Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Fabio Bardelli, Andrea Del Centina

Osservazioni sullo spazio dei moduli delle curve trigonali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **70** (1981), n.2, p. 96–100.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1981_8_70_2_96_0>

Geometria. — *Osservazioni sullo spazio dei moduli delle curve trigonali.* Nota di FABIO BARDELLI (*) e ANDREA DEL CENTINA (**), presentata (***) dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — Let C be an algebraic projective smooth and trigonal curve of genus $g \geq 5$. In this paper we define, in a way equivalent to that followed by A. Maroni in [1], an integer m, called the *species* of C, which is a birational invariant having the property that $0 \leq m \leq \frac{g+2}{3}$ and $m-g \equiv 0 \mod (2)$. In section 1 we prove that for every $g\,(\geq 5)$ and every m, as before, there are trigonal curves of genus g and species m. In section 2 we define the space $\mathfrak{M}^1_{g,3;m}$ of moduli of trigonal curves of genus g and species m. We note that $\mathfrak{M}^1_{g,3;m}$ is irreducible and unirational and we prove that $\dim \mathfrak{M}^1_{g,3;m} = 2g+2-m$ if $m \neq 0$ and $\dim \mathfrak{M}^1_{g,3;0} = 2g+1$. As Corollaries we obtain the following facts: the general trigonal curve of even genus is of species 0, the general trigonal curve of odd genus is of species 1 and the space $\mathfrak{M}^1_{g,3}$ of moduli of trigonal curves of genus g is unirational. The results of this note are valid over any algebraically closed field of any characteristic.

INTRODUZIONE

Sia C una curva algebrica proiettiva liscia trigonale di genere $g \geq 5$.

In questa nota associamo, in modo equivalente a quello seguito da A. Maroni in [1], alla curva C un intero m, detto *specie* della curva C, che risulta essere un invariante birazionale soddisfacente le seguenti condizioni $0 \leq m \leq \frac{g+2}{3}$, $m - g \equiv 0 \mod (2)$.

Nel paragrafo 1 proviamo, per ogni $g\,(\geq 5)$ e per ogni m soddisfacente le precedenti condizioni, l'esistenza di curve trigonali di genere g e specie m.

Nel paragrafo 2 definiamo lo spazio $\mathfrak{M}^1_{g,3;m}$ dei moduli delle curve trigonali di genere g e specie m. Osserviamo che $\mathfrak{M}^1_{g,3;m}$ è irriducibile e unirazionale e dimostriamo che $\dim \mathfrak{M}^1_{g,3;m} = 2g + 2 - m$, se $m \neq 0$, e $\dim \mathfrak{M}^1_{g,3;0} = 2g + 1$.

Come Corollari otteniamo i seguenti fatti: la generica curva trigonale di genere dispari è di specie 1, la generica curva trigonale di genere pari è di specie 0 e lo spazio $\mathfrak{M}^1_{g,3}$ dei moduli delle curve trigonali di genere g è unirazionale.

I risultati di questa nota sono validi per curve definite su un campo **K** algebricamente chiuso di caratteristica p.

(*) Collaboratore del I.A.G.A. del C.N.R.
(**) Collaboratore del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.
(***) Nella seduta del 14 febbraio 1981.

Dopo aver scritto la presente nota abbiamo saputo di un preprint di E. Arbarello e M. Cornalba, nel quale, tra gli altri risultati e con altri metodi, provano la unirazionalità di $\mathfrak{M}^1_{g,k}$ con $k \leq 5$ e $g \geq k - 1$ (cfr. [2]).

1. UN TEOREMA DI MARONI

Sia C una curva algebrica proiettiva liscia, definita sopra un campo **K** algebricamente chiuso di caratteristica qualsiasi, trigonale di genere $g \geq 5$.

È ben noto che C possiede un'unica g^1_3 che risulta essere completa e priva di punti fissi (cfr. [3]).

È altresì noto che il modello canonico $\tilde{C}$ di C, $\tilde{C} \subset \mathbf{P}^{g-1}$, giace sopra una superficie S rigata razionale liscia di grado $g - 2$, la cui rigatura taglia sulla $\tilde{C}$ la g^1_3 (cfr. [4]).

L'unicità della g^1_3 implica l'unicità di S.

Sia $S_n = \mathbf{P}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(n))$ per $n \geq 0$.

Si ha che $\mathrm{Pic}(S_n) = \mathbf{Z}[S_\infty] \oplus \mathbf{Z}[F]$, dove F è una fibra di S_n e S_∞ è una curva tale che $S^2_\infty = -n$ e $S_\infty \cdot F = 1$ (S_∞ è unica se $n \neq 0$ mentre se $n = 0$ S_∞ varia in un sistema lineare di dimensione 1). Se S_σ è una qualunque sezione di S diversa da S_∞, si ha che $S_\sigma \sim S_\infty + nF$ (cfr. [5]).

