Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Guido Zappa

Un'osservazione sulle classi di Fitting normali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **70** (1981), n.1, p. 1–5.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1981_8_70_1_1_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1981.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 16 gennaio 1981

Presiede il Presidente della Classe GIUSEPPE MONTALENTI

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Algebra. — *Un' osservazione sulle classi di Fitting normali* (*). Nota (**) del Socio GUIDO ZAPPA.

SUMMARY. — We prove that a Fitting class of finite soluble groups is normal if and only if it verifies the condition α) (see n. 2). Unlike the definition of normal Fitting class, this condition is " constructive ".

1. È noto che si dice *classe di Fitting* una classe $\mathfrak{F}$ di gruppi finiti tale che: 1) Se $G \in \mathfrak{F}$ e N è un sottogruppo normale di G, anche $N \in \mathfrak{F}$; 2) $G = N_1 N_2$ con N_1, N_2 sottogruppi normali di G e $N_1, N_2 \in \mathfrak{F}$, anche $G \in \mathfrak{F}$. Se G è un gruppo finito e $\mathfrak{F}$ una classe di Fitting, l'insieme dei sottogruppi normali di G appartenenti ad $\mathfrak{F}$ ammette un massimo $G_{\mathfrak{F}}$, chiamato $\mathfrak{F}$*–radicale* di G. Un sottogruppo H di G è detto $\mathfrak{F}$*–massimale* se $H \in \mathfrak{F}$ e nessun sottogruppo K di G con $H \subsetneqq K$ appartiene ad $\mathfrak{F}$. Una classe di Fitting $\mathfrak{F}$ di gruppi finiti risolubili è detta *normale* se, per ogni gruppo finito risolubile G, $G_{\mathfrak{F}}$ è $\mathfrak{F}$-massimale in G.

La definizione di classe di Fitting è costruttiva, cioè essa asserisce che se certi gruppi appartengono ad una classe di Fitting $\mathfrak{F}$, anche certi altri gruppi, costruiti a partire dai primi, appartengono ad $\mathfrak{F}$. Invece, la definizione di classe di Fitting normale non è costruttiva. Nella presente nota si dimostra che, per una classe di Fitting di gruppi finiti risolubili, la normalità è equivalente ad una condizione, da noi detta condizione α), la quale, a differenza della definizione, ha

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

(**) Presentata nella seduta del 16 gennaio 1981.

carattere costruttivo. La condizione α) suggerisce poi di introdurre il concetto di *classe normale*, che generalizza quello di classe di Fitting normale; ogni classe normale non banale di gruppi finiti risolubili contiene tutti i gruppi abeliani elementari.

Si presuppongono note al lettore tutte le principali proprietà sulle classi di Fitting, contenute nei lavori [1], [2] citati in fondo alla nota.

I risultati contenuti in questa nota sono stati comunicati nell'undicesima conferenza matematica iraniana annuale, tenuta a Mash'had (Iran) dal 28 al 31 marzo 1980.

2. Sia $\mathfrak{F}$ una classe di gruppi finiti risolubili. Si dice che $\mathfrak{F}$ *verifica la proprietà* α) se, per ogni gruppo finito risolubile G verificante le seguenti condizioni:

a) $G = HM$ con H sottogruppo $\mathfrak{F}$–massimale di G, M sottogruppo normale massimale di G, e $M \cap H$ normale in G;

b) $(H/M \cap H)$ non centralizza $(M/M \cap H)$;

c) per ogni sottogruppo normale N di G con $M \cap H \subset N \subsetneqq M$, $(H/M \cap H)$ centralizza $(N/M \cap H)$;

vale anche:

d) $M \in \mathfrak{F}$.

TEOREMA. *Una classe di Fitting di gruppi finiti risolubili è normale se e solo se verifica la proprietà* α).

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{F}$ una classe di Fitting normale di gruppi finiti risolubili, e sia G un gruppo finito risolubile verificante le condizioni *a*), *b*), *c*). Proveremo che allora è verificata anche la *d*).

