ove $n_r = 1 + \frac{1}{2} \Sigma_j \dim \mathscr{A}_{rj}$ $(j = 1, \cdots, m$ e $j \neq r))$;

$a^{\triangle} = \frac{1}{2} \Sigma_j\, a_{jj} + \Sigma_{rs}\, a_{rs} \quad (j, r, s = 1, \cdots, m$ ed $r < s)$;

$a_{\nabla} = a - a^{\triangle}$.

Indichiamo poi ancora con

$$\mathscr{T}(\mathscr{A}) = \Sigma_{ij}\, \mathscr{A}_{ij} \qquad (i, j = 1, \cdots, m \quad \text{e} \quad i \leq j);$$

$$\mathrm{T}(\mathscr{A}) = \{a / a \in \mathscr{T}(a) \quad \text{e} \quad \rho_1(a), \cdots, \rho_m(a) > 0\}.$$

DEFINIZIONE. *Si chiama* T*-algebra di rango m ogni algebra di matrici* $\mathscr{A}$ *di rango m, diagonale reale e involuzione* *, *tale che*:

| | |
|---|---|
| $e_i\, a = a e_j$ | *per tutti gli* $i = 1, \cdots, m$ *e* $a \in \mathscr{A}_{ij}$; |
| $\mathrm{S}p\,(ab) = \mathrm{S}p\,(ba)$ | *per tutti gli* $a, b \in \mathscr{A}$; |
| $\mathrm{S}p\,(a\,(bc)) = \mathrm{S}p\,((ab)\,c)$ | *per tutti gli* $a, b, c \in \mathscr{A}$; |
| $\mathrm{S}p\,(aa^*) > 0$ | *per tutti gli* $a \in \mathscr{A} - \{0\}$; |
| $t\,(uw) = (tu)\,w$ | *per tutti i* $t, u, w \in \mathscr{T}(\mathscr{A})$; |
| $t\,(uu^*) = (tu)\,u^*$ | *per tutti i* $t, u \in \mathscr{T}(\mathscr{A})$. |

Per ogni T–algebra $\mathscr{A}$ i due sottoinsiemi di $\mathscr{A}$ dati da

$$\mathrm{V}(\mathscr{A}) = \{aa^* / a \in \mathrm{T}(\mathscr{A})\} \quad \text{e} \quad \mathrm{V}'(\mathscr{A}) = \{a^*\, a / a \in \mathrm{T}(\mathscr{A})\},$$

sono due coni aperti convessi omogenei regolari, aggiunti rispetto al prodotto scalare dato da $(a, b) = \mathrm{S}p\,(ab^*)$, ed è $\mathrm{L}(\mathrm{V}(\mathscr{A})) = \mathrm{L}(\mathrm{V}'(\mathscr{A})) = \{x / x \in \mathscr{A}$ ed $x = x^*\}$.

Se V è un cono aperto convesso regolare ed omogeneo, esiste una T–algebra $\mathscr{A}$ tale che V è isomorfo a $\mathrm{V}(\mathscr{A})$. Se poi V è anche autoaggiunto ed irriducibile $\mathscr{A}$ è tale che $\mathrm{V}(\mathscr{A}) = \mathrm{V}'(\mathscr{A})$ e tutti i sottospazi $\mathscr{A}_{ij}, i, j = 1, \cdots, m$ ed $i \neq j$, hanno la medesima dimensione $k$. Se il rango di $\mathscr{A}$ è 2, $k$ è un intero positivo; se il rango è 3, $k$ è 1, 2, 4 o 8; se il rango è $> 3$, k è 1, 2 o 4. (Confronta E. B. Vinberg [1], G. Gentili [2], O. Rothaus [6] e [7] ed M. A. O'Connor [3]).

Nel seguito ci limiteremo a considerare coni associati a T–algebre che soddisfino alle suddette condizioni senza farne più esplicito riferimento.

## 3. Il tensore metrico, la connessione riemanniana ed il tensore di curvatura di $V(\mathscr{A})$

L'applicazione di $T(\mathscr{A}) \times \mathscr{A}$ in $\mathscr{A}$ definita da $\mathscr{L}(s, h) = \mathscr{L}_s(h) = (sh^{\triangle}) s^* + s(h_{\nabla} s^*)$ $(\mathscr{R}(s, h) = \mathscr{R}_s(h) = s^*(h^{\triangle} s) + (s^* h_{\nabla}) s)$ struttura $T(\mathscr{A})$ come un gruppo semplicemente transitivo di automorfismi di $V(\mathscr{A}) = V'(\mathscr{A})$.

