
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ANDREA DEL CENTINA, LUISELLA VERDI

**Su certi fibrati in coniche di $P^2 \times P^2$, alcuni dei quali
unirazionali e non razionali**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 69 (1980), n.6, p. 338–345.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1980_8_69_6_338_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geometria. — *Su certi fibrati in coniche di $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2$, alcuni dei quali unirazionali e non razionali.* Nota di ANDREA DEL CENTINA (*) e LUISELLA VERDI (**), presentata (***) dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — In this note we show that every smooth "general enough" hypersurface of bidegree $(p, 2)$ with $p > 1$ in $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2$ is an ordinary non rational conic-bundle. Moreover we construct an example, for $p = 3$, which is unirational.

1. In questa Nota si studiano le ipersuperfici lisce X di $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2$ di dimensione di Kodaira $-\infty$.

Una semplice applicazione della formula di aggiunzione (cfr. § 2) mostra che tali ipersuperfici hanno bigrado (p, q) con $q \leq 2$.

Per $q = 0$, $X = C \times \mathbf{P}^2$, dove C è una curva piana, per $q = 1$ X è birazionale ad un fibrato in rette proiettive su $\mathbf{P}^2$, ed è quindi razionale.

Per $q = 2$, sotto opportune ipotesi di genericità che specificheremo più avanti (cfr. § 2), si prova che tali ipersuperfici X sono fibrati in coniche ordinari (cfr. § 3), che per $p = 1$ sono ovviamente razionali, mentre per $p \geq 2$ sono non razionali; ciò in virtù di un noto teorema di Mumford (cfr. [4] o [2] 1.3.11) risultando la curva discriminante di grado $3p \geq 6$.

Il caso $p = 2$ $q = 2$ è già stato considerato per altra via (cfr. [2] v) pag. 195) e la X relativa costituisce un esempio di varietà unirazionale non razionale.

Nel § 4 si prova che le ipersuperfici di $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2$ di bigrado (p, q) con $p \geq 2$, $q = 2$, ammettono « infinite » bisecanti che risultano essere piani doppi.

Un noto teorema di Enriques (cfr. per esempio [2] 1.2.9) ci permetterà allora, insieme al criterio di razionalità di Clebsch-Noether per i piani doppi (cfr. per esempio [1]), di costruire nel § 5 un esempio di fibrato in coniche unirazionale e non razionale.

2. Sia $\mathbf{K}$ un campo algebricamente chiuso di caratteristica diversa da 2, e sia $\mathbf{P}^2(\mathbf{K}) = \mathbf{P}^2$ il piano proiettivo su $\mathbf{K}$.

Sia X la ipersuperficie di $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2$ definita dall'equazione:

$$(1) \quad F^{p,q} = F^{p,q}(x; y) = F^{p,q}(x_0, x_1, x_2; y_0, y_1, y_2) = 0,$$

dove $F^{p,q}(x_0, x_1, x_2; y_0, y_1, y_2)$ è un polinomio omogeneo di bigrado (p, q)

(*) Collaboratore del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

(**) Collaboratrice del I.A.G.A. del C.N.R.

(***) Nella seduta del 6 dicembre 1980.

nei due gruppi di coordinate omogenee $(x_0, x_1, x_2), (y_0, y_1, y_2)$ rispettivamente nel primo e nel secondo fattore di $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2$.

Indichiamo con Ω_X il fascio canonico su X .

Per la formula di aggiunzione si ha:

$$\Omega_X \simeq \Omega_{\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2} \otimes \det N_{X|\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2} = \mathcal{O}_X(p-3, q-3).$$

Allora X ha dimensione di Kodaira $-\infty$ solo se $p < 3$ (oppure $q < 3$).

D'ora in avanti $F^{p,q}$ sarà sempre tale che $q \leq 2$.

Se $q = 0$, X è $C \times \mathbf{P}^2$ dove C è la curva piana di equazione

$$F^{p,0}(x_0, x_1, x_2; y_0, y_1, y_2) = F^p(x_0, x_1, x_2) = 0$$

e dunque X è una rigata (non necessariamente razionale).