Essendo $H \in \mathfrak{F}$ e $H \cap M$ normale (in G e) in H, si ha $H \cap M \in \mathfrak{F}$, quindi $H \cap M \subset G_{\mathfrak{F}}$. Non può essere $H \cap M = G_{\mathfrak{F}}$, altrimenti, essendo $\mathfrak{F}$ una classe di Fitting normale, $H \cap M$ sarebbe $\mathfrak{F}$–massimale, onde, essendo $M \cap H \subset H \in \mathfrak{F}$, si avrebbe $H = H \cap M$, cioè $H \subset M$, e $G = HM = M$, assurdo. Pertanto $H \cap M \subsetneqq G_{\mathfrak{F}}$. Se $G_{\mathfrak{F}} \supset M$, essendo M normale, si ha $M \in \mathfrak{F}$, cioè vale la *d*) come si desidera. Possiamo quindi supporre $G_{\mathfrak{F}} \not\supset M$, e quindi $G_{\mathfrak{F}} \cap M \subsetneqq M$. Essendo $H \cap M \subset G_{\mathfrak{F}}$, si ha $H \cap M \subset G_{\mathfrak{F}} \cap M \subsetneqq M$, con $G_{\mathfrak{F}} \cap M$ normale in G. Per la *c*) si ha allora che $(H/H \cap M)$ centralizza $(G_{\mathfrak{F}} \cap M/H \cap M)$, onde $(G_{\mathfrak{F}} \cap M/H \cap M)$ centralizza $(H/H \cap M)$, e di conseguenza $G_{\mathfrak{F}} \cap M$ normalizza H. Ne consegue che H e $G_{\mathfrak{F}} \cap M$ sono normali in $H(G_{\mathfrak{F}} \cap M)$. Essendo $\mathfrak{F}$ una classe di Fitting e poiché $H \in \mathfrak{F}$ e $G_{\mathfrak{F}} \cap M \in \mathfrak{F}$, si ha $H(G_{\mathfrak{F}} \cap M) \in \mathfrak{F}$. Essendo H $\mathfrak{F}$–massimale, si ha $H(G_{\mathfrak{F}} \cap M) = H$, cioè $G_{\mathfrak{F}} \cap M \subset H$, e quindi $G_{\mathfrak{F}} \cap M \subset H \cap M$. Ma $G_{\mathfrak{F}} \supset H \cap M$, quindi $G_{\mathfrak{F}} \cap M \supset H \cap M$, e di conseguenza $G_{\mathfrak{F}} \cap M = H \cap M$. Essendo M normale massimale in G, è $[G : M] = p$ con p primo.

Se fosse $G_{\mathfrak{F}} \subset M$, si avrebbe $G_{\mathfrak{F}} \cap M = G_{\mathfrak{F}}$, e quindi $G_{\mathfrak{F}} = H \cap M$, visto che $G_{\mathfrak{F}} \cap M = H \cap M$; ma ciò è assurdo, perché, essendo $\mathfrak{F}$ normale, $G_{\mathfrak{F}}$ è $\mathfrak{F}$–massimale, mentre $H \cap M \subsetneqq H \subset \mathfrak{F}$, cioè $H \cap M$ non è H–massimale. Ne segue $G_{\mathfrak{F}} \not\subset M$, cioè $G_{\mathfrak{F}} M \supsetneqq M$. Ma, essendo $G_{\mathfrak{F}}$ e M sottogruppi normali di G, anche $G_{\mathfrak{F}} M$ è un sottogruppo normale di G; essendo poi M normale massimale, si ha $G_{\mathfrak{F}} M = G$. Ne segue $p = [G : M] = [G_{\mathfrak{F}} : G_{\mathfrak{F}} \cap M] = [G_{\mathfrak{F}} : H \cap M]$.

