
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

GIANMARIA DONIDA, LUISA TABUSSO

**Discretizzazione di domini infiniti (elementi infiniti).
Nota I**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 69 (1980), n.6, p. 372–379.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1980_8_69_6_372_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Fisica matematica. — *Discretizzazione di domini infiniti (elementi infiniti)*. Nota I di GIANMARIA DONIDA e LUISA TABUSSO (*), presentata (**) dal Corrisp. E. GIANGRECO.

SUMMARY. — A new technique for analysing problems which extend to infinity using elements is presented.

A typical situation is that of the unbounded surface wave problems, either in two or three dimensions. The strategy is to discretize the inner domain in the standard finite element manner and to discretize the outer domain which extends to infinity with special infinite elements, for these elements are here suggested a series of shape functions analogous to Lagrange polynomials, but including an exponential decay.

These shape functions are applied to an illustrative example which shows the success of the method.

INTRODUZIONE

L'approccio ingegneristico solitamente usato per analizzare con il metodo degli elementi finiti, problemi riguardanti regioni illimitate (ad esempio l'interazione fluido-struttura), è quello di considerare la frontiera all'infinito posta ad una distanza molto grande ma finita.

L'opportuna valutazione di quanto lontana debba essere posta tale frontiera risulta difficile; infatti mentre teoricamente servirebbe porla il più lontano possibile, in pratica è necessaria una mediazione per contenere il numero degli elementi finiti usati e quindi il tempo di elaborazione.

Metodi numerici più convenienti che considerano invece la frontiera del dominio illimitato come posta effettivamente all'infinito sono:

boundary dampers, boundary integral, boundary solution, infinite elements.

Tali metodi applicano ancora gli elementi finiti nella regione interna I, accoppiati però nei punti dell'interfaccia $\Gamma^{(1)}$ ad un nuovo tipo di discretizzazione della regione esterna E, (fig. 1 e 2).

Tra i vari metodi richiamati quello per elementi infiniti si presenta più idoneo ⁽²⁾.

(*) Istituto di Scienza e Tecnica delle Costruzioni della Facoltà di Ingegneria dell'Università degli Studi di Ancona.

Gli Autori dichiarano di aver contribuito in egual misura alla stesura del presente lavoro.

(**) Nella seduta del 6 dicembre 1980.

(1) L'interfaccia Γ non è necessariamente quella di separazione tra i due mezzi considerati (ad esempio struttura e porzione di suolo interessato dal sisma), ma essenzialmente quella che divide la regione finita e infinita (fig. 1 e 2).

(2) Infatti la tecnica degli elementi infiniti non comporta delle modifiche sostanziali al metodo degli elementi finiti; pertanto è possibile riutilizzare i già collaudati codici di calcolo ad elementi finiti esistenti ampliandoli con l'introduzione degli elementi infiniti. Inoltre per problemi non lineari il metodo dei boundary integral difficilmente si adegua e le soluzioni analitiche sono molto complesse.