Posto $l_h(k) = h^{\triangle} k + kh_{\nabla}$ $(r_h(k) = h_{\nabla} k + kh^{\triangle})$, comunque si prendano $h, k \in L(V(\mathscr{A}))$, si ha, per ogni $s \in T(\mathscr{A})$, che

$$\mathscr{L}_{\exp s} = \exp l_{(s+s^*)} \; (\mathscr{R}_{\exp s} = \exp r_{(s+s^*)})$$

e quindi

$$\det(\mathscr{L}_{\exp s}) = \exp \mathrm{Sp}(s + s^*) \; (\det(\mathscr{R}_{\exp s}) = \exp \mathrm{Sp}(s + s^*)) .$$

Se $\phi(\cdot)$ è la funzione caratteristica di V e $\theta \in G(V)$, si ha $\phi(\theta(x)) = \det \theta^{-1} \phi(x)$ e pertanto

$$\log \phi((\exp s)(\exp s)^*) = \log \phi(\mathscr{L}_{\exp s}(e)) = - \mathrm{Sp}(s + s^*) + \log \phi(e) .$$

Sviluppando in serie di Taylor ed uguagliando i termini di ugual potenza in $s$, si ottengono le relazioni

$$\partial \log \phi(s + s^*) = - \mathrm{Sp}(s + s^*)$$
$$\partial^2 \log \phi(s + s^*, s + s^*) = \mathrm{Sp}((s + s^*)^2)$$
$$\partial^3 \log (s + s^*, s + s^*, s + s^*) = - 2\, \mathrm{Sp}((s + s^*)^3)$$

(ove $\partial^i \log \phi$, $i = 1, 2, 3$, indica la forma $i$–lineare su $L(V(\mathscr{A}))$ che rappresenta il differenziale $i$–esimo di $\log \phi(\cdot)$ in $e$).

Fissiamo una base ortonormale $\{u_1, \cdots, u_n\}$ in $L(V(\mathscr{A}))$ ed indichiamo con $a \square b = \frac{1}{2}(ab + ba)$, per tutti gli $a, b \in \mathscr{A}$. Dalle relazioni precedenti si ottiene che:

le componenti del tensore metrico $g$ in $e$ sono date da

$$g_{ij} = \mathrm{Sp}(u_i u_j) = (u_i, u_j) , \qquad i, j = 1, \cdots, m;$$

le componenti della connessione riemanniana $\Gamma$ in $e$ sono date da

$$\Sigma_j \, g_{ij} \, \Gamma^j{}_{hk} = \tfrac{1}{2} \partial^3 \log \phi(u_i, u_h, u_k) \qquad (j = 1, \cdots, m)$$

e quindi $\Sigma_j \Gamma^j{}_{hk} u_j = - u_h \square u_k$ $(j = 1, \cdots, m)$;

le componenti del tensore di curvatura R in $e$ sono date da

$$R^i{}_{jhk} = \tfrac{1}{2} \Sigma_s (\Gamma^i{}_{js} \Gamma^s{}_{hk} - \Gamma^i{}_{hs} \Gamma^s{}_{jk}) \qquad (s = 1, \cdots, m),$$

perciò

$$\Sigma_s R^s{}_{jhk} u_s = \tfrac{1}{2}(u_j \square (u_h \square u_k) - u_h \square (u_j \square u_k)) \qquad (s = 1, \cdots, m) .$$

## 4. IL GRUPPO DELLE ISOMETRIE DI $V(\mathscr{A})$

Dalle relazioni ottenute in 3. si ha il

LEMMA *Sia $\theta : V(\mathscr{A}) \to V(\mathscr{A})$ una isometria tale che $\theta(e) = e$. L'applicazione tangente a $\theta$ in $e$, $\theta'$, soddisfa alle:*

$$Sp(\theta'(x)\,\theta'(y)) = Sp(xy) \quad \textit{per tutti gli} \quad x, y \in L(V(\mathscr{A}));$$

$$\theta'(x) \square (\theta'(y) \square (\theta'(z)) - \theta'(y) \square (\theta'(x) \square \theta'(z)) = \theta'(x \square (y \square z) + - y \square (x \square z)) \quad \textit{per tutti gli} \quad x, y, z \in L(V(\mathscr{A}));$$

$$\theta'(e) = e.$$

TEOREMA I. *Sia $\theta : V(\mathscr{A}) \to V(\mathscr{A})$ una isometria tale che $\theta(e) = e$ e $\theta'(e) = e$. Esiste un automorfismo $\eta$ di $V(\mathscr{A})$ tale che $\eta\,\theta'(e_i) = e_i$ per tutti gli $i = 1, \cdots, m$.*