Ma H non è normale in G, altrimenti $(H/H \cap M)$ sarebbe normale in $(G/H \cap M)$, e poiché anche $(M/H \cap M)$ è normale in $(G/H \cap M)$, si avrebbe $(G/H \cap M) = (M/H \cap M) \times (H/H \cap M)$, e $(H/H \cap M)$ centralizzerebbe $(M/H \cap M)$, contro la *b*). Poiché invece $G_{\mathfrak{F}}$ è normale in G, si ha $H \neq G_{\mathfrak{F}}$. Non può essere $H \subsetneqq G_{\mathfrak{F}}$, né $G_{\mathfrak{F}} \subsetneqq H$, perché H e $G_{\mathfrak{F}}$ sono ambedue $\mathfrak{F}$–massimali. Ne segue $H \subsetneqq G_{\mathfrak{F}} H$ e $G_{\mathfrak{F}} \subsetneqq G_{\mathfrak{F}} H$, onde $G_{\mathfrak{F}} \cap H \subsetneqq G_{\mathfrak{F}}$ e $G_{\mathfrak{F}} \cap H \subsetneqq H$. Essendo $(G_{\mathfrak{F}}/H \cap M)$ e $(H/H \cap M)$ d'ordine p, ed essendo $G_{\mathfrak{F}} \cap H \supset H \cap M$, si ha $G_{\mathfrak{F}} \cap H = H \cap M$, onde $(G_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}} \cap H)$ e $(H/G_{\mathfrak{F}} \cap H)$ hanno ordine p, e $(G_{\mathfrak{F}} H/G_{\mathfrak{F}} \cap H) = (G_{\mathfrak{F}} H/H \cap M)$ ha ordine p^2. Segue che $(H/H \cap M)$ è normale in $(G_{\mathfrak{F}} H/H_{\mathfrak{F}} \cap M)$, cioè H è normale in $G_{\mathfrak{F}} H$. Essendo anche $G_{\mathfrak{F}}$ normale in $G_{\mathfrak{F}} H$, e $G_{\mathfrak{F}}$ ed H in $\mathfrak{F}$, si ha $G_{\mathfrak{F}} H \in \mathfrak{F}$, il che è assurdo perché H è $\mathfrak{F}$–massimale e $H \neq G_{\mathfrak{F}}$. Pertanto $M \in \mathfrak{F}$.

Viceversa, sia $\mathfrak{F}$ una classe di Fitting non normale di gruppi finiti risolubili; dimostriamo che esiste un gruppo finito risolubile $G = HM$ per cui sono verificate le *a*), *b*), *c*) ma non la *d*). Essendo $\mathfrak{F}$ non normale, esistono gruppi risolubili G per cui $G_{\mathfrak{F}}$ non è $\mathfrak{F}$–massimale. Sia G di ordine minimo tra i gruppi di tal tipo, e sia M un sottogruppo normale massimale di G. Sia poi H un $\mathfrak{F}$–iniettore di G. Allora $H \cap M$ è un $\mathfrak{F}$–iniettore di M. Per l'ipotesi di minimalità su G, $M_{\mathfrak{F}}$ è $\mathfrak{F}$–massimale, e quindi è l'unico $\mathfrak{F}$–iniettore di M. Pertanto $H \cap M = M_{\mathfrak{F}}$. Essendo $M_{\mathfrak{F}}$ caratteristico in M, ed M normale in G, si ha che $M_{\mathfrak{F}}$ è normale in G, e poiché $M_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, si ha $M_{\mathfrak{F}} \subset G_{\mathfrak{F}}$. Ma essendo H un $\mathfrak{F}$–iniettore, si ha $H \supset G_{\mathfrak{F}}$. Poiché H è $\mathfrak{F}$–massimale, mentre $G_{\mathfrak{F}}$ non lo è, si ha $H \supsetneqq G_{\mathfrak{F}} \supset M_{\mathfrak{F}}$. Essendo $G_{\mathfrak{F}}$ ed M normali in G, anche $G_{\mathfrak{F}} M$ lo è. Poiché M è normale massimale in G, si ha $G_{\mathfrak{F}} M = G$ o $G_{\mathfrak{F}} M = M$.

