Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Alessandro Scarselli

Su una classe di gruppi dotati di una serie di spezzamento principale

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **70** (1981), n.4, p. 198–202.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1981_8_70_4_198_0>

Algebra. — *Su una classe di gruppi dotati di una serie di spezzamento principale.* Nota (*) di ALESSANDRO SCARSELLI, presentata (**) dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — Groups all whose nonidentity subgroups split over a normal inseparable nonidentity subgroup are studied.

Sia G un gruppo finito; G è detto *separabile* se si spezza su qualche sottogruppo normale proprio, ovvero se esistono un sottogruppo normale N con $\langle 1 \rangle \neq N \neq G$ e un sottogruppo C, tali che $G = NC$ e $N \cap C = \langle 1 \rangle$; G è detto *inseparabile* in caso contrario. Ogni gruppo finito $G \neq \langle 1 \rangle$ ammette una fattorizzazione della forma $G = S_1 S_2 \cdots S_n$ con S_i sottogruppo inseparabile non identico, $L_i = S_1 S_2 \cdots S_i$ sottogruppo di G e L_{i+1} prodotto semidiretto del sottogruppo normale L_i con S_{i+1}. L'insieme $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$ è detto un *sistema di spezzamento* di G di lunghezza *n* e la catena $\langle 1 \rangle = L_0 \lhd L_1 \lhd \cdots \lhd L_n$ una *serie di* spezzamento di G di lunghezza *n* (cfr. [2], [3], [4], [6], [7]). Una serie di spezzamento del gruppo G è detta *principale* se i suoi elementi sono sottogruppi normali di G.

Non tutti i gruppi finiti ammettono una serie di spezzamento principale (ad esempio il gruppo alterno su quattro oggetti); indicheremo con $\mathcal{A}$ la classe costituita dai gruppi finiti che ne ammettono una e con $\mathcal{B}$ la classe dei gruppi finiti i cui sottogruppi propri appartengono ad $\mathcal{A}$.

Se H è un sottogruppo del gruppo G e $\{H_i\}$ è una serie di spezzamento principale di H, diremo che $\{H_i\}$ è *estendibile* a G, se esiste una serie di spezzamento $\{G_j\}$ di G, tale che $\{G_j \cap H\} = \{H_i\}$. Indicheremo con $\mathcal{C}$ la classe dei $\mathcal{B}$–gruppi, tali che ogni serie di spezzamento principale di ogni sottogruppo è estendibile e con $\mathcal{D}$ la classe dei gruppi i cui sottogruppi sono $\mathcal{C}$–gruppi. Sia $\{G_j\}$ una serie di spezzamento principale del gruppo $G \in \mathcal{A}$; se H è un sottogruppo di G, diremo che H è *compatibile* con $\{G_j\}$ se $\{G_j \cap H\}$ è una serie di spezzamento principale di H. Indicheremo con *E* la classe dei gruppi dotati di una serie di spezzamento principale rispetto alla quale ogni sottogruppo è compatibile.

TEOREMA 1 (Doerk [5]). *Ogni sottogruppo proprio del gruppo finito* G *sia supersolubile e* G *non sia supersolubile, allora*

(*) Lavoro eseguito nell'ambito delle attività del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.
(**) Nella seduta del 24 aprile 1981.

a) G *possiede uno e un solo sottogruppo di Sylow normale non banale* P;

b) $P/\Phi(P)$ *è un sottogruppo normale minimale di* $G/\Phi(P)$ *e non è ciclico*;

c) $\Phi(P) \subseteq Z(P)$;

d) *Se* $p | o(P)$, *allora* P *ha esponente* p *se* $p > 2$ *e in ogni caso se* P *è abeliano, mentre ha esponente* 4 *se* $p = 2$ *e* P *non è abeliano*;

e) *Se* Q *è un complemento di* P *in* G, $C_Q(P/\Phi(P)) = C_Q(P) = Q \cap \Phi(G)$.

