Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Domenico Fusco

Alcune considerazioni su una classe di sistemi del primo ordine quasi-lineari conservativi ed iperbolici di due equazioni in due variabili indipendenti

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **69** (1980), n.6, p. 386–398.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1980_8_69_6_386_0>

Fisica matematica. — *Alcune considerazioni su una classe di sistemi del primo ordine quasi-lineari conservativi ed iperbolici di due equazioni in due variabili indipendenti* (*). Nota di DOMENICO FUSCO, presentata (**) dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — In this paper we determine a class of first order quasi-linear hyperbolic systems in conservative form involving two independent and two dependent variables which are not deducible, in general, from a variational principle but can be reduced to a Godunov's symmetric form [5], [6] where the coefficient of the field spatial derivative is a constant matrix. That enables us to extend to these systems several results obtained by G. Boillat in [8], [9] and concerning with shocks in quasi-linear systems of first order coming out from a variational principle. In the paper also are pointed out several physical examples where the present theory can be applied.

1. INTRODUZIONE

Numerosi modelli matematici, atti a descrivere l'evoluzione di vari fenomeni fisici, si presentano sotto la forma di un sistema costituito da due equazioni quasi-lineari conservative del primo ordine in due variabili indipendenti x, t e due variabili dipendenti w e z del tipo

$$(1) \qquad \begin{aligned} &\partial_t w + \partial_x F(w, z) = a(w, z, x, t) \\ &\partial_t z + \partial_x G(w, z) = b(w, z, x, t) \qquad \partial_t = \partial/\partial t \;;\; \partial_x = \partial/\partial x\,. \end{aligned}$$

Ci si può chiedere, allora, sotto quali condizioni il sistema (3), non deducibile in generale da un principio variazionale, è riconducibile ad una forma conservativa del tipo

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\partial_t(\partial L/\partial\Theta) + \partial_x(\partial L/\partial r) = M(\Theta, r, x, t) \\ &\partial_t r - \partial_x \Theta = b(\Theta, r, x, t) \end{aligned}$$

con $L = L(\Theta, r)$.

Si riconosce facilmente che la struttura dell'operatore differenziale che figura in (2), formalmente, coincide con quella del sistema quasi-lineare conservativo del primo ordine dedotto dall'equazione di Eulero-Lagrange, per

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei contratti di ricerca del C.N.R., Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica.

(**) Nella seduta del 6 dicembre 1980.

una lagrangiana del tipo $L = L(\psi_t, \psi_x)$ dove $\psi = \psi(x, t)$ indica un campo scalare e $\psi_t = \partial\psi/\partial t$, $\psi_x = \partial\psi/\partial x$ (1).

Un vantaggio notevole offerto dalla forma conservativa (2), si ha nella possibilità di associare al sistema (2) una legge di conservazione supplementare, (vedi [1], [2], [3], [4], [5]), che generalizza, in modo naturale, l'usuale legge di conservazione dell'energia, conseguenza dell'equazione di Eulero–Lagrange. Ciò consente di potere ricondurre il sistema base (2) ad una particolare forma simmetrica del tipo di Godunov [6], analoga a quella dedotta da G. Boillat in [7], per i sistemi quasi–lineari del primo ordine che derivano da un principio variazionale e che, tra l'altro, permette di estendere opportunamente al caso del sistema (2), alcuni dei risultati sugli urti dedotti in [5], [8], [9].

Nel N. 2, dopo avere effettuato un'opportuna trasformazione delle variabili di campo, si deducono le condizioni sotto cui il sistema (1) può essere ricondotto alla forma (2). Si discutono poi, nel N. 3, alcuni casi particolari di integrabilità delle condizioni dedotte nel N. 2, che trovano riscontro in situazioni fisicamente interessanti. Nei N. 4, 5, 6 vengono discussi vari esempi fisici di sistemi che si presentano usualmente nella forma (1) e che possono essere ricondotti alla forma conservativa (2). Si ha occasione, tra l'altro, di evidenziare nei singoli casi le condizioni sotto cui la densità di energia è convessa.

Osserviamo, infine, che, nell'ambito della problematica trattata nel presente lavoro, rientra anche il sistema quasi–lineare del primo ordine dedotto recentemente in $[10]_1$, nello studio di alcune proprietà connesse con il modello iperbolico per la conduzione del calore nei conduttori rigidi in quiete, proposto in $[10]_2$ da M. E. Gurtin e A. C. Pipkin.

2. CONSIDERAZIONI GENERALI

Per stabilire le condizioni sotto cui il sistema (1) é riconducibile alla forma (2), effettuiamo la seguente trasformazione di variabili di campo

$$\begin{aligned} \Theta &= -G(w, z) \\ r &= z . \end{aligned} \tag{3}$$

(1) Ricordiamo che l'equazione del secondo ordine di Eulero–Lagrange

$$\partial_t(\partial L/\partial\psi_t) + \partial_x(\partial L/\partial\psi_x) = 0$$

può essere ricondotta al seguente sistema quasi–lineare del primo ordine conservativo nelle variabili $u = \partial L/\partial\psi_t$, $v = \psi_x$:

$$\partial_t u + \partial_x(\partial L/\partial v) = 0 \quad ; \quad \partial_t v - \partial_x \varnothing = 0 \quad ; \quad \varnothing = \psi_t .$$

Per una discussione generale su tale argomento rinviamo a [5], [7].