La superficie S è l'immersione in $\mathbf{P}^{g-1}$ di S_m, per un opportuno $m \geq 0$, mediante la mappa φ_b associata al sistema lineare $|S_\infty + bF|$ con

$$b = \frac{g - 2 + m}{2}, \quad b > m. \tag{1}$$

Notiamo che m dovrà avere la stessa parità di g e che $m < g - 2$.

È immediato verificare che:

$$\deg \varphi_b(S_\infty) = \frac{g - 2 + m}{2}$$

e

$$\deg \varphi_b(S_\sigma) = \frac{g - 2 - m}{2}.$$

Consideriamo un iperpiano $H \subset \mathbf{P}^{g-1}$ contenente $\varphi_b(S_\infty)$, H interseca S, fuori di $\varphi_b(S_\infty)$, in b fibre le quali tagliano su $\tilde{C}$ un divisore di grado $3b \leq 2g - 2$.

Dalla (1) si ricava allora facilmente:

$$m \leq \frac{g + 2}{3}. \tag{2}$$

DEFINIZIONE 1.1. *L'intero* m *associato alla curva* C *con la costruzione precedente è detto specie di* C.

OSSERVAZIONE 1.1. *La specie* m *è chiaramente un invariante birazionale di* C.

PROPOSIZIONE 1.1. *Per ogni intero* $g \geq 5$ *e per ogni intero* m *soddisfacente le condizioni*:

$$0 \leq m \leq \frac{g+2}{3} \quad , \quad m - g \equiv 0 \mod (2)$$

esiste una curva triangolare di genere g *e specie* m.

Dimostrazione. Siano g ed m come richiesto. Consideriamo la superficie $S_m = \mathbf{P}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(m))$ ed in essa il sistema lineare $\mathfrak{S} = |3\,S_\infty + lF|$ con $l = \dfrac{3m+g+2}{2}$. Si ha $l \geq 0$ e poichè $m \leq \dfrac{g+2}{3}$ $\mathfrak{S}$ ha divisori effettivi ed è privo di punti fissi. Per il teorema di Bertini l'elemento generico C di $\mathfrak{S}$ è una curva liscia. C è ovviamente trigonale e se $g(C)$ è il suo genere, dalla formula del genere $2g(C) - 2 = C^2 + C \cdot K_{S_m}$, si ha $g(C) = g$.

Ancora si verifica facilmente che $\deg \varphi_b(C) = 2g - 2$.

Resta così provato che $\varphi_b(C)$ è una curva canonica di genere g e specie m.

OSSERVAZIONE 1.2. *Tale Proposizione è dovuta a A. Maroni* (cfr. [1]). *Maroni definisce specie della curva trigonale l'intero* $M = \deg \varphi_b(S_\infty)$.

OSSERVAZIONE 1.3. *Si puo verificare che ogni curva trigonale di genere* g *e specie* m *giace su una superficie* S_m *e appartiene al sistema lineare* $\mathfrak{S}$ *su* S *definito nella Proposizione precedente.*

2. COMPUTO DEI MODULI

Sia $\mathfrak{M}^1_{g,3}$ lo spazio dei moduli delle curve trigonali di genere g.

È noto che $\mathfrak{M}^1_{g,3}$ è irriducibile (cfr. [6]) ed è un classico risultato che $\dim \mathfrak{M}^1_{g,3} = 2g + 1$.

Consideriamo la superficie $S_m = \mathbf{P}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(m))$ ed in essa il sistema lineare $\mathfrak{S}_{g,3} = |3\,S_\infty + lF|$ con $l = \dfrac{3m+g+2}{2}$ e g ed m soddisfacenti le condizioni della Proposizione 1.1.

Si ha $\mathfrak{S}_{g,3} \cong \mathbf{P}^{N(g,m)}$ ed inoltre esiste una mappa razionale

$$\Phi_{g,m} : \mathfrak{S}_{g,m} \dashrightarrow \mathfrak{M}^1_{g,3}$$

che associa ad ogni curva liscia di $\mathfrak{S}_{g,m}$ la sua classe di isomorfismo in $\mathfrak{M}^1_{g,3}$ (cfr. [7]).

DEFINIZIONE 2.1. *Poniamo* $\mathfrak{M}^1_{g,3;m} = \operatorname{Im} \Phi_{g,m}$. $\mathfrak{M}^1_{g,3;m}$ *è detto spazio dei moduli delle curve trigonali di genere* g *e specie* m.

OSSERVAZIONE 2.1. *Dalla definizione si ha che* $\mathfrak{M}^1_{g,3;m}$ *è irriducibile e unirazionale.*

PROPOSIZIONE 2.1. *Si ha:*

$$\dim \mathfrak{M}^1_{g,3;m} = \begin{cases} 2g+2-m & \text{se } m \neq 0 \\ 2g+1 & \text{se } m = 0. \end{cases}$$

Dimostrazione. Ogni curva trigonale C di genere g e specie m giace su una superficie $S_m = \mathbf{P}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(m))$. Fissiamo una immersione S di S_m in $\mathbf{P}^{g-1}$ come nel paragrafo 1. Ogni curva C ha come immagine $\varphi_b(C) = \tilde{C}$ una curva canonica in $\mathbf{P}^{g-1}$.

