Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Gianmaria Donida, Luisa Tabusso

Discretizzazione di domini infiniti (elementi infiniti). Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **69** (1980), n.6, p. 380–385.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1980_8_69_6_380_0>

Fisica matematica. — *Discretizzazione di domini infiniti (elementi infiniti).* Nota II di GIANMARIA DONIDA e LUISA TABUSSO (*), presentata (**) dal Corrisp. E. GIANGRECO.

SUMMARY. — A new technique for analysing problems which extend to infinity using elements is presented.

A typical situation is that of the unbounded surface wave problems, either in two or three dimensions. The strategy is to dicretize the inner domain in the standard finite element manner and to discretize the outer domain which extends to infinity with special infinite elements, for these elements are here suggested a seres of shape functions analogous to Lagrange polynomials, but including an exponential decay.

These shape functions are applied to an illustrative example which shows the success of the method.

CONFRONTO TRA LA SOLUZIONE ANALITICA ED APPROSSIMATA

Le funzioni di forma relative ai valori prescelti di L, (L = 2 , L = 4) a base del confronto risultano:

$$N_i = e^{(x_i - x)/2} \prod_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^{n-1} \left(\frac{x_j - x}{x_j - x_i} \right) \quad \text{e} \quad N_i = e^{(x_i - x)/4} \prod_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^{n-1} \left(\frac{x_j - x}{x_j - x_i} \right)$$

$$N_n = - \sum_{i=1}^{n-1} N_i \quad , \quad N_i(x_j) = \delta_{ij} .$$

La misura della differenza tra i valori nodali (nei nodi $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = \infty$), assunti dalla funzione analitica $u = (1/x)$ e da quella approssimata $u = N_1 + N_2 u_2$, si ottiene dai valori di u_2 della Tabella I, che sostituiti nella (13) forniscono i valori della Tabella II.

TABELLA II.

NODI	VALORE DI u APPROSSIMATO		VALORE ANALITICO DI u
	L = 2	L = 4	
1	1	1	1
2	0,4896	0,5407	0,5
∞	0	0	0

(*) Istituto di Scienza e Tecnica delle Costruzioni della Facoltà di Ingegneria dell'Università degli Studi di Ancona.

Gli Autori dichiarano di aver contribuito in egual misura alla stesura del presente lavoro.

(**) Nella seduta del 6 dicembre 1980.

Il diagramma di fig. 5 mostra la variazione tra la soluzione analitica e quella per elementi infiniti.

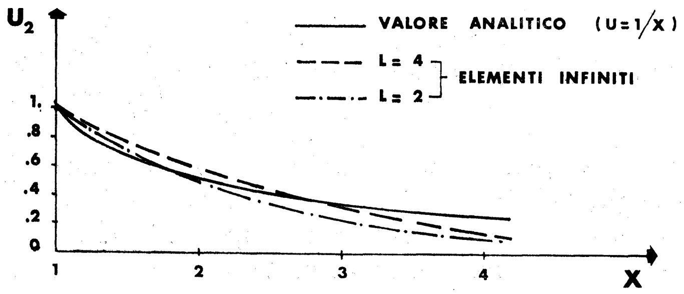

Fig. 5

Inoltre l'ispezione della fig. 5 evidenzia che le approssimazioni scelte risultano essere soddisfacenti.

ELEMENTI INFINITI IN DUE DIMENSIONI

Le funzioni di forma descritte in precedenza, possono essere usate per elementi infiniti bidimensionali o tridimensionali.

Più precisamente, se si considera un elemento rettangolare infinito nella direzione x, (fig. 6) le funzioni di forma N_{ij} sono una combinazione del convenzionale polinomio di Lagrange nella direzione y con una particolare funzione di forma, del tipo monodimensionale, nella direzione x:

$$N_{ij}(x, y) = L_i(x)\, M_j(y)$$

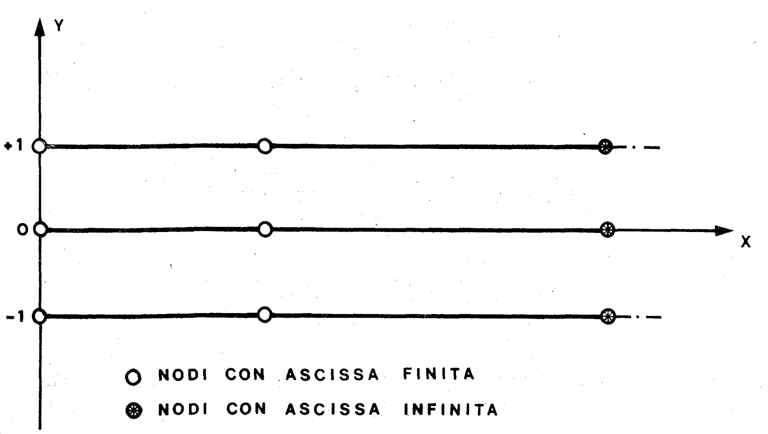

Fig. 6

con

$$L_i(x) = e^{(x_i - x)/L} \prod_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^{n-1} \left(\frac{x_j - x}{x_j - x_i} \right) , \qquad i = 1, \cdots, n-1$$