Ovviamente le (3) hanno senso se vale la condizione

$$(4)\qquad \mathrm{J}\begin{bmatrix}\Theta\,,r\\ w\,,z\end{bmatrix}=\frac{\partial(\Theta\,,r)}{\partial(w\,,z)}=-\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial w}\neq 0\,.$$

Osservando che, tramite le (3), nell'ipotesi (4), è $w=w(\Theta\,,r)$, $z=r$, l'equivalenza del sistema (1) con (2) comporta che sia verificata la relazione [2]

$$(5)\qquad \{\mathrm{L}_{\Theta\Theta}(w_r+\mathrm{F}_\Theta)-2\,w_\Theta\,\mathrm{L}_{\Theta r}\}\,\partial_x\Theta+\{\mathrm{F}_r\,\mathrm{L}_{\Theta\Theta}-w_\Theta\,\mathrm{L}_{rr}\}\,\partial_x r=$$
$$=\mathrm{L}_{\Theta\Theta}(a-w_r\,b)+w_\Theta(\mathrm{L}_{\Theta r}\,b-\mathrm{M})\,.$$

Dovendo la (5) essere soddisfatta $\forall\partial_x\Theta\,,\partial_x r$ seguono le condizioni:

$$(6)\qquad \begin{aligned}&(w_r+\mathrm{F}_\Theta)/w_\Theta=2\,\mathrm{L}_{\Theta r}/\mathrm{L}_{\Theta\Theta}\\ &\mathrm{F}_r/w_\Theta=\mathrm{L}_{rr}/\mathrm{L}_{\Theta\Theta}\end{aligned}$$

e

$$(7)\qquad \mathrm{M}=\mathrm{L}_{\Theta r}\,b+\frac{(a-bw_r)\,\mathrm{L}_{\Theta\Theta}}{w_\Theta}\,.$$

Le (6) rappresentano un sistema di due equazioni differenziali del secondo ordine per la funzione $\mathrm{L}(\Theta\,,r)$. Nei casi di integrabilità può essere determinata la $\mathrm{L}(\Theta\,,r)$ e quindi, tramite la (7), la $\mathrm{M}(\Theta\,,r\,,x\,,t)$; di conseguenza come sistema fondamentale può essere assunto (2) che può scriversi anche sotto la forma:

$$(8)\qquad \partial_t\underline{\mathrm{U}}+\partial_x\underline{f}(\underline{\mathrm{U}})=\underline{\mathrm{B}}(\underline{\mathrm{U}}\,,x\,,t)$$

con

$$(9)\qquad \underline{\mathrm{U}}=\left\|\begin{matrix}\mathrm{L}_\Theta\\ r\end{matrix}\right\|\qquad \underline{f}(\underline{\mathrm{U}})=\left\|\begin{matrix}\mathrm{L}_r\\ -\Theta\end{matrix}\right\|\qquad \underline{\mathrm{B}}(\underline{\mathrm{U}}\,,x\,,t)=\left\|\begin{matrix}\mathrm{M}\\ b\end{matrix}\right\|\,.$$

Tenendo conto della già osservata analogia tra il sistema (8) e quello del primo ordine dedotto dall'equazione di Eulero-Lagrange, (vedi Nota (1)), e ricordando i risultati stabiliti in [3] e [4], è immediato verificare che dal sistema (8) discende come conseguenza la seguente legge di conservazione supplementare:

$$(10)\qquad \partial_t h+\partial_x h_1=g(\underline{\mathrm{U}}\,,x\,,t)$$

dove

$$(11)\qquad h=\Theta\mathrm{L}_\Theta-\mathrm{L}\quad;\quad h_1=\Theta\mathrm{L}_r\quad;\quad g(\underline{\mathrm{U}}\,,x\,,t)=\underline{\check{\mathrm{U}}}'\cdot\underline{\mathrm{B}}$$

(2) Qui e nel seguito per indicare le derivate parziali di una funzione $f(\Theta\,,r)$ rispetto ai suoi argomenti verranno usate le notazioni:

$$f_\Theta=\partial f/\partial\Theta\quad;\quad f_r=\partial f/\partial r\,.$$

essendo $\vee$ l'operatore di trasposizione e

$$\check{\underline{U}}' = \nabla h = (\Theta, -L_r) \quad ^{(3)} \tag{12}$$

con $\nabla = (\partial/\partial\underline{U}) = (\partial/\partial L_\Theta, \partial/\partial r)$.

La condizione di convessità per la funzione $h = h(\underline{U})$ data dalla $(11)_1$ è esprimibile nella forma [4], [5]

$$\delta^2 h = \delta\check{\underline{U}} \cdot \delta\underline{U}' = \delta\check{\underline{U}}\, H\, \delta\underline{U} > 0, \qquad \forall\, \delta\underline{U} \neq 0 \tag{13}$$

dove $\delta\underline{U}$ indica un'arbitraria variazione del campo $\underline{U}$ e H una matrice hessiana definita da

$$H = \nabla\check{\nabla} h = \nabla\underline{U}'. \tag{14}$$

La (15) comporta, in particolare, la regolarità della matrice H e, quindi, l'invertibilità della trasformazione di variabili di campo (12) (vedi [11]).