Se $q = 1$ X è birazionale ad un fibrato in rette proiettive su $\mathbf{P}^2$ e quindi X è razionale.

Nel seguito studieremo le ipersuperfici X che risultano dalla condizione $q = 2$, cioè ipersuperfici del tipo:

$$(I') \quad F^{p,2}(x_0, x_1, x_2; y_0, y_1, y_2) = \sum_{i,j=0}^2 a_{ij}(x_0, x_1, x_2) y_i y_j = 0$$

dove

$$a_{ij}(x_0, x_1, x_2) = a_{ji}(x_0, x_1, x_2).$$

In particolare esamineremo alcune proprietà geometriche di X che risulteranno vere per X «sufficientemente generale». Più precisamente, se $\mathbf{P}^N$ è lo spazio dei parametri corrispondente ai coefficienti che compaiono nella (I'), la proposizione 1 vale per le X rappresentate da $F^{p,2} = 0$ quando i coefficienti di $F^{p,2}$ sono in un opportuno aperto di Zariski di $\mathbf{P}^N$. Tuttavia, poiché sarebbe laborioso verificare che le condizioni (3) e (4) sono algebriche, ci limiteremo a provare la Proposizione 1 per X «generica», cioè, sia $\mathbf{K}_1$ un campo e nell'equazione (I') prendiamo i coefficienti trascendentalmente indipendenti su $\mathbf{K}_1$, il campo base $\mathbf{K}$ è ottenuto aggiungendo questi coefficienti a $\mathbf{K}_1$ e facendo la chiusura algebrica di tale estensione.

3. Sia $T = (x_0^0, x_1^0, x_2^0)$ un punto nel primo fattore di $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2$, indichiamo con $\mathbf{P}_T^2$ la fibra su T in tale prodotto.

Fissata, una volta per tutte, una retta l_0 nel secondo fattore di $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2$, che senza perdere in generalità possiamo supporre di equazione $y_2 = 0$, risulta fissata in ciascun $\mathbf{P}_T^2$ una retta $l_{0,T}$ che avrà equazione $y_2 = 0$.

Ogni fibra $\mathbf{P}_T^2$ taglia X in una conica $\gamma_T = \mathbf{P}_T^2 \cap X$ di equazione:

$$(2) \quad \begin{aligned} F^{p,2}(x_0^0, x_1^0, x_2^0; y_0, y_1, y_2) &= \sum_{i,j=0}^2 a_{ij}(x_0^0, x_1^0, x_2^0) y_i y_j = \\ &= \sum_{i,j=0}^2 a_{ij}(T) y_i y_j = 0. \end{aligned}$$

La retta $l_{0,T}$ apparterrà a γ_T se e solo se

$$a_{00}y_0^2 - 2a_{01}y_0y_1 - a_{11}y_1^2 = 0.$$

Le tre equazioni:

$$a_{00}(x_0, x_1, x_2) = 0, \quad a_{01}(x_0, x_1, x_2) = 0, \quad a_{11}(x_0, x_1, x_2) = 0$$

definiscono tre curve, di grado p , C , C' e C'' nel primo fattore di $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2$, le quali se X è generica saranno tali che:

$$(3) \quad C \cap C' \cap C'' = \emptyset.$$

D'ora in avanti assumeremo X generica in questo senso, così che la condizione (3) vale. Si ha allora:

LEMMA 1. *Se X è generica la retta $l_{0,T}$ non appartiene a γ_T per ogni T .*

La conica γ_T si spezza in due rette coincidenti se e solo se $rk(a_{ij}(T)) < 2$.

Sia $A_{ij}(x_0, x_1, x_2)$ il minore complementare di $a_{ij}(x_0, x_1, x_2)$ nella matrice $(a_{ij}(x_0, x_1, x_2))_{\substack{i=0,1,2 \\ j=0,1,2}}$. Le equazioni:

$$A_{ij}(x_0, x_1, x_2) = 0 \quad i, j = 0, 1, 2$$

definiscono sei curve di grado $2p$, C_{ij} , nel primo fattore di $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2$.

