
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

GUIDO LUPACCIOLU

**Su alcune formule integrali per le funzioni di più
variabili complesse**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 70 (1981), n.6, p. 251–255.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1981_8_70_6_251_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Funzioni di variabile complessa. — *Su alcune formule integrali per le funzioni di più variabili complesse* (*). Nota di GUIDO LUPACCIOLU, presentata (**) dal Socio E. MARTINELLI.

SUMMARY. — General topological conditions are given for integration cycles of a certain class of integral formulas for holomorphic functions of several complex variables.

1. È noto che per le funzioni olomorfe $f(z)$ di n variabili complesse $z = (z_1, \dots, z_n)$ sussistono n tipi di formule integrali, le quali si differenziano per la dimensione $n + l$ del ciclo di integrazione Γ_{n+l} , potendo l assumere i valori $0, 1, \dots, n - 1$. Queste formule, dovute ad E. Martinelli [3], sottopongono il ciclo Γ_{n+l} soltanto a condizioni topologiche, le quali dipendono essenzialmente dallo « stato di allacciamento » di Γ_{n+l} con la « varietà singolare » $T_{2n-2l-2}$ del « nucleo » della corrispondente formula integrale. Se la formula serve a esprimere il valore di f in $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$, la varietà singolare $T_{2n-2l-2}(\zeta)$ è unione di $\binom{n}{l+1}$ spazi lineari $(2n - 2l - 2)$ -dimensionali di $\mathbf{R}^{2n} \equiv \mathbf{C}^n(z_1, \dots, z_n)$, contenenti il punto ζ .

Il tipo più semplice si ha per $l = n - 1$ (e già trovasi in E. Martinelli [2]). In tal caso si ha $T_0(\zeta) = \zeta$ e la formula relativa, supposta f olomorfa in un dominio chiuso $\overline{D}_{2n} \subset \mathbf{R}^{2n}$ e $\zeta \in D_{2n}$, $\partial D_{2n} = \Gamma_{2n-1}$, si riduce (nelle condizioni più elementari) alla:

$$(1,1) \quad f(\zeta) = \int_{\Gamma_{2n-1}} f(z) \omega_{\zeta}(z, \bar{z}),$$

dove il nucleo $\omega_{\zeta}(z, \bar{z})$ è una $(2n - 1)$ -forma differenziale regolare e chiusa in $\mathbf{C}^n - \zeta$ di bigrado $(n, n - 1)$ rispetto alle variabili $(z), (\bar{z})$ e dipendente dal punto ζ (forma che può scriversi in vari modi che non occorre qui precisare).

F. Sommer [5] ha osservato che, a partire dalla (1,1), possono scriversi subito altre formule con ciclo di integrazione $(n + l)$ -dimensionale. Basta invero decomporre l' n -pla di variabili $(z_1, \dots, z_n)$ in p successive n_v -ple, essendo $\sum_1^p n_v = n$, e considerare $\mathbf{C}^n$ come prodotto: $\mathbf{C}^n = \mathbf{C}^{n_1} \times \dots \times \mathbf{C}^{n_p}$, ove $\mathbf{C}^{n_v}$ rappresenti la n_v -pla di variabili $(z_{k_{v-1}+1}, \dots, z_{k_v})$, $(k_0 = 0, k_p = n; n_v = k_v - k_{v-1})$. Indicheremo con $z^{(v)}$ la precedente n_v -pla, e analogamente.

(*) Lavoro eseguito dall'autore come borsista del C.N.R., nell'ambito del G.N.S.A.G.A.

(**) Nella seduta del 26 giugno 1981.