Il sistema (8), scritto nelle nuove variabili di campo $\underline{U}'$ definite dalla (12), assume la seguente forma simmetrica:

$$H'\,\partial_t \underline{U}' + A'\,\partial_x \underline{U}' = \underline{B}(\underline{U}', x, t) \tag{15}$$

con

$$H' = H^{-1} = \nabla'\underline{U} \quad ; \quad A' = \nabla' \underline{f} = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}; \tag{16}$$
$$\nabla' = (\partial/\partial\underline{U}') = (\partial/\partial\Theta, -\partial/\partial L_r).$$

La (15), a meno del secondo membro coincide con la forma simmetrica di Godunov a cui è riconducibile un sistema quasi-lineare del primo ordine, deducibile da un principio variazionale [7].

È opportuno mettere in rilievo che, nel caso in cui la (13) è verificata, il sistema (15) è un sistema simmetrico iperbolico nel senso di Friedrichs. Per una vasta bibliografia sulle proprietà di tali sistemi, rinviamo ai lavori [1], [2], [4], [5].

Chiudiamo questo numero osservando che se nel sistema (1) è $b = 0$, é lecito introdurre una funzione $\psi(x, t)$ in modo tale da potere definire

$$\Theta = -G(w, z) = \psi_t \quad , \quad r = z = \psi_x \tag{17}$$

sicchè la $(1)_2$ è interpretabile come la condizione di Schwarz sulle derivate seconde miste della ψ. Dopo avere effettuato la trasformazione di variabili (3) nell'ipotesi (4), la $(1)_1$ si può riguardare come un'equazione non lineare del secondo ordine per la funzione $\psi(x, t)$ del tipo

$$\partial_t w(\psi_t, \psi_x) + \partial_x F(\psi_t, \psi_x) = a(\psi_t, \psi_x, x, t). \tag{18}$$

(3) Per un'approfondita discussione sulle proprietà del campo $\underline{U}'$ e sul suo ruolo fondamentale nella teoria dei sistemi quasi-lineari conservativi ed iperbolici del primo ordine compatibili con una legge di conservazione supplementare rinviamo a [4].

La funzione ψ è conosciuta usualmente come funzione di flusso, (vedi ad esempio [12]).

Se inoltre è $a = 0$, le (6) si riconducono, (nel caso di un campo scalare), alle condizioni dedotte in [13], imponendo che un'opportuna classe di equazioni del secondo ordine, quasi-lineari ed omogenee, derivi da un principio variazionale.

3. Alcuni casi di integrabilità delle (6)

I) Supponiamo che la trasformazione di variabili (3) conduca ad una relazione del tipo

$$w(\Theta, r) = -\Theta . \tag{19}$$

Come vedremo nei prossimi numeri, la (19) è verificata in vari esempi fisicamente interessanti.

Dopo la (19) le (6) si particolarizzano nelle

$$\begin{aligned} -F_\Theta &= 2 L_{\Theta r}/L_{\Theta\Theta} \\ -F_r &= L_{rr}/L_{\Theta\Theta} \end{aligned} \tag{20}$$

che conducono alle seguente condizione di compatibilità

$$\partial_\Theta (L_{\Theta\Theta} L_{rr} - L^2_{\Theta r}) = 0 \Rightarrow L_{\Theta\Theta} L_{rr} - L^2_{\Theta r} = \bar{m}(r) . \tag{21}$$

Tenendo conto delle (20) nella (21), si ha, in definitiva;

$$L^2_{\Theta\Theta} = -\bar{m}(r) \Big/ \left(F_r + \frac{1}{4} F^2_\Theta \right) . \tag{22}$$

L'integrazione della (22) consente di determinare, nel caso in esame, la forma più generale della $L(\Theta, r)$.

Supponiamo ora che il sistema (8) sia completamente eccezionale nel senso di Lax [14], e quindi valgono le condizioni

$$\nabla\lambda^{(i)} \cdot \underline{d}^{(i)} = 0 \qquad i = 1, 2 \tag{23}$$

dove $\underline{d}^{(i)}$ indicano gli autovettori destri della matrice $A = \nabla f$ corrispondenti, rispettivamente, all'autovalore $\lambda^{(i)}$. Come è noto, [14], [15], se le (23) sono verificate, un'onda di discontinuità debole compatibile con il sistema (8) e prapagantesi con velocità $\lambda^{(i)}$ non può mai evolvere in onda d'urto non lineare. Nel prossimo numero si avrà occasione di mostrare un esempio tipico di sistema completamente eccezionale.