Mostriamo ora che non può essere $G_{\mathfrak{F}} M = G$. Si noti anzitutto che $H \not\subset M$. Infatti, se fosse $H \subset M$, si avrebbe $H \cap M = H$, cioè $M_{\mathfrak{F}} = H$; e poichè $M_{\mathfrak{F}}$ è normale in G, anche H lo sarebbe, onde si avrebbe $H = G_{\mathfrak{F}}$, contro l'ipotesi. Essendo quindi $H \not\subset M$, si ha $HM \supsetneqq M$. Essendo M normale massimale nel gruppo finito risolubile G, è $[G : M] = p$ con p primo, e pertanto $HM = G$. Se fosse anche $G_{\mathfrak{F}} M = G$, tenuto conto del fatto che $H \cap M = M_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}} \cap M$, si avrebbe $|H| = \dfrac{|G|\,|H \cap M|}{|M|} = \dfrac{|G|\,|G_{\mathfrak{F}} \cap M|}{|M|} = |G_{\mathfrak{F}}|$, e poiché $H \supset G_{\mathfrak{F}}$, si avrebbe $H = G_{\mathfrak{F}}$, cioè $G_{\mathfrak{F}}$ sarebbe un $\mathfrak{F}$–iniettore, contro l'ipotesi. Pertanto $G_{\mathfrak{F}} M = M$, cioè $G_{\mathfrak{F}} \subset M$, e poichè $G_{\mathfrak{F}} \subset H$, è $G_{\mathfrak{F}} \subset H \cap M = M_{\mathfrak{F}}$. Poiché d'altra parte $G_{\mathfrak{F}} \supset M_{\mathfrak{F}}$, si ha $G_{\mathfrak{F}} = M_{\mathfrak{F}} = H \cap M$.

Osserviamo ora che è $G = HM$ con H sottogruppo $\mathfrak{F}$–massimale di G (perchè $\mathfrak{F}$–iniettore), M sottogruppo normale massimale di G, e $M \cap H$ normale in G, perché coincidente con $G_{\mathfrak{F}}$. Pertanto G verifica la *a*).

Mostriamo ora che G verifica la *b*). Se infatti $(H/M \cap H)$ centralizzasse $(M/M \cap H)$, a sua volta $(M/M \cap H)$ centralizzerebbe $(H/M \cap H)$, onde M normalizzerebbe H. Allora H sarebbe normale in $HM = G$, onde, essendo $H \in \mathfrak{F}$, sarebbe $H \subset G_{\mathfrak{F}}$, assurdo. Pertanto G verifica la *b*).

Proviamo ora che G verifica la *c*). Sia pertanto N un sottogruppo normale di G con $M \cap H \subset N \subsetneqq M$. Dobbiamo mostrare che $(H/M \cap H)$ centralizza $(N/M \cap H)$. Sia $K = HN$. Essendo $N \subset M$, è $N \cap H \subset M \cap H$; ma $M \cap H \subset N$, $M \cap H \subset H$, onde $M \cap H \subset N \cap H$, e di conseguenza $N \cap H = M \cap H$. Non può essere $K = G$, altrimenti $|N| = \dfrac{|G|\,|N \cap H|}{|H|} = \dfrac{|G|\,|M \cap H|}{|H|} = |M|$, contro l'ipotesi $N \subsetneqq M$. Essendo $H \subset K$ e H $\mathfrak{F}$–iniettore di G, si ha che H è anche $\mathfrak{F}$–iniettore di K, onde, per la minimalità di G, è $H = K_{\mathfrak{F}}$, e quindi H è normale in K. Essendo anche N normale in K, si ha $(K/N \cap H) = (H/N \cap H) \times (N/N \cap H)$, e poichè $N \cap H = M \cap H$, è $(K/M \cap H) = (H/M \cap H) \times (N/M \cap H)$ onde $(H/M \cap H)$ centralizza $(N/M \cap H)$. Pertanto G verifica la *c*).

Non può essere $M \in \mathfrak{F}$, altrimenti $M = M_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}$ e $H \supset M$, quindi $G = HM = H$, assurdo. Pertanto G non verifica la *d*). Il teorema è cosi dimostrato.