Diamo qui soltanto uno schema della dimostrazione suddividendola per comodità in alcune parti:

*a*) Per ogni sottoinsieme B di $A = \{(i, j)/i, j = 1, \cdots, m \text{ e } i < j\}$, tale che comunque si prendano $(i, j), (j, k) \in B$ sia $(i, k) \in B$, indichiamo con $K_B$ il più piccolo sottogruppo di $G(V(\mathscr{A}))$ che contiene l'insieme

$$\bigcup_{(r,p)} \{\mathscr{L}_s, \mathscr{R}_s / s \in \Sigma_i \mathscr{A}_{ii} + \mathscr{A}_{rp} \ (i = 1, \cdots, m)\} \qquad ((r, p) \in B)$$

e con $H_B$ il sottogruppo di $K_B$ che fissa $e$. $H_B$ è un gruppo di Lie compatto e pertanto, fissato $h \in L(V(\mathscr{A}))$, deve esistere un elemento $\xi \in H_B$ nel quale l'applicazione continua e non negativa di $H_B$ nei reali definita da $\eta \to Sp((\eta(h) - \Sigma_i \eta(h)_{ii})^2)$ $(i = 1, \cdots, m)$, ha un minimo. Alcune considerazioni sui sottogruppi ad un parametro di $H_B$ conducono a dimostrare che, se $h_{ij} = 0$ per ogni $(i, j) \in A - B$, il valore minimo della applicazione precedente è 0, vale a dire che $\xi(h)$ è diagonale.

*b*) Prendendo in considerazione dei particolari sottogruppi ad un parametro di $H_B$ si dimostra che comunque si prenda $(i, j) \in B$, esiste un elemento $\xi \in B_B$ tale che $\xi(e_s) = e_{\sigma(s)}$, $s = 1, \cdots, m$, con $\sigma$ la trasposizione su $\{1, \cdots, m\}$ che scambia $i$ con $j$.

*c*) Per *a*), in $H_A$ esiste un elemento $\xi_1$ tale che $\xi_1\,\theta'(e_1)$ è diagonale. Per il lemma precedente si ha che $\xi_1\,\theta'(e_1) = e_i$, per qualche $i$, $i$ che noi potremo supporre uguale ad 1.

Supponiamo ora che per qualche $1 \leq r < m - 1$ esista un $\xi_r \in H_A$ tale che $\xi_r\,\theta'(e_s) = e_s$, per ogni $s = 1, \cdots, r$. Posto $B = \{(i, j)/i, j = r + 1, \cdots, m$ *e* $i < j\}$ si ha che $(\xi_r\,\theta'(e_{r+1}))_{ij} = 0$ per ogni $(i, j) \in A - B$ (vedi il lemma precedente) ed inoltre, per ogni $\eta \in H_B$, si ha $\eta(e_s) = e_s$ per $s = 1, \cdots, r$. Ne segue che esiste un elemento $\xi_{r+1} \in H_A$ tale che $\xi_{r+1}\,\theta'(e_s) = e_s$ per tutti gli $s = 1, \cdots, r + 1$.

Il teorema di induzione ci assicura l'esistenza di un $\xi \in H_A$ tale che $\xi\theta'(e_s) = e_s$ per tutti gli $s = 1, \cdots, m - 1$ e quindi anche per $s = m$ (sempre per il lemma precedente). Q.E.D.

Dal teorema precedente segue il

TEOREMA II. *Sia $\mathscr{A}$ una T-algebra, con $V(\mathscr{A})$ irriducibile ed autoaggiunto, se $\theta$ è automorfismo di $V(\mathscr{A})$ che fissa e assieme alla sua applicazione tangente in $e$, $\theta'$, allora $\theta$ è un automorfismo di $V(\mathscr{A})$.*

Dimostriamo il teorema nell'ipotesi che sia $\theta'(e_i) = e_i$, $i = 1, \cdots, m$, poichè il caso generale diventa una banale conseguenza del teorema precedente.