Si vede facilmente, [16], [17] che le (23) si traducono nelle seguenti condizioni per la $F(\Theta, r)$

$$\partial_\Theta \left(F_r + \frac{1}{4} F_\Theta^2 \right) = 0 \qquad \partial_\Theta = \partial / \partial\Theta . \tag{24}$$

$$F_r F_{\Theta\Theta} + F_{rr} = 0$$

In tal caso, tenendo conto della $(24)_1$ nella (22), si ottiene che la $L(\Theta, r)$ deve essere della forma:

$$L(\Theta, r) = \frac{l(r)}{2} \Theta^2 + m(r)\Theta + n(r) \tag{25}$$

con $l(r)$, $m(r)$, $n(r)$ funzioni da determinarsi in modo tale che le (20) siano soddisfatte. A tale scopo ricordiamo che la soluzione del sistema (24), trovata da G. Boillat in [16], è data da

$$F(\Theta, r) = - \frac{-\Theta^2 + \bar{b}\Theta + \bar{c}r + \bar{n}}{r + \bar{s}} \tag{26}$$

con $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{n}$ costanti arbitrarie di integrazione. Imponendo che le (20) siano identicamente soddisfatte dalla (25), dopo aver tenuto conto della (26), si ottiene la seguente determinazione per la $L(\Theta, r)$

$$L(\Theta, r) = \frac{\alpha}{2(r + \bar{s})} \cdot \tag{27}$$

$$\cdot \{\Theta^2 + \beta(r + \bar{s})\Theta + \gamma(r + \bar{s})^2 - \bar{b}\Theta + \delta(r + \bar{s}) + \mu\}$$

con α, β, γ, δ costanti arbitrarie di integrazione e $\mu = \bar{s}\bar{c} - \bar{n}$.

Osserviamo infine, che, se nella $(1)_2$ è $b = 0$, hanno senso le (17) e, pertanto, dopo la (19) la (18) si specializza nella seguente equazione del secondo ordine non lineare in forma canonica per la funzione di flusso $\psi(x, t)$:

$$\partial_{tt}\psi + \partial_x \bar{F}(\psi_t, \psi_x) = -a(\psi_t, \psi_x, x, t) \quad ; \quad \partial_{tt} = \partial^2/\partial t^2 \quad ; \quad \bar{F} = -F. \tag{28}$$

È immediato verificare che la (27) fornisce la più generale lagrangiana associata alla (28), con $a = 0$, nel caso in cui essa risulta completamente eccezionale (4).

II) Supponiamo che $w_r = F_\Theta$. In tal caso, evidentemente, le (6) sono soddisfatte con $L(\Theta, r)$ determinata da

$$L_\Theta = kw \quad ; \quad L_r = kF \; ^{(5)} \qquad (k = \text{cost.}) \tag{29}$$

e la (7) si particolarizza nella $M = ka$.

Un esempio fisico che rientra nel caso II) verrà trattato nel N. 6.

(4) Su questo stesso argomento vedi [17].

(5) Cfr., per il caso unidimensionale, con i risultati dedotti da A. Donato in [18].

4. Fluidi isentropici

Il sistema delle equazioni, in forma conservativa, che governano il moto unidimensionale di un fluido isentropico si presenta, usualmente, sotto la forma (1) con

$$w = \rho u \quad ; \quad F = \rho u^2 + p \quad ; \quad z = \rho \quad ; \quad G = \rho u \tag{30}$$

$$a = b = 0 . \tag{31}$$

Nelle (30) ρ, u denotano, rispettivamente, la densità di massa e la velocità del fluido, mentre $p = p(\rho)$ rappresenta la pressione.

Dopo le (30), la trasformazione di variabili (3) si particolarizza nella

$$\begin{aligned} -\rho u &= \Theta \\ \rho &= r \end{aligned} \qquad J\begin{bmatrix} \Theta , r \\ w , z \end{bmatrix} = -1 . \tag{32}$$

Tenendo conto delle (30) e (32), si vede immediatamente che al sistema in esame si può applicare il procedimento visto nel caso I) del numero precedente. Osservando che, dopo le (32), la $(30)_2$ assume la forma:

$$F(\Theta , r) = (\Theta^2/r + p(r)) , \tag{33}$$

il sistema delle (20) si particolarizza nelle

$$\begin{aligned} -\Theta/r &= L_{r\Theta}/L_{\Theta\Theta} \\ -p'(r) + \Theta^2/r^2 &= L_{rr}/L_{\Theta\Theta} \end{aligned} \qquad ' = d/dr. \tag{34}$$

Tenendo presente che nel caso in esame è sempre soddisfatta la $(24)_1$ dalla (33), *quale che sia il legame costitutivo $p = p(r)$, dalla (22) si deduce che* la forma più generale della funzione $L(\Theta , r)$ é ancora fornita dalla (25). Imponendo che le (34) siano identicamente soddisfatte dopo avere sostituito l'espressione di $L(\Theta , r)$ data dalla (25), si ottiene:

$$\frac{l'}{l} = -\frac{1}{r} \quad ; \quad m = \bar{m} = \text{cost.} \quad , \quad n'' = -\frac{1}{r} p' . \tag{35}$$

Integrando le (35), la (25) si particolarizza nella

$$L(\Theta , r) = \bar{b} r (\Theta^2/2 r^2 - e) + \bar{m}\Theta + \bar{n} r + \bar{d} \tag{36}$$

dove $e = \int \frac{p}{\rho^2} d\rho$ rappresenta l'energia interna e $\bar{b}$, $\bar{m}$, $\bar{d}$ sono arbitrarie costanti di integrazione. Nel seguito riterremo $\bar{b} = 1$, $\bar{m} = \bar{n} = \bar{d} = 0$.