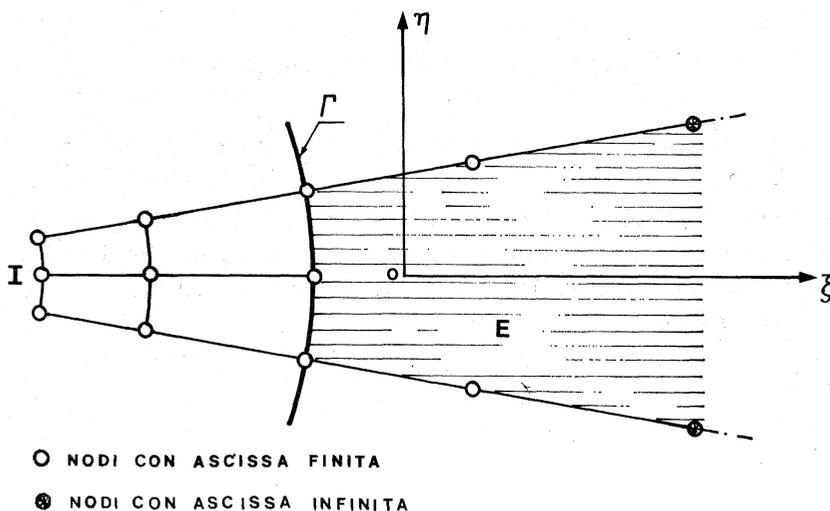


Fig. 1

In quanto segue, sulla base anche di elaborazioni già note in letteratura [1], si è cercato di illustrare la tecnica degli elementi infiniti, sia per problemi monodimensionali che bidimensionali.

Inoltre viene risolto un esempio monodimensionale con una appropriata forma bilineare simmetrica, evidenziando la problematica della discretizzazione di domini con elementi infiniti.

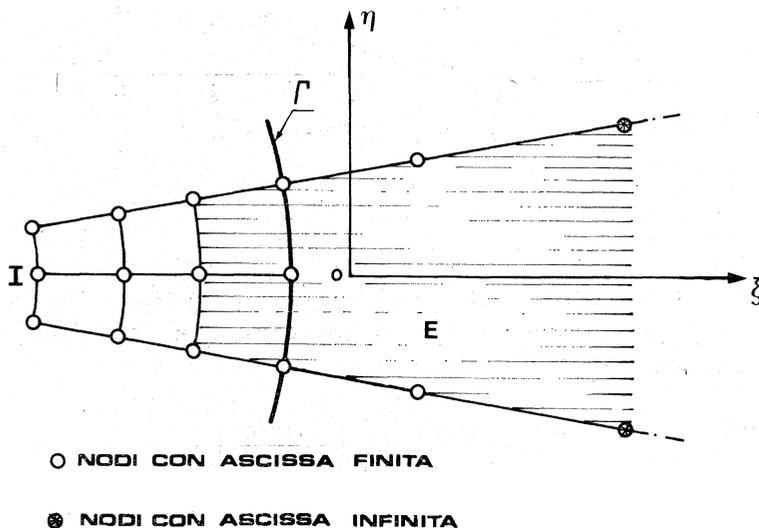


Fig. 2

ELEMENTI INFINITI IN UNA DIMENSIONE

La regione che si estende all'infinito può essere modellata con gli elementi infiniti.

Lo studio degli elementi che si estendono all'infinito è affrontato introducendo una serie di particolari funzioni di forma, compatibili alla natura della variabile da discretizzare e che conducono ad una integrazione su un dominio infinito.

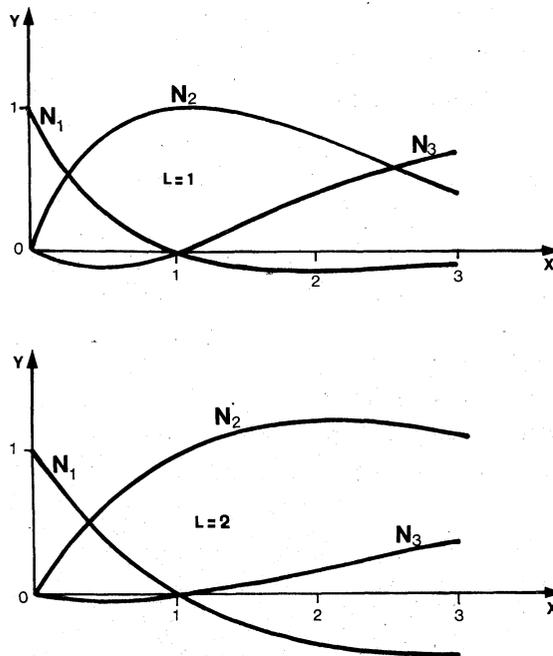


Fig. 3

Tra le possibili funzioni di forma vengono qui scelte quelle basate sui polinomi di Lagrange moltiplicati per un termine a decadenza esponenziale [1] del tipo:

$$(I) \quad N_i = e^{(x_i - x)/L} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} \left(\frac{x_j - x}{x_j - x_i} \right).$$

Valide per n punti, i primi $n - 1$ hanno coordinata x finita l' n esimo è posto a distanza infinita.