TEOREMA 2. – *Sia* $G \in \mathscr{B}$. G *è supersolubile se e solo se ha un* $2'$*–sottogruppo di Hall normale.*

Dimostrazione. – È ben noto che un gruppo finito supersolubile ha un $2'$–sottogruppo di Hall normale. Sia viceversa $G \in \mathscr{B}$ e H un $2'$–sottogruppo di Hall normale di G. Procedendo per induzione su $o(G)$, si può supporre che G sia non supersolubile minimale. Per il Teorema 1, G possiede un sottogruppo di Sylow normale non banale P. Sia p il divisore primo di $o(P)$. Deve aversi $p > 2$, altrimenti $G = P \times H$ risulterebbe supersolubile.

Sia L un sottogruppo normale inseparabile non identico, sul quale G si spezza e Q un complemento di P in G. Si avrà allora $L = (P \cap L)(Q \cap L)$ ed essendo L inseparabile, deve aversi $L \subseteq P$ o $L \subseteq Q$. D'altra parte se $L \subseteq Q$, si ha $L \subseteq C_Q(P) \subseteq \Phi(G)$, per il Teorema 1 (e), contro il fatto che G si spezza su L. Essendo $p > 2$, P ha esponente p, per il Teorema 1 (d) e quindi anche L ha esponente p, ed essendo inseparabile ha ordine p; essendo $P/\Phi(P)$ normale minimo in $G/\Phi(P)$ e $L \subseteq \Phi(P) \nsubseteq \Phi(G)$ si ha $P = L$ contro il fatto che P non è ciclico.

LEMMA 3. – *Sia* G *un* 2*–gruppo,* $G' \subseteq Z(G) \neq G$, $\Omega_1(G) \subseteq \Phi(G)$ *ed* $\exp G = 4$, *allora* G *contiene sottogruppi di almeno uno dei seguenti tipi*:

a) $A \doteq \langle x, y, z \mid x^4 = y^4 = z^2 = 1, [x, y] = z \in Z(A) \rangle$

b) $B = \langle x, y, z \mid x^4 = z^2 = 1, [x, y] = z \in Z(B), x^2 = y^2 \rangle$

c) $C = \langle x, y \mid x^4 = 1, x^2 = y^2, [x, y] = x^2 \rangle$.

I gruppi A, B *e* C *sono non abeliani minimali;* C *è inseparabile,* B *si spezza sul sottogruppo normale e inseparabile* $\langle xy \rangle$, A *non si spezza su alcun sottogruppo normale inseparabile non banale, benchè sia separabile.*

Dimostrazione. – Non essendo G abeliano, in una base di G esistono due elementi x e y tra loro non permutabili. Essendo $\Omega_1(G) \subseteq \Phi(G)$ ed $\exp G = 4$, x e y hanno entrambi periodo 4. Se $x^2 = y^2$ si ottengono B o C a seconda che $[x, y] \neq x^2$ o $[x, y] = x^2$. Notiamo che nel gruppo B gli elementi y e yx hanno entrambi periodo 4 e non sono permutabili. Si ha $(xy)^2 = x^2 y^2 [y, x] = z$. Posto $xy = t$, B si presenta nella forma $B = \langle t, y \mid t^4 = y^4 = 1, [t, y] = t^2 \rangle$. Sia ora $\langle x, y \rangle$ non isomorfo nè a B, nè a C. Dovrà allora essere $x^2 \neq y^2$ e $y^2 \neq [x, y] \neq y^2$