In base alla teoria esposta nel N. 2 il sistema in esame può quindi essere ricondotto alla forma conservativa (8), dove le (9) si specializzano nelle

$$(37) \qquad \underline{U} = \begin{Vmatrix} -u \\ \rho \end{Vmatrix} \quad , \quad \underline{f}(\underline{U}) = \begin{Vmatrix} -(i + u^2/2) \\ \rho u \end{Vmatrix} \quad , \quad \underline{B} = 0$$

essendo $i = e + p/\rho$ l'entalpia del fluido.

Poichè dopo le (36) e (37), le (11) e (12) si particolarizzano nelle

$$(38) \qquad h = \varepsilon = \rho(e + u^2/2) \quad ; \quad h_1 = u(\varepsilon + p) \quad ; \quad g = 0$$

$$(39) \qquad \check{\underline{U}}' = (-\rho u, i + u^2/2),$$

la (10), nel caso in esame, si specializza nell'usuale legge di conservazione dell'energia per un fluido isentropico. Essendo inoltre, per la (39)

$$(40) \qquad H = \nabla \underline{U}' = \begin{Vmatrix} \rho & -u \\ -u & c^2/\rho \end{Vmatrix} \qquad c^2 = dp/d\rho > 0$$

si ha che la condizione di convessità (13) per la densità di energia $(38)_1$ assume la forma

$$(41) \qquad \rho(\delta u)^2 + 2u(\delta u)(\delta\rho) + \frac{c^2}{\rho}(\delta\rho)^2 > 0, \qquad \forall\, \delta\underline{U} \neq 0.$$

È facile constatare che la (41) è certamente verificata se il moto del fluido è subsonico, cioè $|u| < c$. Dopo le (37), (39), (40) è immediato scrivere per il sistema in esame la forma simmetrica di Godunov (15).

Vogliamo ora considerare il caso in cui il sistema dei fluidi isentropici, esaminato in questo numero, risulta completamente eccezionale [14]. Come è noto, in regime subsonico è possibile assumere il seguente legame costitutivo, dovuto a Von-Kàrmàn [19], tra pressione e densità

$$(42) \qquad p = -\frac{\hat{a}^2}{\rho} + \hat{b} \qquad (\hat{a}, \hat{b} \text{ costanti}).$$

Ricordiamo che la (42) è l'unica relazione costitutiva del tipo $p = p(\rho)$ che rende il sistema dei fluidi completamente eccezionale, [20].

Nel caso del moto unidimensionale che rientra nella nostra trattazione, dopo avere tenuto conto della (42) nell'espressione (33) di $F(\Theta, r)$, si vede facilmente che le (24) sono identicamente soddisfatte ed inoltre la (36) si specializza nella:

$$(43) \qquad L(\Theta, r) = \frac{\Theta^2 + 2\hat{b}r - \hat{a}^2}{2r} = \frac{\rho}{2}\left(u^2 - c^2 + 2\frac{\hat{b}}{\rho}\right).$$

È immediato verificare che la (43) rientra nella classe delle (25), per opportuna scelta delle costanti arbitrarie di integrazione.

Concludiamo questo numero osservando che nel caso del sistema dei fluidi isentropici scritto sotto la forma conservativa (8), sono applicabili tutti i risultati sugli urti, dedotti da G. Boillat in [5], [7], [9].

5. Onde d'acqua in un canale di profondità arbitraria e larghezza variabile

In questo numero vogliamo considerare un tipico sistema genuinamente non lineare, [14], dedotto recentemente in [21] da A. Jeffrey e J. Mvungi nello studio della propagazione unidimensionale delle onde d'acqua in un canale di profondità arbitraria e larghezza variabile, a pareti verticali. Scelto nel modo usuale un riferimento con l'asse delle x appartenente alla superficie orizzontale individuata dal pelo libero dell'acqua all'equilibrio e l'asse verticale delle y orientato verso l'alto, l'equazione del fondo del canale può scriversi: $y + \hat{h}(x) = 0$. Se $\eta(x, t)$ e u rappresentano, rispettivamente, lo spostamento verticale dalla superficie di equilibrio dell'acqua e la componente della velocità secondo l'asse delle x orientato nel senso del moto, nell'ipotesi di potere ritenere trascurabile il moto trasversale delle particelle d'acqua, si ottengono, (vedi [21]), le seguenti equazioni per la propagazione unidimensionale in un canale di profondità arbitraria e larghezza variabile:

$$
\begin{aligned}
&\partial_t u + u\partial_x u + g\partial_x \eta = 0 \\
&\partial_t \eta + \partial_x \{u(\eta + \hat{h})\} + u(\eta + \hat{h})\frac{W}{W_x} = 0 .
\end{aligned}
\tag{44}
$$

Nelle (44) g indica l'accelerazione di gravità $W = W(x)$ la larghezza del canale e $W_x = dW/dx$.