$$L_n(x) = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} L_i(x) \quad \text{e} \quad M_j(y) = \prod_{\substack{i=1 \\ \neq j}}^{n} \left(\frac{y_i - y}{y_i - y_j} \right)$$

in ogni direzione vengono considerati n punti, nella direzione x i primi $n-1$ hanno coordinata x finita e l'ultimo ha coordinata x infinita.

Se invece, l'elemento considerato è rettangolare infinito nella direzione y, la combinazione è l'inversa della precedente:

$$N_{ij}(x, y) = L_i(x) M_j(y)$$

dove

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^{n} \left(\frac{x_j - x}{x_j - x_i} \right) \quad \text{e} \quad M_j(y) = e^{(y_i - y)/L} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n-1} \left(\frac{y_i - y}{y_i - y_j} \right)$$

$$j = 1, \cdots, n-1$$

$$M_n(y) = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} M_i(y) .$$

Se infine, viene considerato un elemento rettangolare infinito in entrambe le direzioni, allora le funzioni di forma sono una combinazione di due funzioni di forma del tipo (1), nella direzione x e y rispettivamente:

$$N_{ij}(x, y) = L_i(x) M_j(y)$$

con

$$L_i(x) = e^{(x_i - x)/L} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{n-1} \left(\frac{x_j - x}{x_j - x_i} \right) , \qquad i = 1, \cdots, n-1$$

$$L_n(x) = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} L_i(x)$$

e

$$M_j(y) = e^{(y_j - y)/L} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n-1} \left(\frac{y_i - y}{y_i - y_j} \right) , \qquad j = 1, \cdots, n-1$$

$$M_n(y) = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} M_i(y) .$$

Il procedimento numerico di discretizzazione per un problema bidimensionale è analogo a quello in una dimensione, entrambi comportano l'integrazione su domini che si estendono all'infinito, in quanto tutte le funzioni coinvolte hanno termini del tipo exp. $(-x)$, exp. $(-y)$.

In due dimensioni però, l'integrazione non è solitamente immediata ma richiede l'uso di formule di quadratura, per esempio quella usuale di Gauss–Legendre nella direzione della coordinata finita e quella di Gauss–Laguerre in quella della coordinata infinita.

ELEMENTI INFINITI DISTORTI IN DUE DIMENSIONI (ISOPARAMETRICI)

Per poter adattare l'efficienza di calcolo degli elementi finiti agli elementi infiniti è necessario poter disporre di una maggiore flessibilità nella geometria dei domini da discretizzare, introducendo anche elementi distorti. Questi comportano l'uso di funzioni con termini a decadenza esponenziale in altre direzioni oltre alla x e y e integrazioni su domini irregolari che si estendono all'infinito.

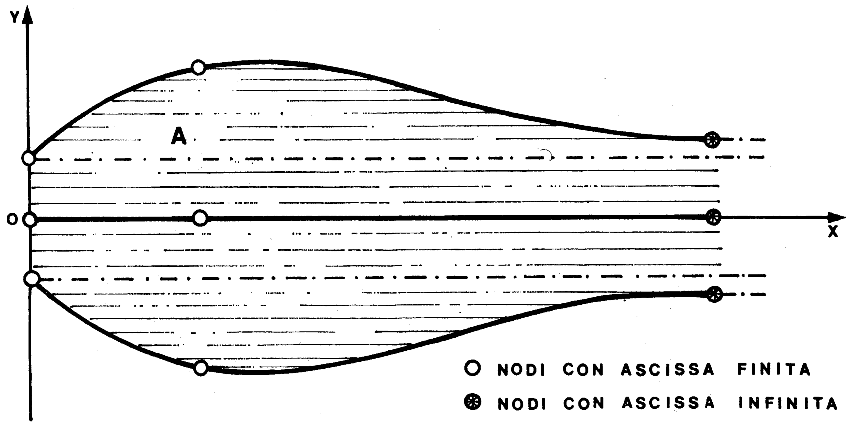

Fig. 7

Le funzioni di forma come definite in precedenza sono estendibili agli elementi distorti tramite un'opportuna trasformazione della geometria in modo da riferire l'integrazione ad un dominio regolare per semplificare il calcolo numerico. Se consideriamo per esempio un elemento infinito distorto A riferito al sistema x , y (fig. 7) e una forma variazionale del tipo:

$$F = \iint_A \Phi(x, y)\, dx\, dy \tag{16}$$

è conveniente riferire lo studio all'elemento infinito modello B più semplice nel sistema locale (ξ , η) (fig. 8) tramite la relazione:

$$F = \iint_A \Phi(x, y)\, dx\, dy = \iint_B \Phi(\xi, \eta) \left| J(\xi, \eta) \right| d\xi\, d\eta . \tag{17}$$

In pratica la trasformazione da B in A sarebbe dominata dalla coordinata del punto posto all'infinito e lo Jacobiano perderebbe di significato. Risulta necessario, affinché lo Jacobiano assuma un valore valido per la trasformazione, simulare momentaneamente le coordinate dei punti poste all'infinito, degli elementi A e B, come coordinate molto grandi ma finite e pervenire ad uno Jacobiano $J(\xi, \eta)$ che rappresenta per estrapolazione quello cercato.

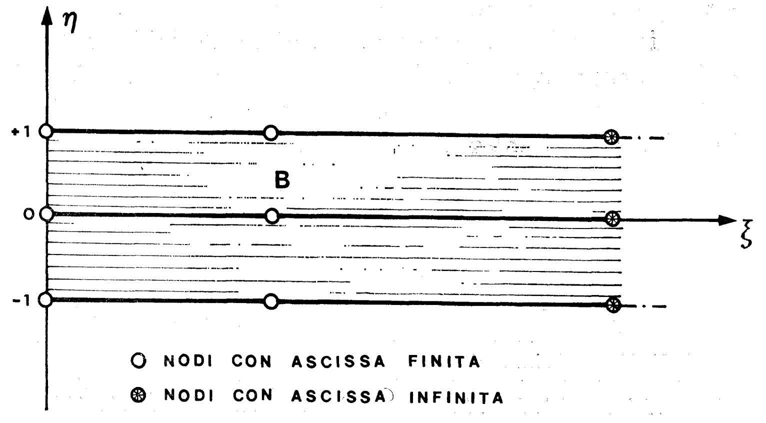

Fig. 8

La trasformazione impiega il convenzionale polinomio di Lagrange ed è analoga a quella usuale degli elementi finiti.

Il funzionale F (17) risulta nel nuovo spazio ambiente (ξ, η) e la funzione da discretizzare diventa $\Phi(\xi, \eta)$. I successivi sviluppi sono del tutto analoghi a quelli per elementi infiniti rettangolari, con l'impiego di funzioni di forma e decadenza esponenziale ora nelle coordinate (ξ, η).

Conclusioni

È stata presentata una nuova tecnica per l'analisi di problemi che si estendono all'infinito. I risultati che si ottengono tuttavia possono essere inesatti qualora si applichi il metodo a problemi con domini che si estendono all'infinito e dove anche la quantità integranda sia infinita. Inoltre la bontà della soluzione numerica trovata dipende dal parametro L che dà una misura della decadenza esponenziale, la cui scelta è del tutto arbitraria e particolare a seconda del problema fisico considerato. Per contro, la tecnica degli elementi infiniti può essere utilizzata per problemi non lineari per i quali altri metodi difficilmente si adeguano e le soluzioni analitiche sono molto complesse. Infine, gli elementi infiniti possono essere assemblati agli elementi finiti, nei già esistenti e collaudati codici di calcolo per elementi finiti, senza sostanziali modifiche.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. BETTESS (1977) – *Infinite Elements*, « International Journal for Numerical Methods in Engineering », *11*, 53–64.

[2] ABRAMOWITZ e IRENE A. STUGEN (1970) – *Handbook of Mathematical Functions*, With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, Ed. Milton, New York.

[3] O. C. ZIENKIEWICZ (1971) – *The Finite Element Method in Engineering Science*, Mc Graw–Hill, London.

[4] D. GARTLING e E. B. BECKER (1974) – *Computationally Efficient Finite Element Analysis of Viscous Flow Problems*, « In Computational Methods in Non Linear Mechanics », Ed. J. T. Oden and Al Texas Institute for Computational Mechanics.