Se X è generica le C_{ij} saranno tali che

$$(4) \quad \bigcap_{i,j} C_{ij} = \emptyset.$$

Assumeremo X generica anche in questo senso. Si ha allora:

LEMMA 2. *Se X è generica la conica γ_T , per ogni T , non è mai spezzata in due rette coincidenti.*

Indicheremo con Δ la curva, nel primo fattore di $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2$, definita dall'equazione:

$$(5) \quad A(x_0, x_1, x_2) = \det(a_{ij}(x_0, x_1, x_2)) = 0.$$

Δ è una curva di grado $3p$.

Riassumendo quanto detto si ha:

$$\gamma_T = \mathbf{P}_T^2 \cap X = l'_T + l''_T \text{ per ogni } T \in \Delta \text{ con } l'_T \neq l''_T \neq l_{0,T}.$$

Osserviamo adesso che la retta $l_{0,T}$ è tangente a γ_T se e solo se T appartiene alla curva C_{22} , definita dall'equazione:

$$A_{22}(x_0, x_1, x_2) = a_{00}(x_0, x_1, x_2)a_{11}(x_0, x_1, x_2) - a_{01}^2(x_0, x_1, x_2) = 0.$$

LEMMA 3. *Se X è generica allora X è non singolare se e solo se Δ è non singolare.*

Dimostrazione. Sia X non singolare e sia $T = (x_0^0, x_1^0, x_2^0) \in \Delta$. Poichè $\bigcap_{i,j} C_{ij} = \emptyset$ esiste almeno un minore $A_{ij}(x_0, x_1, x_2)$ tale che $A_{ij}(x_0^0, x_1^0, x_2^0) \neq 0$, senza perdere in generalità possiamo supporre che tale sia A_{00} . Sia $\gamma_T = l'_T + l''_T$ e sia $P = l'_T \cap l''_T$. Poniamo $P = (x_0^0, x_1^0, x_2^0; y_0^0, y_1^0, y_2^0)$, si ha allora:

$$(6) \quad (y_0^0 : y_1^0 : y_2^0) = (A_{00}(T) : A_{01}(T) : A_{02}(T)) = (A_{01}(T) : A_{11}(T) : A_{12}(T)) = \\ = (A_{02}(T) : A_{12}(T) : A_{22}(T)).$$

Poichè $A_{00}(T) \neq 0$ possiamo usare in $\mathbf{P}_T^2$ le coordinate non omogenee (y_1, y_2) (ponendo $y_0 = 1$), così P avrà coordinate $(x_0^0, x_1^0, x_2^0; y_1^0, y_2^0)$ in $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{A}^2$ con:

$$(7) \quad (y_1^0, y_2^0) = \left(\frac{A_{01}(T)}{A_{00}(T)}, \frac{A_{02}(T)}{A_{00}(T)} \right) = \left(\frac{A_{11}(T)}{A_{01}(T)}, \frac{A_{12}(T)}{A_{01}(T)} \right) = \\ = \left(\frac{A_{12}(T)}{A_{02}(T)}, \frac{A_{22}(T)}{A_{02}(T)} \right).$$

L'equazione di γ_T in coordinate non omogenee sarà allora

$$G(y_1, y_2) = F^{p,2}(x_0^0, x_1^0, x_2^0; 1, y_1, y_2) = a_{00}(T) + 2a_{01}(T)y_1 + \\ + a_{11}(T)y_1^2 + 2a_{02}(T)y_2 + 2a_{12}(T)y_1y_2 + a_{22}(T)y_2^2 = 0.$$

Ora, poichè P è punto doppio per γ_T si ha:

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial G}{\partial y_1}(y_1^0, y_2^0) = \frac{\partial F^{p,2}}{\partial y_1}(P) = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial y_2}(y_1^0, y_2^0) = \frac{\partial F^{p,2}}{\partial y_2}(P) = 0. \end{cases}$$