Supposto allora che f sia olomorfa in un p -cilindro chiuso

$$\bar{C}_{2n} = \bar{D}_{2n_1} \times \cdots \times \bar{D}_{2n_p} \quad (\text{con } \bar{D}_{2n_v} \subset \mathbb{C}^{n_v} \text{ e } \zeta^{(v)} \in D_{2n_v}),$$

l'applicazione ripetuta della (1,1) dà la formula:

$$(1,2) \quad f(\zeta) = \int_{\times_v \partial D_{2n}} f(z) \wedge_v \omega_{\zeta^{(v)}}(z^{(v)}, \bar{z}^{(v)}),$$

ove i prodotti $\times_v, \wedge_v$ (cartesiano ed esterno) si intendono estesi a $v = 1, \dots, p$ (e analogamente in seguito). La dimensione del ciclo di integrazione vale $\Sigma_v (2n_v - 1) = 2n - p$, cosicché per $p = n - l$ tale dimensione uguaglia $n + l$.

Il ciclo di integrazione nella (1,2) è sottoposto a condizioni geometriche molto particolari (e non puramente topologiche). Tuttavia per i casi estremi $p = n$ (cioè $n_1 = \dots = n_p = 1$) e $p = 1$, il nucleo della (1,2) riproduce ovviamente i nuclei delle formule di cui si è detto da principio (con riguardo a cicli di integrazione generali Γ_n e Γ_{2n-1}).

Non è invece così per $1 < p < n$, contrariamente a quanto affermato in [5] ⁽¹⁾.

Scopo di questo lavoro è quello di mostrare che anche per formule del tipo (1,2) può ampliarsi l'ambito di validità, sottoponendo il ciclo di integrazione Γ_{n+l} ad opportune condizioni topologiche. A tal fine basta essenzialmente determinare lo stato di allacciamento di Γ_{n+l} con la varietà singolare del nucleo che appare in (1,2). Ciò può farsi sulla base del teorema di dualità di Alexander, secondo le idee generali di cui nei lavori citati in [3].

2. Denotiamo con $S(\zeta)$ la varietà singolare del nucleo della (1,2). Essa è costituita dai punti $z \in \mathbb{C}^n$ tali che almeno una n_v -pla $z^{(v)}$ di loro coordinate coincida con la n_v -pla $\zeta^{(v)}$ di coordinate dei medesimi indici del punto ζ : quindi risulta espressa dall'unione dei sottospazi lineari $L_{2n-2n_v}^{(v)}(\zeta)$ di $\mathbb{C}^n$, contenenti il punto ζ , di equazioni

$$z_{kv-1+1} - \zeta_{kv-1+1} = 0, \dots, z_{kv} - \zeta_{kv} = 0 \quad (v = 1, \dots, p = n - l).$$

Occorre anzitutto determinare la struttura del gruppo $H_{n+l}(\mathbb{C}^n - S(\zeta))$ ⁽²⁾. Fissato il numero reale positivo r , indichiamo con $\bar{B}_{2n_v}(\zeta^{(v)}, r)$ la $2n_v$ -palla

(1) Cfr. [5], p. 173, nota 2). L'affermazione è ovviamente basata su un equivoco, riprodotto anche nella recensione di [3], 2), apparsa in Zentralblatt. f. Math., Band 53 (1956-57), S. 52. Per convincersene basta osservare che, mentre nella formula generale di Martinelli la varietà singolare del nucleo, $T_{2n-2l-2}$, è unione di spazi lineari di ugual dimensione, nella (1,2) l'analoga varietà singolare è unione di p spazi lineari di dimensione $2n - 2n_v$ (si veda oltre, n. 2). Fissato $l = n - p$, n_v risulta $\leq n - p + 1 = l + 1$ e quindi $2n - 2n_v$ è in ogni caso $\geq$ della dimensione di $T_{2n-2l-2}$ (dimensione che dà condizioni topologicamente più favorevoli per la « mobilità » del ciclo Γ_{n+l}).