Tenendo presente che il sistema delle (44) differisce dal classico sistema di equazioni che governa il moto delle onde in acqua « bassa », (vedi [22]), solo per la presenza nella $(44)_2$ del contributo dovuto alla variazione in larghezza del canale, si po sono opportunamente estendere, al caso in esame, le considerazioni svolte da J. J. Stoker in [22]. In particolare, introducendo la quantità

$$
c^2 = g(\eta + \hat{h})
\tag{45}
$$

che assume un ruolo analogo a quello della velocità del suono in gasdinamica, si vede facilmente che le (44) possono scriversi sotto la forma conservativa (1) con

$$
w = c^2 u \quad ; \quad F = c^2 u^2 + c^4/2 \quad ; \quad z = c^2 \quad ; \quad G = c^2 u
\tag{46}
$$

$$
\begin{aligned}
&a = c^2 \hat{H}_x - c^2 u^2 W_x/W \quad ; \quad b = -c^2 u W_x/W ; \\
&\hat{H} = g\hat{h} \quad ; \quad \hat{H}_x = d\hat{H}/dx .
\end{aligned}
\tag{47}
$$

È immediato verificare che, una volta fatta l'identificazione

$$\rho = c^2 \quad ; \quad p = \rho^2/2 = c^4/2 \tag{48}$$

le (46) coincidono, essenzialmente, con le (30) viste nel numero precedente.

L'analogia formale stabilita mediante le (48) tra il sistema delle onde d'acqua in un canale e quello della fluidodinamica isentropica, consente di potere opportunamente adattare al caso in esame alcuni dei risultati del N. 4. In particolare si ottiene la seguente determinazione per la funzione $L(\Theta, r)$:

$$L = \frac{r}{2}\left(\frac{\Theta^2}{r^2} - r\right) = \frac{c^2}{2}(u^2 - c^2)\,. \tag{49}$$

Dopo la (49), tenendo presenti le (46) e (47) nella (7), si vede facilmente che il sistema in esame è riconducibile alla forma conservativa (8) con

$$\underline{U} = \left\|\begin{matrix} -u \\ c^2 \end{matrix}\right\| \quad ; \quad \underline{f}(\underline{U}) = \left\|\begin{matrix} -(u^2/2 + c^2) \\ c^2 u \end{matrix}\right\|; \tag{50}$$

$$\underline{B}(\underline{U}, x) = \left\|\begin{matrix} -\hat{H}_x \\ -c^2 u W_x/W \end{matrix}\right\|$$

e la legge di conservazione supplementare (10) si particolarizza nella:

$$\partial_t \varepsilon + \partial_x \{uc^2(u^2/2 + c^2)\} = \underline{\check{U}}' \cdot \underline{B} = c^2 u \hat{H}_x - (u^2/2 + c^2) W_x/W \tag{51}$$

dove

$$h = \varepsilon = \frac{c^2}{2}(u^2 + c^2) \tag{52}$$

$$\underline{\check{U}}' = (-c^2 u \,;\, c^2 + u^2/2)\,. \tag{53}$$

L'equazione di bilancio (51), a meno del secondo membro, coincide essenzialmente con la legge di conservazione dell'energia dedotta in [23] per il sistema delle equazioni che governano la propagazione delle onde in acqua bassa. Con considerazioni analoghe a quelle fatte nel numero precedente, si constata facilmente che la densità di energia ε data dalla (52) è convessa, se il moto dell'acqua si svolge in regime «subcritico», (corrispondente al caso subsonico dei fluidi, [22]).

Tenendo conto delle (50), (52), (53), si trova che la forma simmetrica di Godunov (15), nel caso in esame si specializza nella

$$H' \partial_t \underline{U}' + A' \partial_x \underline{U}' = \underline{B}(\underline{U}', x) = \hat{B}(x)\underline{U}' + \hat{\underline{D}}(x) \tag{54}$$

dove

$$H' = \frac{1}{c^2 - u^2}\left\|\begin{matrix} 1 & u \\ u & c^2 \end{matrix}\right\| \quad ; \quad \hat{B}(x) = \left\|\begin{matrix} 0 & 0 \\ W_x/W & 0 \end{matrix}\right\| \quad ; \quad \hat{\underline{D}}(x) = \left\|\begin{matrix} -\hat{H}_x \\ 0 \end{matrix}\right\|. \tag{55}$$

Ci sembra interessante osservare che nel sistema (54) la non linearità è dovuta solo al coefficiente $H'(\underline{U}')$ di $\partial_t \underline{U}'$, essendo il secondo membro una funzione lineare di $\underline{U}'$ (6).

6. Dielettrici non lineari

Le equazioni di Maxwell, nel caso di onde elettromagnetiche polarizzate nel piano $x^2 x^3$ e propagantesi lungo la direzione dell'asse $x^1 = x$, possono scriversi sotto la forma (1) con

$$w = \mathrm{B} \quad ; \quad \mathrm{F} = \mathrm{E} \quad ; \quad z = \mathrm{D} \quad ; \quad \mathrm{G} = \mathrm{H} \tag{56}$$

$$a = b = 0\,. \tag{57}$$

Nelle (56) B, H rappresentano, rispettivamente, le componenti secondo l'asse x^3 dell'induzione magnetica e del campo magnetico, mentre D, E denotano, rispettivamente le componenti secondo l'asse x^2 dell'induzione elettrica e del campo elettrico. Si ritengono validi inoltre i seguenti legami costitutivi

$$\mathrm{B} = \mathrm{B}(\mathrm{H}) \quad , \quad \mathrm{D} = \mathrm{D}(\mathrm{E}) \tag{58}$$

nell'ipotesi, (vedi [24]):

$$\mathrm{dB}/\mathrm{dH} > 0 \quad ; \quad \mathrm{dD}/\mathrm{dE} > 0\,. \tag{59}$$