Come conseguenza del teorema si ritrova il seguente noto risultato:

COROLLARIO (Cossey). *Ogni classe di Fitting normale non banale contiene la classe dei gruppi finiti nilpotenti.*

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{F}$ una classe di Fitting normale non banale. Allora essa contiene qualche gruppo $G \neq \langle 1 \rangle$. È noto che, se q è un divisore primo di $|G|$, $\mathfrak{F}$ contiene tutti i gruppi di ordine potenza di q. Sia p un altro numero primo. Sia n il più piccolo intero positivo tale che $p^n \equiv 1 \pmod q$ e sia P un gruppo abeliano elementare d'ordine p^n. Allora il gruppo degli automorfismi di P ha ordine $(p^n - 1)(p^n - p), \cdots, (p^n - p^{n-1})$ onde, essendo q un divisore di $p^n - 1$, P ha un automorfismo α di periodo q. Sia Q un gruppo d'ordine q, t un suo generatore, e sia $G = QP$, con P normale in G e $t^{-1}ht = h^{\alpha}$ per ogni $h \in P$. Allora $Q \in \mathfrak{F}$. Se Q non è $\mathfrak{F}$–massimale in G, un sottogruppo $\mathfrak{F}$–massimale di G contenente propriamente Q ha ordine divisibile per p, e di conseguenza $\mathfrak{F}$ contiene tutti i gruppi di ordine potenza di p. Supponiamo pertanto Q $\mathfrak{F}$–massimale in G. Essendo P normale massimale in G e $P \cap Q = \langle 1 \rangle$ normale in G, la *a*) del teorema è verificata. Inoltre Q non centralizza P, onde anche la *b*) è verificata. Se N è un sottogruppo normale di G tale che $N \subsetneqq P$, è $|N| = p^m$ con $m < n$, onde l'ordine del gruppo degli automorfismi A di N è $(p^m - 1)(p^m - p), \cdots, (p^m - p^{m-1})$, Poiché q non divide nessun numero della forma $p^r - 1$ con $r < n$, q non divide $|A|$, e quindi Q centralizza N, ossia la *c*) del teorema è verificata. In base al teorema, $P \in \mathfrak{F}$, e quindi $\mathfrak{F}$, contenendo un gruppo di ordine divisibile per p, contiene tutti i gruppi di ordine potenza di p, e quindi tutti i gruppi nilpotenti. Il corollario è così provato.

3. Il precedente teorema suggerisce di introdurre il concetto di classe normale, che generalizza quello di classe di Fitting normale.

Una classe $\mathfrak{F}$ di gruppi finiti risolubili si dice *classe normale* se:

a) per ogni $G \in \mathfrak{F}$ e per ogni sottogruppo normale N di G si ha $N \in \mathfrak{F}$;

b) Per ogni $A, B \in \mathfrak{F}$ si ha $A \times B \in \mathfrak{F}$;

c) $\mathfrak{F}$ verifica la proprietà α).

Si ha facilmente che:

Una classe normale non banale $\mathfrak{F}$ *contiene tutti i gruppi abeliani elementari.*

Infatti, $\mathfrak{F}$ contiene un gruppo finito risolubile $\neq \langle 1 \rangle$, e quindi ogni suo sottogruppo subnormale (in base alla *a*)); pertanto $\mathfrak{F}$ contiene un gruppo d'ordine p, con p numero primo conveniente. Sia q un numero primo $\neq p$. Ragionando come nella dimostrazione del corollario (n. 2) si vede che $\mathfrak{F}$ deve contenere un gruppo abeliano elementare Q d'ordine q^n, con n intero positivo conveniente. Ma Q ha un sottogruppo normale d'ordine q, che, per la *a*), deve appartenere ad $\mathfrak{F}$. Segue che $\mathfrak{F}$ contiene tutti i gruppi d'ordine primo, quindi, per la *b*), contiene tutti i gruppi abeliani elementari.

Si pongono, a tal punto, alcuni problemi:

1) L'intersezione di due classi normali è una classe normale?

2) Come sono fatte le classi normali non banali minimali? (Nel caso che il problema 1) abbia risposta affermativa, ci sarebbe una sola classe normale non banale minimale).

BIBLIOGRAFIA

[1] B. FISCHER, W. GASCHÜTZ, B. HARTLEY (1967) – *Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen*, «Math. Zeit.», *102*, 337–339.

[2] D. BLESSENOHL, W. GASCHÜTZ (1970) – *Ueber normale Schunk – und Fittingklassen* «Math. Zeit.», *118*, 1–8.