(2) In tutto il lavoro denotiamo con H l'omologia intera con divisione (o omologia debole) di tipo singolare e con $\sim$ la corrispondente relazione.

chiusa di centro $\zeta^{(\nu)}$ e raggio r in $\mathbf{C}^{n_\nu}(z_{k_{\nu-1}+1}, \dots, z_{k_\nu})$, ($\nu = 1, \dots, n-l$). Poniamo quindi:

$$\bar{B}_{2n}(\zeta, r) = \bigvee_\nu \bar{B}_{2n_\nu}(\zeta^{(\nu)}, r), \quad \gamma_{n+l}(\zeta, r) = \bigvee_\nu \partial B_{2n_\nu}(\zeta^{(\nu)}, r).$$

La varietà $\gamma_{n+l}(\zeta, r)$, che intendiamo orientata in conformità delle orientazioni canoniche dei fattori e dell'ordine di questi, può riguardarsi, previa triangolazione, come un $(n+l)$ -ciclo (differenziabile a pezzi) di $\mathbf{C}^n - S(\zeta)$. Ebbene, si vede subito che la corrispondente classe di omologia con divisione $[\gamma_{n+l}(\zeta, r)]$ genera tutto il gruppo $H_{n+l}(\mathbf{C}^n - S(\zeta))$, cioè:

$$(2.1) \quad H_{n+l}(\mathbf{C}^n - S(\zeta)) = \mathbf{Z} [\gamma_{n+l}(\zeta, r)].$$

Invero, osservando che $\mathbf{C}^n - S(\zeta)$ può riguardarsi come prodotto cartesiano i cui fattori sono i $\mathbf{C}^{n_\nu}(z^{(\nu)})$ forati nei punti $\zeta^{(\nu)}$, ciascuno dei quali può contrarsi omotopicamente su $\partial B_{2n_\nu}(\zeta^{(\nu)}, r)$, si conclude senz'altro che esiste una contrazione omotopica di $\mathbf{C}^n - S(\zeta)$ su $\gamma_{n+l}(\zeta, r)$, da cui segue la (2.1).

Si osservi inoltre che, limitando tale contrazione omotopica a $\bar{B}_{2n}(\zeta, r) - S(\zeta)$, si ottiene anche:

$$(2.2) \quad H_{n+l}(\bar{B}_{2n}(\zeta, r) - S(\zeta)) = \mathbf{Z} [\gamma_{n+l}(\zeta, r)]^{(3)}.$$

3. Dalla (2.1) segue che ogni $(n+l)$ -ciclo Γ_{n+l} , contenuto in $\mathbf{C}^n - S(\zeta)$, individua, in modo unico, un numero intero N per cui sussiste la relazione di omologia con divisione:

$$(3.1) \quad \Gamma_{n+l} \sim N \gamma_{n+l}(\zeta, r) \quad \text{in } \mathbf{C}^n - S(\zeta).$$

Per precisare il significato di N possiamo far ricorso al teorema di dualità di Alexander ⁽⁴⁾, che pone in relazione i gruppi di omologia intera, in dimensioni duali, di un sottopoliedro di una ipersfera e del suo complemento. L'ipersfera è ora $(\mathbf{C}^n)^*$ (compattificazione di $\mathbf{C}^n$ mediante l'aggiunta di un punto all'infinito Ω) e il sottopoliedro $S(\zeta)^*$ ⁽⁵⁾, il cui complemento coincide appunto con $\mathbf{C}^n - S(\zeta)$. Tale teorema porge, tenuto conto della (2.1), che il gruppo $H_{n-l-1}(S(\zeta)^*)$ ⁽⁶⁾ è esso pure isomorfo a $\mathbf{Z}$, e generabile mediante la classe di un $(n-l-1)$ -ciclo di $S(\zeta)^*$, δ_{n-l-1} , soddisfacente alla condizione di allacciamento:

$$(3.2) \quad \text{All}(\delta_{n-l-1}, \gamma_{n+l}(\xi, r)) = 1.$$

(3) Le (2.1), (2.2) sussistono anche per l'omologia ordinaria ma è per noi sufficiente considerare l'omologia con divisione.

(4) Cfr. p. es. [4].

(5) Non è difficile invero indicare una reticolazione di $(\mathbf{C}^n)^*$ che subordini una reticolazione di $S(\zeta)^*$; cfr. [1].