Effettuando la trasformazione di variabili (3), tenendo conto delle (56), si constata immediatamente che $w_r = \mathrm{F}_\Theta = 0$ e quindi, per il caso in esame, valgono le considerazioni fatte nel caso II) del N. 3. In particolare l'integrazione delle (29) conduce alla seguente determinazione per la funzione $\mathrm{L}(\Theta, r)$:

$$\mathrm{L}(\Theta, r) = k\left\{\int w\,\mathrm{d}\Theta + \int \mathrm{F}\,\mathrm{d}r\right\} + \bar{m}\Theta + \bar{s}r + \bar{n} \tag{60}$$

con $k, \bar{m}, \bar{s}, \bar{n}$ costanti arbitrarie di integrazione. Con la scelta $k = -1$, $\bar{m} = \bar{s} = \bar{n} = 0$, la (60) si specializza nella

$$\mathrm{L}(\mathrm{H}, \mathrm{E}) = \int \mathrm{B}\,\mathrm{dH} - \int \mathrm{E}\,\mathrm{dD}\,. \tag{61}$$

Dopo la (61) si può scrivere la forma conservativa (8) per il caso in esame con

$$\underline{\mathrm{U}} = \left\|\begin{matrix} -\mathrm{B} \\ \mathrm{D} \end{matrix}\right\| \qquad \underline{f}(\underline{\mathrm{U}}) = \left\|\begin{matrix} -\mathrm{E} \\ \mathrm{H} \end{matrix}\right\| \qquad \underline{\mathrm{B}} = 0\,. \tag{62}$$

(6) Cfr. con i risultati ottenuti in [7] nel caso di una lagrangiana $\mathrm{L} = (q^s, q^s_\alpha)$.

Tenendo conto delle (61) e (62), la legge di conservazione supplementare (10) si specializza nella usuale legge di conservazione dell'energia per le equazioni di Maxwell

$$\partial_t \mathscr{E} + \partial_x (\mathrm{EH}) = 0 \tag{63}$$

con

$$h = \mathscr{E} = \int \mathrm{H}\, \mathrm{dB} + \int \mathrm{E}\, \mathrm{dD} \tag{64}$$

ed inoltre le (12) e (14) assumono la forma

$$\underline{\check{\mathrm{U}}}' = (-\mathrm{H}\,,\, \mathrm{E}) \tag{65}$$

$$\nabla\check{\nabla} h = \begin{Vmatrix} \mathrm{dH}/\mathrm{dB} & 0 \\ 0 & \mathrm{dE}/\mathrm{dD} \end{Vmatrix} . \tag{66}$$

Dopo le $(62)_1$ e (66), è immediato verificare che la condizione di convessità (13) per la densità di energia (64) si specializza nella

$$\frac{\mathrm{dH}}{\mathrm{dB}} (\delta \mathrm{B})^2 + \frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{dD}} (\delta \mathrm{D})^2 > 0 \qquad \forall\, \delta \underline{\mathrm{U}} \neq 0 \tag{67}$$

che, nell'ipotesi (59), è certamente verificata.

Osserviamo che, indicando con v il voltaggio, $\overline{\mathrm{L}} = \text{cost.}$ l'induttanza, $\mathrm{C} = \mathrm{C}(v)$ la capacità, i la corrente elettrica, dal sistema in esame si possono ottenere le equazioni per la propagazione delle onde elettromagnetiche in linee di trasmissione non lineari, sostituendo formalmente (vedi [25]), B con il prodotto $\overline{\mathrm{L}}i$, H con i, D con la carica elettrica $q = q(v) = \int \mathrm{C}(v)\, \mathrm{d}v$, ed E con v. Sicché tutti i risultati ottenuti in questo numero per i dielettrici non lineari, restano validi, in particolare, per le linee di trasmissione non lineari.

Concludiamo osservando che il procedimento illustrato in questo lavoro e di cui si è mostrata un'applicazione a tre esempi tipici, può facilmente essere applicato ad una vasta classe di sistemi fisicamente interessanti, (vedi ad esempio i casi riportati in [12] e [23]), che si presentano sotto la forma (1).

BIBLIOGRAFIA

[1] K. O. FRIEDRICHS e P. D. LAX (1971) – *Systems of conservation equations with a convex extension*, « Proc. Nat. Acad. Sci. », U.S.A. *68*, 1686–1688; P. D. LAX (1971) – *Shock waces and entropy*, in *Contributions to Nonlinear Functional Analysis*, (ed. E. H. Zarantonello), Academic Press, New York, 603–634.

[2] K. O. FRIEDRICHS (1974–1978) – *On the laws of relativistic electro-magneto-fluid dynamics*, « Comm. Pure Appl. Math. », *27*, 749–808; *Conservation equations and the laws of motion in classical physics*, « Comm. Pure Appl. Math. », *31*, 123–131.