e si ottiene il gruppo A. Sia ora X uno qualsiasi dei gruppi A, B o C. Si ha $\Phi(X) = Z(X) = \Omega_1(X)$ ha indice 4 in X; ne segue che ogni sottogruppo massimo M di X contiene Z (X) e $[M : Z(X)] = 2$, quindi M è abeliano. Perciò X è non abeliano minimale. L'unico elemento di periodo 2 di C è x^2 e quindi C è inseparabile. Abbiamo già notato che, nel gruppo B, $\langle xy \rangle$ è normalizzato da y e $\langle xy \rangle \cap \langle y \rangle = \langle 1 \rangle$. Essendo $\langle xy \rangle \langle y \rangle = B$, si ha che B si spezza sul sottogruppo normale inseparabile $\langle xy \rangle$. Il gruppo A ha ordine 32, nessuno dei sottogruppi di ordine 16 ha complemento, essendo $\Omega_1(A) \subseteq \Phi(A)$. Non vi sono sottogruppi ciclici di ordine 8 e nessuno dei sottogruppi ciclici di ordine 4 è normale.

TEOREMA 4. – *Sia* $G \in \mathscr{B}$, P *un 2–sottogruppo di Sylow di* G *e valgano le seguenti condizioni*:

(a) *se* $o(P) = 8$, P *non sia il gruppo dei quaternioni*

(b) *se* $o(P) \geq 16$, *ogni sottogruppo di ordine* 16 *ed esponente* 4 *di* P, *sia abeliano*;

allora G *è supersolubile.*

Dimostrazione. – Sia G un minimo controesempio, allora G è non supersolubile minimale. Sia P il p–sottogruppo di Sylow normale non banale di G. Sia $p > 2$, allora, essendo G/P supersolubile, esso ha un 2′–sottogruppo di Hall normale H/P. La retroimmagine H di H/P nell'omomorfismo naturale di G su G/P è allora un 2′–sottogruppo di Hall normale di G, quindi G è supersolubile, per il Teorema 2, una contraddizione. Quindi $p = 2$. Sia P non abeliano, allora, per il Lemma 3, P contiene qualche sottogruppo isomorfo ad A, B, o C, ma se $o(P) = 8$, non essendo P abeliano per ipotesi, deve essere $P \simeq C$, il gruppo dei quaternioni contro (a); se $o(P) \geq 16$, per le ipotesi fatte, B non contiene sottogruppi isomorfi a B o a C, e, poiché $A \notin \mathscr{B}$, si ha una contraddizione. Dunque P è abeliano. Sia L un sottogruppo normale e inseparabile di G sul quale G si spezza e Q un complemento di P in G. Deve allora aversi $L = (P \cap L)(Q \cap L)$, ed essendo L inseparabile, deve essere $L \subseteq P$ o $L \subseteq Q$. Se $L \subseteq Q$, allora $L \subseteq C_Q(P) \subseteq \Phi(G)$ e si ha una contraddizione; se $L \subseteq P$, non essendo $L \subseteq \Phi(G)$ e $P/\Phi(P)$ normale minimo in $G/\Phi(P)$ deve aversi $L = P$ ed essendo $\exp P = 2$ si ha una contraddizione.

DEFINIZIONE. – Per ogni gruppo G, indichiamo con $\mathscr{C}(G)$ l'unione dei sottogruppi normali supersolubili di G.

TEOREMA 5. – *Sia* $G \in \mathscr{B}$, *allora* $\mathscr{C}(G)$ *è supersolubile.*

Dimostrazione. – Siano N_1 e N_2 sottogruppi normali supersolubili di G, H_1 e H_2 i rispettivi 2′–sottogruppi di Hall. Risulta allora che H_1 e H_2 sono, rispettivamente sottogruppi caratteristici di N_1 e N_2 e quindi entrambi normali in G. D'altra parte $H_1 H_2 = H$ è un 2′–sottogruppo di Hall di $N = N_1 N_2$ e quindi, essendo $H \trianglelefteq N$ e $N \in \mathscr{B}$, N è supersolubile, per il Teorema 2. Perciò $\mathscr{C}(G)$ è supersolubile.

DEFINIZIONE. – Il sottogruppo normale N del gruppo G è detto *supersolubilmente immerso* in G, se esiste una G–serie normale $N_0 = \langle 1 \rangle \subset N_1 \subset \cdots \cdots \subset N_m = N$, tale che $[N_i : N_{i-1}]$ è un numero primo per $i = 1, 2, \cdots, m$.