(6) Per $n-l-1 = 0$ l'omologia deve considerarsi ridotta.

L'interesse a determinare un siffatto δ_{n-l-1} risiede ora nel fatto che, in base alle proprietà elementari degli indici di allacciamento, si avrà:

$$(3.3) \quad N = \text{All}(\delta_{n-l-1}, \Gamma_{n+l}).$$

4. Per ogni $v = 1, \dots, n-l$, consideriamo una semiretta t_v di origine ζ parallela a $\mathbf{C}^{n_v}(\mathbf{z}^{(v)})$ e orientata positivamente a partire da ζ . Sia K l'involucro convesso dell'unione di queste semirette, con l'orientazione determinata dallo $(n-l)$ -vettore $\vec{u}_1 \wedge \dots \wedge \vec{u}_{n-l}$, ove $\vec{u}_v$ è il versore della direzione orientata di t_v . La chiusura topologica $\bar{K}$ di K in $(\mathbf{C}^n)^*$ può riguardarsi, previa triangolazione, come una $(n-l)$ -catena di $(\mathbf{C}^n)^*$, che denotiamo anche con $\bar{K}$. Il bordo $\partial\bar{K}$ di questa è contenuto in $S(\zeta)^*$. Infatti esso è costituito dalle chiusure in $(\mathbf{C}^n)^*$ degli involucri convessi di tutte le unioni di $n-l-1$ semirette scelte tra le precedenti; ora ogni semiretta t_v è contenuta in ciascuno degli spazi lineari che compongono $S(\zeta)$, escluso $L_{2n-2n_v}^{(v)}(\zeta)$, cosicché per $n-l-1$ tali semirette vi è in ogni caso uno spazio lineare, tra quelli che compongono $S(\zeta)$, che le contiene tutte, e contiene anche il corrispondente involucro convesso. Si capisce che il ragionamento non è più valido per $l=n-1$, in tal caso avendosi luogo a considerare una sola semiretta $t_1=t$; la conclusione è però la stessa, in quanto $S(\zeta)^*$ è ridotto ai soli punti ζ, Ω e il bordo di $\bar{K}=\bar{t}$ è lo 0-ciclo $\Omega-\zeta$.

Consideriamo ora l'indice di allacciamento $\text{All}(\partial\bar{K}, \gamma_{n+l}(\zeta, r))$: esso è notoriamente uguale all'indice di intersezione di $\bar{K}$ e $\gamma_{n+l}(\zeta, r)$ e vale quindi ± 1 , dato che $\bar{K}$ e $\gamma_{n+l}(\zeta, r)$ si incontrano, trasversalmente, nell'unico punto $P = \zeta + r \sum_v \vec{u}_v$. Per precisare il segno occorre eseguire un confronto di orientazioni. Quella di $\bar{K}$ è data, come si è detto, dallo $(n-l)$ -vettore $\vec{u}_1 \wedge \dots \wedge \vec{u}_{n-l}$; quella di $\gamma_{n+l}(\zeta, r)$ può pensarsi determinata, nel punto P , da un $(n+l)$ -vettore $\vec{e}_1 \wedge \dots \wedge \vec{e}_{n-l}$, ove $\vec{e}_v$ è un $(2n_v-1)$ -vettore decomponibile che orienta positivamente $\partial B_{2n_v}(\zeta^{(v)}, r)$ nel punto $P^{(v)}$ proiezione (canonica) di P in $\mathbf{C}^{n_v}(\mathbf{z}^{(v)})$; infine quella dell'ambiente $(\mathbf{C}^n)^*$ può anche considerarsi fissata mediante il $2n$ -vettore decomponibile $\vec{u}_1 \wedge \vec{e}_1 \wedge \dots \wedge \vec{u}_{n-l} \wedge \vec{e}_{n-l}$.