[3] G. BOILLAT (1974) – *Sur l'existence et la recherce déquations de conservation supplémentaires pour les systemes hyperboliques*, « C. R. Acad. Sci. », Paris, *278* A, 909–912.

[4] T. RUGGERI e A. STRUMIA (1981) – *Main field and convex covariant density for quasilinear hyperbolic systems. Relativistic fluid dynamics*, « Ann. Inst. Henri Poincaré » Vol. XXXIV, n. 1, 65. A. T. RUGGERI (1980) – *Entropy principle and main field for a non linear covariant system*, in corso di stampa su «Corso C.I.M.E.», Wave propagation.

[5] G. BOILLAT (1980) – *Urti*, in corso di stampa su « Corso C.I.M.E. », Wave propagation.

[6] S. K. GODUNOV (1961–1962) – *An interesting class of quasilinear systems*, « Sov. Math. », *2*, 947–949; *The problem of a generalized solution in the theory sf quasilinear equations and in gas dynamics*, « Russ. Math. Surveys », Vol. 17, 145–156.

[7] G. BOILLAT (1976) – *Ondes asymptotiques non linéaires*, « Annali di Matematica pura e applicata », (IV), Vol. CXI, 31–44.

[8] G. BOILLAT (1976) – *Chocs dans les champs qui dérivent d'un principe variationnel: équation de Hamilton–Jacobi pour la fonction génératrice*, « C. R. Acad. Sc. », Paris, *283* A, 539–542.

[9] G. BOILLAT (1977) – *Evolution des chocs caractéristiques dans les champs dérivant d'un principe variationnel*, « J. Math. pures et appl. », *56*, 137–147.

[10] A. DONATO e D. FUSCO (1980) – *Su alcune proprietà di un modello iperbolico per la propagazione del calore*. Nota II, inviato per la stampa; M. E. GURTIN e A. C. PIPKIN (1969) – *A general theory of heat conduction with finite wave speeds*, « Arch. Rat. Mech. Anal. », Vol. 31, 113–126.

[11] G. BOILLAT e T. RUGGERI (1974) – *Limite de la vitesse des chocs dans les champs à densité d'énergie convex*, « C. R. Acad. Sc. », Paris *289* A, 257–258.

[12] W. F. AMES (1970–1972) – *Discontinuity formation in solutions of homogeneous Nonlinear hyperbolic equations possessing smooth initial data*, « Int. J. Non–linear Mech. », Vol. 5, 605–615; *Nonlinear partial differential equations in engineering*, Vol. II, Academic Press New York.

[13] T. RUGGERI (1978) – *Euler–Lagrange hyperbolic systems of the second order and relativistic strings*, « Letture al Nuovo Cimento », Vol. 22, N. 2, 69–75.

[14] P. D. LAX (1957) – *Hyperbolic systems of conservation laws II*, « Comm. Pure Appl. Math. », *10*, 537–566.

[15] G. BOILLAT (1965) – *La propagation des ondes*, Gauthier–Villars Paris.

[16] G. BOILLAT (1968) – *Le champ scalaire de Monge–Ampère*, « Det. Norske Vid. Selsk Forth », Bd. 41.

[17] G. CRUPI e A. DONATO (1979) – *Su una classe di equazioni conservative ed iperboliche completamente eccezionali e compatibili con una legge di conservazione supplementare*, « Rend. Acc. Naz. Lincei Cl. Sc. Fis. Mat. Nat. », VIII, Vol. LXV, 120–127.

[18] A. DONATO (1976) – *Legge di conservazione supplementare per un particolare sistema iperbolico del primo ordine*, « Rend. Acc. Naz. Lincei Cl. Sc. Fis. Mat. Nat. », VIII, Vol. LXI, 247–252.

[19] TH. VON KARMAN (1941) – *Compressibility effects in aerodynamics*, « J. of the Aereonatical Science », (9), *8*, 337–356.

[20] G. BOILLAT (1973) – *Covariant disturbances and exceptional waves*, « J. Mathem. Phys. », (7), *14*, 973–976; A. GRECO (1974) – *On the strict exceptionality for a subsonic flow*, in « 2º Congresso AIMETA », Università di Napoli, Facoltà di Ingegneria, Vol. 4, 127–134.

[21] A. JEFFREY e J. MVUNGI (1980) – *On the breaking of water waves in a channel of arbitrarily varying depth and width*, in corso di stampa su « ZAMP »; A. JEFFREY (1980) – *Lectures on nonlinear wace propagation*, in corso di stampa su « Corso C.I.M.E. », Wave propagation.

[22] J. J. STOKER (1957) – *Water waves*, « Wiley–Interscience », New York.

[23] G. B. WHITHAM (1974) – *Linear and nonlinear waves*, « Wiley–Interscience », New York.

[24] D. GRAFFI (1967) – *Problemi non lineari nella teoria del campo elettromagnetico*, « Accad. Naz. Sci. Lett. Arti Modena, Atti Mem. » (6) *9*, 1–27; (vedi inoltre bibliografia ivi citata).

[25] W. F. AMES (1967) – *Nonlinear partial differential equations*, Academic Press, New York, 147–149.