TEOREMA 6 (Baer [1]). – *Sia* N *un sottogruppo normale del gruppo* G *e sia* N *supersolubilmente immerso in* G, *allora* $G/C_G(N)$ *è supersolubile.*

TEOREMA 7. – *Sia* $G \in \mathscr{B}$ *risolubile.* G *è supersolubile se e solo se* $\mathscr{C}(G)$ *è supersolubilmente immerso in* G.

Dimostrazione. – Sia F (G) il sottogruppo di Fitting di G. È ben noto che $C_G(F(G)) = Z(F(G))$ in un gruppo risolubile, ed essendo $F(G) \subseteq \mathscr{C}(G)$ si ha che $C_G(\mathscr{C}(G)) = Z(\mathscr{C}(G))$. Per il Teorema 6, $G/Z(\mathscr{C}(G))$ è supersolubile e quindi anche $G/\mathscr{C}(G)$. Essendo $\mathscr{C}(G)$ supersolubilmente immerso in G, anche G è supersolubile. Il viceversa è ovvio.

Osservazione. – L'olomorfo del gruppo dei quaternioni tramite un suo gruppo di automorfismi di ordine 3 è un esempio di gruppo risolubile, ma non supersolubile, appartenente a $\mathscr{B}$. $G = SL(2, 5)$ è un gruppo non risolubile, appartenente a $\mathscr{B}$, nel quale $\mathscr{C}(G) = Z(G)$ è supersolubilmente immerso in G.

TEOREMA 8. – *Sia* $G \in \mathscr{D}$ *e* $\{L_i \mid i = 0, \cdots, n\}$ *una serie di spezzamento principale di* G, *allora* L_i/L_{i-1} *è un* p*–gruppo ciclico o generalizzato dei quaternioni.*

Dimostrazione. – Per induzione su n, è sufficiente provarlo per $n = 1$. Allora G è inseparabile e quindi $\langle 1 \rangle = L_0 \subset L_1 = G$ è l'unica serie di spezzamento di G. Ne segue che ogni sottogruppo di G è inseparabile e quindi G è un p–gruppo, ciclico o generalizzato dei quaternioni.

TEOREMA 9. – *Sia* $G \in \mathscr{E}$ *un* p*–gruppo e* $\{L_i \mid i = 0, \cdots, n\}$ *una serie di spezzamento principale, rispetto alla quale ogni sottogruppo è compatibile. Allora si verifica una delle seguenti condizioni*:

(a) L_{n-1} *è abeliano elementare e* $G = L_{n-1} \times M$ *con* M *ciclico o generalizzato dei quaternioni*;

(b) $p = 2$, *exp* $L_{n-1} > 2$ *e* $G = X \times Y$ *con* X *abeliano elementare e* Y *diedrale.*

Dimostrazione. – Supponiamo anzitutto che sia $p > 2$ oppure che G sia abeliano e mostriamo che in tal caso L_{n-1} è abeliano elementare e $G = L_{n-1} \times M$ con M ciclico. Se infatti G è un minimo controesempio, esso è abeliano o non abeliano minimale. In ogni caso, comunque si prendano $a, b \in G$ si ha $(ab)^p = a^p b^p$. Sia ora $\exp L_{n-1} > p$ e sia $x \in L_{n-1}$ tale che $x^p \neq 1$. Sia poi $y \notin L_{n-1}$ tale che $y^p \neq 1$ e sia $1 \neq y_0 \in \langle y \rangle$ tale che $y_0^p = 1$. Allora $\langle xy_0 \rangle \subseteq L_{n-1}$. Sia infatti $\langle xy_0 \rangle \nsubseteq L_{n-1}$, allora $\langle xy_0 \rangle \cap L_{n-1} = \langle x^p \rangle$, ma $\langle xy_0 \rangle$ non si spezza su $\langle x^p \rangle$ e si ha una contraddizione. Perciò $y_0 \in L_{n-1}$, ma

$y \notin L_{n-1}$, quindi $\langle 1 \rangle \neq \langle y \rangle \cap L_{n-1} \neq \langle 1 \rangle$ $(\langle \neq y \rangle$. Giacchè $\langle y \rangle$ è inseparabile si ha una contraddizione. Si conclude che ogni elemento che non ha periodo p è contenuto in L_{n-1}.