D'altra parte

$$(9) \quad \frac{\partial F^{p,2}}{\partial y_0}(P) = 0.$$

Dalle (7) si ottiene:

$$(y_1^0)^2 = \frac{A_{11}(T)}{A_{00}(T)}, \quad y_1^0 y_2^0 = \frac{A_{12}(T)}{A_{00}(T)}, \quad (y_2^0)^2 = \frac{A_{22}(T)}{A_{00}(T)}, \\ y_1^0 = \frac{A_{01}(T)}{A_{00}(T)}, \quad y_2^0 = \frac{A_{02}(T)}{A_{00}(T)}.$$

Allora:

$$(10) \quad \frac{\partial F^{p,2}}{\partial x_0}(P) = \frac{\partial a_{00}}{\partial x_0}(T) + 2 \frac{\partial a_{01}}{\partial x_0}(T) \frac{A_{01}(T)}{A_{00}(T)} + \frac{\partial a_{11}}{\partial x_0}(T) \frac{A_{11}(T)}{A_{00}(T)} + \\ + 2 \frac{\partial a_{02}}{\partial x_0}(T) \frac{A_{02}(T)}{A_{00}(T)} + 2 \frac{\partial a_{12}}{\partial x_0}(T) \frac{A_{12}(T)}{A_{00}(T)} + \\ + \frac{\partial a_{22}}{\partial x_0}(T) \frac{A_{22}(T)}{A_{00}(T)} = \frac{1}{A_{00}(T)} \frac{\partial A}{\partial x_0}(T).$$

Analogamente

$$(11) \quad \frac{\partial F^{p,2}}{\partial x_1}(P) = \frac{1}{A_{00}(T)} \frac{\partial A}{\partial x_1}(T)$$

$$(12) \quad \frac{\partial F^{p,2}}{\partial x_2}(P) = \frac{1}{A_{00}(T)} \frac{\partial A}{\partial x_2}(T).$$

Poichè $P \in X$ è non singolare dalle (8) e (9) segue che una tra le (10), (11) e (12) è diversa da zero, e quindi T è non singolare per Δ .

Viceversa, supponiamo Δ non singolare e sia $P = (x_0^0, x_1^0, x_2^0; y_0^0, y_1^0, y_2^0)$ un punto di X ; sarà $P \in \gamma_T$ per $T = (x_0^0, x_1^0, x_2^0)$.

Se P è non singolare per γ_T si avrà:

$$\frac{\partial F^{p,2}}{\partial y_k}(P) = \frac{\partial \sum_{i,j=0}^2 a_{ij}(T) y_i y_j}{\partial y_k} (y_0^0, y_1^0, y_2^0) \neq 0$$

per qualche $k = 0, 1, 2$ e quindi P è non singolare per X .

Se P è singolare per γ_T dalla (10), (11) e (12) segue che $\frac{\partial F^{p,2}}{\partial x_i}(P) \neq 0$ per qualche $i = 0, 1, 2$, altrimenti T sarebbe singolare per Δ ; dunque P è non singolare per X .

OSSERVAZIONE 1. Se la curva Δ è non singolare allora $\bigcap_{i,j} C_{ij} = \emptyset$. Infatti se $T \in \bigcap_{i,j} C_{ij}$ è facile verificare che tutte le derivate di $A(x_0, x_1, x_2)$ si annullano in T .

Dai risultati ottenuti si deduce la seguente:

PROPOSIZIONE 1. Sia X una ipersuperficie di bigrado $(p, 2)$ con $p \geq 2$ in $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2$, generica nel senso sopra specificato e liscia. Allora X è un fibrato in coniche ordinario con curva discriminante Δ di grado $3p$ (≥ 6).

PROPOSIZIONE 2. Se X soddisfa le ipotesi della Proposizione 1 allora è non razionale.

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla Proposizione 1 e dal criterio di Mumford di non razionalità dei fibrati in coniche ordinari (cfr. [4] o [2] 1.3.11).

4. Per ogni retta l , di equazione $y_2 = ay_0 + by_1$, fissata nel secondo fattore di $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2$, corrisponde in ogni $\mathbf{P}_T^2$ una retta l_T di equazione $y_2 = ay_0 + by_1$.