Le N_i sono definite per $i = 1, 2, \dots, n-1$, se interessa conoscere anche N_n questa viene dedotta dalle precedenti ed assume la forma:

$$(2) \quad N_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} N_i$$

L è un parametro arbitrario che dà una misura della rapidità della decadenza esponenziale.

Le funzioni N_i soddisfano alla tipica condizione delle funzioni di forma per gli elementi finiti:

$$(3) \quad N_i(x_j) = \delta_{ij} \quad (\forall L < \infty, L \neq 0).$$

Le funzioni di forma per $n = 3$, con due diversi valori di L , sono consegnate in fig. 3.

L'efficacia delle funzioni di forma introdotte viene saggiata risolvendo un classico problema differenziale di cui è nota la soluzione.

CASO MONODIMENSIONALE

Bettess in [1] prende in esame il seguente problema differenziale:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{2}{x^3} \quad \text{in } (1, \infty) \\ u(1) = 1, \quad u \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow \infty, \end{array} \right.$$

e determina la forma variazionale dell'equazione tramite il seguente funzionale:

$$F = \int_1^{\infty} \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{4u}{x^3} \right] dx.$$

Dopo opportuni sviluppi di analisi funzionale e l'introduzione della discretizzazione ad elementi infiniti, il problema si riduce infine alla risoluzione della seguente equazione nell'unica incognita u_2 .

$$(5) \quad \int_1^{\infty} \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_2}{dx} dx + u_2 \int_1^{\infty} \left(\frac{dN_2}{dx} \right)^2 dx + \int_1^{\infty} \frac{2N_2}{x^3} dx = 0.$$

Viene ora affrontato lo stesso problema presentato in una diversa forma variazionale che utilizza una appropriata forma bilineare simmetrica, pervenendo agli stessi risultati.

Si introduca l'operatore differenziale A associato all'equazione (4) e si ponga lo stesso problema nei seguenti termini:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} A(u) = f \\ \text{con } A(u) = \frac{d^2 u}{dx^2} \\ u \in C^2(I, +\infty) \\ f \in C(I, +\infty). \end{array} \right.$$

Sull'insieme $L_2(I, +\infty)$ di tutte le funzioni di quadrato sommabile su $(I, +\infty)$ si introduca una forma bilineare $a(u, v)$ come $(A(u), u)$ definendo il prodotto scalare di due funzioni come:

$$(7) \quad (u, v) = \int_1^\infty u(x) v(x) dx.$$

Dalla (6) è lecito scrivere:

$$(8) \quad (A(u), u) = (f, u)$$

come:

$$(9) \quad \int_1^\infty \frac{d^2 u}{dx^2} u dx = \int_1^\infty \frac{2u}{x^3}$$

integrando per parti:

$$(10) \quad \int_1^\infty \frac{d^2 u}{dx^2} u dx = - \int_1^\infty \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx$$

pertanto l'equazione da discretizzare, risulta:

$$(11) \quad \int_1^\infty \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{2u}{x^3} \right] dx = 0.$$

Per il caso monodimensionale che si considera l'elemento infinito è una semiretta avente i tre nodi in $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = \infty$ con una variabile associata ad ogni nodo; il valore incognito è $u_2 = u(x_2) = u(2)$.