Sia $z \notin L_{n-1}$, allora xz non ha periodo p e non è contenuto in L_{n-1} e si ottiene ancora una contraddizione. Perciò $\exp L_{n-1} \leq p$. Ne segue che $o(L_1) = p$ oppure $L_1 = G$. Se $L_1 = G$, allora ogni sottogruppo di G è inseparabile e G risulta ciclico. Se L_1 ha ordine p, allora è contenuto nel centro di G ed è $G = L_1 \times R$; procedendo per induzione si ottiene che L_{n-1} è abeliano elementare e $G = L_{n-1} \times M$ con M ciclico. Sia ora $p = 2$ e G non sia abeliano. Se $L_{n-1} = \langle 1 \rangle$, allora ogni sottogruppo di G è inseparabile e G è generalizzato dei quaternioni. Se $\exp L_{n-1} = 2$, allora $G = L_1 \times R$, per un certo sottogruppo R, ed essendo G un minimo controesempio, risulta $G = L_{n-2} \times M$ con M generalizzato dei quaternioni. Sia infine $\exp L_{n-1} > 2$. Sia $x \in L_{n-1}$ e $y \notin L_{n-1}$ di periodo 2 allora $(xy)^2 = x^2 [x, y] \in L_{n-1}$. Poiché $\langle xy \rangle$ è inseparabile, si ha $(xy)^2 = 1$ e quindi $x^2 = [y, x] = yx^{-1} yx$ e dunque $x = yx^{-1} y$.

Perciò y induce in L_{n-1} l'inversione, e dunque L_{n-1} è abeliano. Per ciò che abbiamo già mostrato nel caso abeliano, deve aversi $L_{n-1} = L_{n-2} \times M$ con M ciclico e L_{n-2} abeliano elementare.

Sia $L_{n-2} \neq \langle 1 \rangle$, allora $\sigma(L_1) = 2$ e quindi $G = L_1 \times R$ con R opportuno ed essendo G un minimo controesempio si ottiene una contraddizione. Dunque $L_{n-2} = \langle 1 \rangle$ e $L_1 = M$. Sia ora t un elemento di periodo 4 di M e v un elemento di periodo 4 di G, non appartenente a M. Deve allora essere $\langle v \rangle \cap M = \langle 1 \rangle$ giacchè $\langle v_2 \rangle$ non si spezza su alcun sottogruppo proprio. D'altra parte v^2 induce in $\langle t \rangle$ l'inversione e si ottiene una contraddizione. Perciò ogni elemento di G, non appartenente ad M ha periodo 2. Essendo G/M inseparabile, deve aversi $[G : M] = 2$ e quindi G è diedrale.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. BAER (1959) – *Supersoluble immersion*, « Can. J. Math. », *11*, 353–369.

[2] H. BECHTELL (1976) – *Inseparable finite soluble groups*, « Trans. Amer. Math. Soc. », *216*, 47–60.

[3] H. BECHTELL (1977) – *Inseparable finite soluble groups* II, « Proc. Amer. Math. Soc. », *64*, 25–29.

[4] H. BECHTELL – *Splitting systems for finite solvable groups*, (in corso di stampa).

[5] K. DOERK (1966) – *Minimal nicht überauflosbare endliche Gruppen*, « Math. Z. », *91*, 198–205.

[6] A. SCARSELLI (1979) – *On a class of Inseparable Finite Groups*, « Journal of Algebra », *58*, 94–99.

[7] A. SCARSELLI (1980) – *Su una classe di gruppi finiti inseparabili*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *68*, 22–25.