La retta l_T non appartiene a γ_T se e solo se le curve Γ , Γ' e Γ'' di equazioni:

$$a_{00}(x_0, x_1, x_2) + 2a a_{02}(x_0, x_1, x_2) + a^2 a_{22}(x_0, x_1, x_2) = 0$$

$$a_{01}(x_0, x_1, x_2) + b a_{02}(x_0, x_1, x_2) + a a_{12}(x_0, x_1, x_2) + a b a_{22}(x_0, x_1, x_2) = 0$$

$$a_{11}(x_0, x_1, x_2) + 2b a_{12}(x_0, x_1, x_2) + b^2 a_{22}(x_0, x_1, x_2) = 0$$

sono tali che $\Gamma \cap \Gamma' \cap \Gamma'' = \emptyset$.

Tale condizione è certamente verificata se X è generica e (a, b) varia in un opportuno intorno U dell'origine in $\mathbf{K}^2$.

Poniamo:

$$S_{(a,b)} = \{(T, R) \mid T \text{ nel primo fattore di } \mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2 \text{ e } R \in l_T \cap \gamma_T\}$$

Si ha un morfismo $\pi: S_{(a,b)} \rightarrow \mathbf{P}^2$ definito dalla proiezione di $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2$ sul primo fattore, genericamente $(2, 1)$.

$S_{(a,b)}$ è dunque un piano doppio per ogni (a, b) di U , che è diramato lungo la curva $\nabla_{(a,b)} = \{T \in \mathbf{P}^2 \mid \pi^{-1}(P) = \{(T, R)\}, R = l_T \cap \gamma_T\}$.

L'equazione di $\nabla_{(a,b)}$ è dunque:

$$\begin{aligned} & [a_{01}(x_0, x_1, x_2) + b a_{02}(x_0, x_1, x_2) + a a_{12}(x_0, x_1, x_2) + a b a_{22}(x_0, x_1, x_2)]^2 - \\ & - [a_{00}(x_0, x_1, x_2) + 2a a_{02}(x_0, x_1, x_2) + a^2 a_{22}(x_0, x_1, x_2)] \cdot \\ & \cdot [a_{11}(x_0, x_1, x_2) + 2b a_{12}(x_0, x_1, x_2) + b^2 a_{22}(x_0, x_1, x_2)] = 0. \end{aligned}$$

Se $a = b = 0$ $\nabla_{(a,b)} = C_{22}$.

Un modo per provare l'unirazionalità di X è determinare, in virtù del criterio di unirazionalità di Enriques (cfr. per esempio [2] 1.2.9), un $S_{(a,b)}$ razionale e per far questo ci si può basare sul criterio di razionalità dei piani doppi di Clebsch-Noether (cfr. per esempio [1]).

Se $p = 2$, $S_{(a,b)}$ è sempre razionale, poichè $\nabla_{(a,b)}$ è una quartica, e così l'ipersuperficie X di bigrado $(2, 2)$ in $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2$ è sempre unirazionale.

Per $p \geq 3$, affinchè $S_{(a,b)}$ sia razionale occorre che $\nabla_{(a,b)}$ acquisti delle singolarità ben determinate e ciò fa sorgere alcune difficoltà.

Nel prossimo paragrafo diamo un esempio di ipersuperficie liscia di bigrado $(3, 2)$ di $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2$ unirazionale.

5. Sia $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ e sia X la ipersuperficie di $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2$ di equazione:

$$\begin{aligned} F^{3,2}(x_0, x_1, x_2; y_0, y_1, y_2) = & 2(x_2^3 - x_1^3)y_0^2 + 2(x_0^3 + x_2^3)y_0y_1 + \\ & + x_0^3y_1^2 + 2x_0^3y_0y_2 - 12x_1^3y_1y_2 - 12x_2^3y_2^2 = 0. \end{aligned}$$

La curva Δ associata ha equazione:

$$x_0^9 - 36x_1^9 - 12x_2^9 + 12x_0^6x_1^3 + 12x_0^6x_2^3 + 72x_1^6x_2^3 = 0.$$

Si verifica facilmente che Δ è non singolare e dunque in virtù dell'Osservazione 1 $\bigcap_{i,j} C_{ij} = \emptyset$. D'altra parte si verifica direttamente che $C \cap C' \cap C'' = \emptyset$. Dunque X è generica e così in virtù del Lemma 3 la X è non singolare. Per la Proposizione 1 X è un fibrato in coniche ordinario.