Le tre funzioni di forma associate sono:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_1 = \left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \right) e^{(x_1 - x)/L} = (2 - x) e^{(1-x)/L} \\ N_2 = \left(\frac{x_1 - x}{x_1 - x_2} \right) e^{(x_2 - x)/L} = (x - 1) e^{(2-x)/L} \\ N_3 = 1 - N_1 - N_2. \end{array} \right.$$

Tenuto conto delle condizioni al contorno:

$$u_1 = u(1) = 1 \quad \text{e} \quad u_3 = u(\infty) = 0,$$

la discretizzazione di u assume la forma:

$$(13) \quad u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 = N_1 + N_2 u_2.$$

Dalla (11) con opportuni sviluppi matematici ⁽³⁾ si perviene alla seguente equazione nell'unica variabile u_2 :

$$(14) \quad \int_1^{\infty} \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_2}{dx} dx + u_2 \int_1^{\infty} \left(\frac{dN_2}{dx} \right)^2 dx + \int_1^{\infty} \frac{2}{x^3} N_2 dx = 0.$$

(3) In forma matriciale, dopo aver applicato la discretizzazione, l'eq. (11) può essere scritta come:

$$\sum_e^{\infty} \int_1^{\infty} \left[u^{(e)T} \frac{dN}{dx} \frac{dN^T}{dx} u^{(e)} + 2 \frac{u^{(e)T}}{x^3} N \right] = 0$$

dove e è l'indice degli elementi.

Il valore di u sull'elemento $u^{(e)}$, il vettore delle derivate delle funzioni di forma $\frac{dN}{dx}$, i valori nodali di u , u_i , sono rispettivamente:

$$u^{(e)} = N^T u = \sum_{i=1}^3 N_i u_i, \quad \frac{dN}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} \\ \frac{dN_2}{dx} \\ \frac{dN_3}{dx} \end{bmatrix}, \quad u_i = \begin{bmatrix} 1 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sviluppando si ottiene:

$$\frac{1}{dx^2} \begin{bmatrix} dN_1^2 & dN_1 dN_2 & dN_1 dN_3 \\ dN_1 dN_2 & dN_2^2 & dN_2 dN_3 \\ dN_1 dN_3 & dN_2 dN_3 & dN_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ -u_3 \end{bmatrix} = -\frac{2}{x^3} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}$$

u_1 è un valore noto, pertanto non compare nel vettore della soluzione ed il suo contributo viene annesso a quello del termine noto e l'ordine del sistema si riduce a 2:

$$\frac{1}{dx^2} \begin{bmatrix} dN_2^2 & dN_2 dN_3 \\ dN_2 dN_3 & dN_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = -\frac{2}{x^3} \begin{bmatrix} N_2 - \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} u_1 \\ N_3 - \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_3}{dx} u_1 \end{bmatrix}$$

noto è anche il valore di u_3 , quindi l'ordine del sistema da risolvere si abbassa a 1, ed in modo analogo si perviene alla seguente equazione:

$$\frac{dN_2^2}{dx^2} u_2 = -\frac{2}{x^3} N_2 - \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_2}{dx} u_1 - \frac{dN_2}{dx} \frac{dN_3}{dx} u_3.$$

L'aspetto numerico della discretizzazione si ottiene introducendo le derivate delle funzioni di forma:

$$\frac{dN_1}{dx} = e^{(1-x)/L} \left(-1 - \frac{2-x}{L} \right) \quad ; \quad \frac{dN_2}{dx} = e^{(2-x)/L} \left(1 - \frac{x-1}{L} \right)$$

nella (14).