Poiché risulta:

$$\vec{u}_1 \wedge \dots \wedge \vec{u}_{n-l} \wedge \vec{e}_1 \wedge \dots \wedge \vec{e}_{n-l} = \vec{u}_1 \wedge \vec{e}_1 \wedge \dots \wedge \vec{u}_{n-l} \wedge \vec{e}_{n-l},$$

il segno in discorso è il $+$ e si ha quindi:

$$(4.1) \quad \text{All}(\partial\bar{K}, \gamma_{n+l}(\zeta, r)) = 1.$$

Pertanto la (3.3) è valida assumendo:

$$(4.2) \quad \delta_{n-l-1} = \partial\bar{K}.$$

5. Ciò posto possiamo ormai conseguire facilmente la promessa generalizzazione della (1.2). Con riguardo ad una f olomorfa in un aperto A di $\mathbf{C}^n$,

contenente il punto ζ , essa è data dalla formula integrale:

$$(5.1) \quad Nf(\zeta) = \int_{\Gamma_{n+l}} f(z) \wedge \omega_{\zeta^{(v)}}(z^{(v)}, \bar{z}^{(v)}).$$

Le condizioni a cui è sottoposto il ciclo (differenziale a pezzi) Γ_{n+l} per il sussistere di questa formula sono le seguenti:

$$(5.2) \quad \Gamma_{n+l} \subset A - S(\zeta); \quad \Gamma_{n+l} \sim 0 \text{ in } (A - S(\zeta)) \cup \zeta; \quad N = \text{All}(\delta_{n-l-1}, \Gamma_{n+l}).$$

Cominciamo con l'osservare che la validità della (5.1) è già nota nel caso particolare $\Gamma_{n+l} = \gamma_{n+l}(\zeta, r)$, supposto r abbastanza piccolo affinché sia $\bar{B}_{2n}(\zeta, r) \subset A$. Perciò, essendo la forma integranda chiusa, basta far vedere che la relazione di omologia con divisione (3.1) non è solo valida in $C^n - S(\zeta)$, ma anche nell'ambiente più ristretto $A - S(\zeta)$. Ed invero dalla seconda delle (5.2) segue (ragionando per esempio come in [1], p. 131) che esiste un $(n+l)$ -ciclo Γ'_{n+l} tale che:

$$(5.3) \quad \Gamma'_{n+l} \subset B_{2n}(\zeta, r); \quad t\Gamma_{n+l} \sim \Gamma'_{n+l} \quad \text{in } A - S(\zeta),$$

ove t è un numero intero. Dalle (3.1), (2.2) segue allora:

$$(5.4) \quad \Gamma'_{n+l} \sim tN\gamma_{n+l}(\zeta, r) \quad \text{in } \bar{B}_{2n}(\zeta, r) - S(\zeta),$$

da cui discende ovviamente:

$$(5.5) \quad \Gamma_{n+l} \sim N\gamma_{n+l}(\zeta, r) \quad \text{in } A - S(\zeta).$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. LUPACCIOLU (1979) - *Sulle formule di rappresentazione integrale delle funzioni di più variabili complesse*, « Rend. di Mat. », 12, 121-133.
- [2] E. MARTINELLI (1938) - *Alcuni teoremi integrali per le funzioni analitiche di più variabili complesse*, « Mem. R. Accad. d'Italia », 9, 269-283.
- [3] E. MARTINELLI (1946) - 1) *Formule integrali e topologia nella teoria delle funzioni di più variabili complesse*, « Acta Pontificia Acad. Scient. », 9, 235-250; (1953) - 2) *Sulle estensioni della formula integrale di Cauchy ...*, « Annali di Mat. », 34, 277-347; (1953) - 3) *Colloque sur les fonctions de plus. variables*, « C.B.R.M », Bruxelles, 109-124.
- [4] H. SEIFERT e W. THRELFALL (1934) - *Lehrbuch der Topologie*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig.
- [5] F. SOMMER (1952) - *Über die Integralformeln in der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen*, « Math. Annalen », 125, 172-182.