La $S_{(0,0)}$ è un piano doppio con curva di diramazione $V_{(0,0)} = C_{22}$ di equazione:

$$x_0^6 + x_2^6 + x_0^3 x_1^3 = 0$$

che, come è facile vedere, ha nel punto $(0, 1, 0)$ un punto triplo con un altro punto triplo infinitamente vicino e nessun'altra singolarità. $S_{(0,0)}$ è dunque razionale e X unirazionale.

Senza difficoltà si può costruire un fascio di ipersuperfici di bigrado $(3, 2)$, di cui la X precedente fa parte, il cui elemento generico è unirazionale.

6. Alcune osservazioni.

Siano $(z_0, z_1, z_2, z_3, z_4)$ coordinate omogenee in $\mathbf{P}^4$ e consideriamo l'applicazione birazionale $\varphi: \mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2 \rightarrow \mathbf{P}^4$ definita sull'aperto $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2 \setminus \{x_2 y_2 = 0\}$ mediante le equazioni:

$$\begin{cases} z_0 = x_0 \\ z_1 = x_1 \\ z_2 = y_0 \\ z_3 = y_1 \end{cases}$$

che definiscono un isomorfismo tra $\{x_2 \neq 0\} \times \{y_2 \neq 0\}$ in $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2$ e $\{z_4 \neq 0\}$ in $\mathbf{P}^4$.

L'immagine dell'ipersuperficie $(1')$ per la φ è allora l'ipersuperficie di grado $p+2$ di $\mathbf{P}^4$ definita dall'equazione:

$$\begin{aligned} F^{p+2}(z_0, z_1, z_2, z_3, z_4) = & a_{00}(z_0, z_1, z_4) z_2^2 + 2 a_{01}(z_0, z_1, z_4) z_2 z_3 + \\ & + 2 [a_{02}(z_0, z_1, z_4) z_4] z_2 + a_{11}(z_0, z_1, z_4) z_3^2 + \\ & + 2 [a_{12}(z_0, z_1, z_4) z_4] z_3 + a_{22}(z_0, z_1, z_4) z_4^2 = 0. \end{aligned}$$

Si vede subito che $\varphi(F^{p,3})$ ha una retta di molteplicità p , che è la retta di equazioni $z_0 = z_1 = z_4 = 0$. Ipersuperfici di questo tipo sono studiate in [3] e [5].

L'ipersuperficie di bigrado $(3, 2)$ di cui al § precedente è trasformata nell'ipersuperficie:

$$2(z_4^3 - z_1^3) z_2^2 + 2(z_0^3 + z_4^3) z_2 z_3 + z_0^3 z_3^2 + 2 z_0^3 z_4 z_2 - 12 z_1^3 z_4 z_3 - 12 z_4^5 = 0.$$

Tale ipersuperficie possiede la retta tripla $z_0 = z_1 = z_4 = 0$ che non ha punti di singolarità maggiore (ma possiede due punti uniplanari), la retta doppia $z_2 = z_3 = z_4 = 0$ e nessun'altra singolarità.

BIBLIOGRAFIA

- [1] F. CONFORTO (1939) - *Le superfici razionali*, Zanichelli.
- [2] A. CONTE - *Lezioni sulle varietà algebriche a tre dimensioni*, Seminario del I.A.G.A. del C.N.R. a.a. 1977-78. Pitagora Tecnoprint, 167-260.
- [3] A. CONTE e J. P. MURRE (1977) - *On quartic threefolds with a double line*, «Indag. Math.», 80, 145-175.
- [4] D. MUMFORD (1974) - *Prym varieties I*, In: «Contributions to Analysis», New-York 325-350.
- [5] L. PICCO BOTTA e A. VERRA (1980) - *An example of unirational non-ratinal threefold which is a conic bundle over a rational surface*, «Indag. Math. », 42, 19-32.