$$\int_1^\infty e^{(1-x)/L} e^{(2-x)/L} \left(-1 - \frac{2-x}{L} \right) \left(1 - \frac{(x-1)}{L} \right) dx +$$

$$+ u_2 \int_1^\infty \left[e^{(2-x)/L} \left(1 - \frac{x-1}{L} \right) \right]^2 dx + 2 \int_1^\infty \frac{(x-1)}{x^3} e^{(2-x)/L} dx = 0$$

che sviluppata fruisce:

$$- \frac{1}{4} e^{1/L} (L+1) + u_2 \frac{1}{4} e^{2/L} L + 2 e^{2/L} \left[\int_1^\infty \frac{e^{-(x/L)}}{x^2} dx - \int_1^\infty \frac{e^{-(x/L)}}{x^3} dx \right] = 0$$

e quindi:

$$(15) \quad u_2 = e^{-(1/L)} \frac{(L+1)}{L} - \frac{8}{L} \left[\int_1^\infty \frac{e^{-(x/L)}}{x^2} dx - \int_1^\infty \frac{e^{-(x/L)}}{x^3} dx \right].$$

Il valore di u_2 si determina calcolando gli ultimi due integrali ⁽⁴⁾ della (15). Nella Tabella I sono riportati i valori di u_2 per alcuni valori prova di L .

TABELLA I.

L	E_2	E_3	u_2
1/2	0.03753	0.03013	0.28760
1	0.14849	0.10969	0.42534
2	0.32664	0.22160	10.86810
4	0.51000	0.32468	0.54070
10	0.80100	0.41629	0.66980

$$(4) \quad E_n(z) = \int_1^\infty \frac{e^{-zt}}{t^n} dt;$$

quindi

$$\int_1^\infty \frac{e^{-(x/L)}}{x^2} dx = E_2\left(\frac{1}{L}\right), \quad e \quad \int_1^\infty \frac{e^{-(x/L)}}{x^3} dx = E_3\left(\frac{1}{L}\right).$$

Dall'equazione (15), u_2 risulta legato al parametro L , che esprime la decadenza esponenziale della funzione di forma e da cui dipende la bontà dell'approssimazione della soluzione numerica. Più precisamente, il legame della funzione $u_2(L)$ risulta evidenziato dal diagramma di fig. 4 che traduce i valori prova della Tabella I.

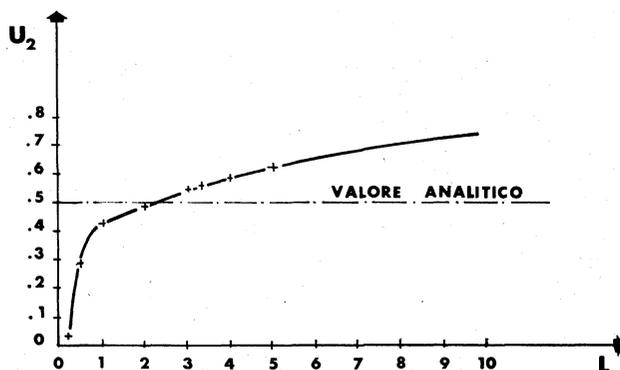


Fig. 4

Dalla fig. 4 si osserva inoltre che l'andamento della funzione $u_2(L)$ si stabilizza nel tratto compreso tra i valori di $L = 2$ e $L = 4$, pertanto si può supporre che entro tali limiti il coefficiente u_2 sia poco influenzato dalla scelta di L e fornisca quindi una buona approssimazione della soluzione ⁽⁵⁾.

BIBLIOGRAFIA

- [1] P. BETTESS (1977) - *Infinite Elements*, «International Journal for Numerical Methods in Engineering», II, 53-64.
- [2] ABRAMOWITZ e IRENE A. STUGEN (1970) - *Handbook of Mathematical Functions*, With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, Ed. Milton, New York.
- [3] O. C. ZIENKIEWICZ (1971) - *The Finite Element Method in Engineering Science*, Mc Graw-Hill, London.
- [4] D. GARTLING e E. B. BECKER (1974) - *Computationally Efficient Finite Element Analysis of Viscous Flow Problems*, «In Computational Methods in Non Linear Mechanics», Ed. J. T. Oden and Al Texas Institute for Computational Mechanics.

(5) Al limite infatti per la soluzione analitica $u = (1/x)$ il valore $u_2 = u(2) = 0,5$ è indipendente da L , (fig. 4).