Siano $\tilde{C}_1$ e $\tilde{C}_2 \subset S$ due tali curve. Se $\tilde{C}_1$ è isomorfa a $\tilde{C}_2$ esiste una proiettività ψ di $\mathbf{P}^{g-1}$ tale che $\psi(\tilde{C}_1) = \tilde{C}_2$; per l'unicità di S si ha $\psi(S) = S$ e dunque ψ è un automorfismo di S.

Pertanto $\Phi_{g,m}(\tilde{C}_1) = \Phi_{g,m}(\tilde{C}_2)$ se e solo se esiste un automorfismo ψ di $S \cong S_m$ tale che $\psi(\tilde{C}_1) = \tilde{C}_2$).

Ne segue che

$$\dim \mathfrak{M}^1_{g,3;m} = N(g, m) - \dim \operatorname{Aut}(S_m) \tag{3}$$

dove Aut (S_m) è il gruppo degli automorfismi di S_m.

È noto (cfr. [8]) che:

$$\dim \operatorname{Aut}(S_m) = \begin{cases} m+5 & \text{se } m \neq 0 \\ 6 & \text{se } m = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Si ha poi $N(g, m) = \dim H^0(S_m, \mathcal{O}_{S_m}(3S_\infty + lF)) - 1$.

Ora

$$H^0(S_m, \mathcal{O}_{S_m}(3S_\infty + lF)) \cong H^0(\mathbf{P}^1, \pi_* \mathcal{O}_{S_m}(3S_\infty + lF))$$

ove $\pi : S_m \cong \mathbf{P}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(m)) \to \mathbf{P}^1$ è la proiezione naturale (cfr. [9]).

Per il teorema di Grauert (cfr. [9] pag. 288), $\pi_* \mathfrak{O}_{S_m}(3S_\infty + lF)$ è un fascio localmente libero di rango 4.

Si ha poi:

$$\pi_* \mathcal{O}_{S_m}(3S_\infty + lF) \cong \pi_*(\mathcal{O}_{S_m}(3S_\infty) \otimes \mathcal{O}_{S_m}(lF)) \cong$$

$$\cong \pi_*(\mathcal{O}_{S_m}(3S_\infty) \otimes \pi_* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(l))$$

e per la formula di proiezione

$$\cong \pi_* \mathcal{O}_{S_m}(3S_\infty) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(l).$$

Si puo verificare con un calcolo locale che:

$$\pi_* \mathcal{O}_{S_m}(3S_\infty) = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-m) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-2m) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-3m).$$

Pertanto:

$$\pi_* (\mathcal{O}_{S_m} (3\, S_\infty + l F)) \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} (l) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} (l - m) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} (l - 2\, m) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} (l - 3\, m)$$

e quindi

$$\mathrm{N}\,(g\,,\,m) = 2\,g + 7\,. \tag{5}$$

Da (3), (4) e (5) segue la tesi.

COROLLARIO 2.1. *La generica curva trigonale di genere g è di specie* 0 *se g è pari e di specie* 1 *se g è dispari.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dal fatto che $\dim \mathfrak{M}^1_{g,3;m} < \dim \mathfrak{M}^1_{g,3} = 2\,g + 1$ se $m > 1$.

COROLLARIO 2.2. $\mathfrak{M}^1_{g,3}$ *è unirazionale.*

Dimostrazione. Dal Corollario 2.1 si ha che se g è pari $\mathfrak{M}^1_{g,3} \simeq \overline{\mathfrak{M}^1_{g,3;0}}$ e che se g è dispari $\mathfrak{M}^1_{g,3} = \overline{\mathfrak{M}^1_{g,3;m}}$. L'unirazionalità di $\mathfrak{M}^1_{g,3}$ segue allora dall'Osservazione 2.1.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. MARONI (1946) - *Serie lineari speciali sulle curve trigonali*, «Ann. di Mat. Pura e Appl.», *25* IV.

[2] E. ARBARELLO e M. CORNALBA. *Footnotes to a paper of Beniamino Segre*, preprint.

[3] F. SEVERI (1922) - *Sul teorema di esistenza di Riemann*, «Rend. del Circolo Mat. di Palermo», XLVI.

[4] B. SAINT-DONAT (1973) - *On Petri's analysis of the linear sistem of quadrics through a canonical curve*, «Math. Ann.», *206*.

[5] P. GRIFFITHS e J. HARRIS (1978) - *Principles of algebraic geometry*, *Wiley*.

[6] W. FULTON (1969) - *Hurwitz schemes and irreducibility of the moduli of algebraic curves*, «Ann. of Math.» *90*.

[7] D. MUMFORD (1965) - *Geometric invariant theory*, Springer-Verlag.

[8] C. TURRINI (1979) - *Gli automorfismi delle rigate geometriche razionali*, «Ist. Lombardo Rend. Sc.» A, *113*.

[9] R. HARTSHORNE (1977) - *Algebraic geometry*, Springer-Verlag.