Una conseguenza del lemma precedente è che, per ogni $a \in \mathscr{A}_{ij}$, $1 \le i < j \le m$, $\theta'(a + a^*) \in \mathscr{A}_{ij} + \mathscr{A}_{ij}$; pertanto $\theta'$ è la restrizione dell'applicazione lineare di $\mathscr{A}$ su se stessa, applicazione che indicheremo sempre con $\theta'$, data da $a \rightarrow \Sigma_{ij}(\theta'(a_{ij} + a_{ij}^*))_{ij}$ $(i, j = 1, \cdots, m)$. $\theta'$ soddisfa alle due condizioni: $\theta'(a^*) = \theta'(a)^*$ e $\theta'(hk) = \theta'(h)\,\theta'(k)$, $h \in \mathscr{A}_{ij}$ e $k \in \mathscr{A}_{jr}$ per tutti gli $i, j, r = 1, \cdots, m$.

Per ogni $x \in L(V(\mathscr{A}))$ consideriamo la successione di $m$ elementi di $L(V(\mathscr{A}))$ definita da $x^{(m)} = x, \cdots, x^{(k-1)} = \Sigma_{ij}(\rho_k(x^{(k)})\, x_{ij}^{(k)} - x_{ik}^{(k)} x_{kj}^{(k)})$ $(i, j = 1, \cdots, m), \cdots$, e la successione di $m$ numeri reali $p_m(x) = \rho_m(x^{(m)}), \cdots \cdots, p_1(x) = \rho_1(x^{(1)})$. Il cono $V(\mathscr{A})$ è caratterizzato dalle $m$ disequazioni $p_m(x) > 0, \cdots, p_1(x) > 0$. (Vedi ad esempio E. B. Vinberg [4] e O'Connor [3]).

Poichè, per $\theta'$, si ha evidentemente $p_i(\theta'(x)) = p_i(x)$, $i = 1, \cdots, m$, $\theta'(V(\mathscr{A})) = V(\mathscr{A})$ e quindi $\theta'$ è un automorfismo di $V(\mathscr{A})$. $\theta$ e $\theta'$ sono due isometrie di $V(\mathscr{A})$ su se stesso tangenti in $e$, e $V(\mathscr{A})$ è una varietà riemanniana completa e connessa (vedi G. Gentili [2]), ne consegue che $\theta = \theta'$ e quindi $\theta$ è un automorfismo di $V(\mathscr{A})$. Q.E.D.

L'isometria involutoria di $V(\mathscr{A})$ in sè, definita in 1., $\mu$, fissa $e$ ed ha una applicazione tangente in $e$, $\mu'$, tale che $\mu'(e) = -e$, pertanto, tenendo conto delle considerazioni fatte in 1., si ha il

TEOREMA III. *Se V è un cono aperto connesso regolare omogeneo irriducibile ed autoaggiunto, detta $\mu$ l'isometria involutoria (definita in* 1.) *di* V *su sè stesso, si hanno le*

$$I(V) = G(V)\ \{\textit{Identità},\ \mu\};$$

$$I_e(V) = G_e(V).$$

Siccome ogni automorfismo di V è estendibile ad un automorfismo olomorfo del dominio tubolare associato a V (Kaup-Matsushima-Ochiai [8] e Murakami [9]) e tale è anche l'involuzione $\mu$ (Rothaus [6]), si ha il

COROLLARIO. *Tutte le isometrie di un cono aperto convesso regolare omogeneo irriducibile autoaggiunto sono estendibili ad automorfismi olomorfi del dominio tubolare associato.*

## BIBLIOGRAFIA

[1] VINBERG E. B. (1963) – *The theory of convex homogeneous cones*, « Trans. Moscow Math. Soc. », *12*, 340.

[2] GENTILI G. (1980) – *Differential geometry of light-cone*, « Rend. Atti Acc. Naz. Lincei », (8) *68*.

[3] O'CONNOR M. A. (1980) – *Cones related algebras and affine geometries*, Dissertation submitted to the Graduate School of University of Meriland ».

[4] MESCHIARI M. (1978) – *Isometrie dei coni convessi regolari omogenei*. « Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena », *27*.

[5] GENTILI G. (1981) – *Invariant Riemannian geometry on convex cones*. Testi di dottorato presentata alla Scuola Normale Superiore di Pisa.

[6] ROTHAUS O. (1960) – *Domains of positivity*, « Abh. Math. Sem. Univ. », Hambourg, *24*, 189.

[7] ROTHAUS O. (1966) – *The construction of homogeneous convex cones*, « Ann. Math. », *83*, 358.

[8] KAUP W., MATSUSHIMA Y. and OCHIAI T. (1970) – *On automorphisms and equivalence of generalized Siegel Domains*, « Am. J. Math. », *92*, 475.

[9] MURAKAMI S. (1972) – *On automorphisms of Siegel domains*, « Lecture Notes in Mathematics », 286 Srpinger–Verlag.