Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mariano Torrisi

Sulla velocità di propagazione di onde di discontinuità in termoelasticità finita

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **69** (1980), n.3-4, p. 154–160.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1980_8_69_3-4_154_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Fisica matematica. — *Sulla velocità di propagazione i onde di discontinuità in termoelasticità finita* (*). Nota (**) di MARIANO TORRISI (***), presentata dal Socio G. GRIOLI.

SUMMARY. — After writing in lagrangian form the equations that characterize the thermomechanics of hyperelastic continua with finite deformations according to a recent hypothesis on the heat flux vector, we explore the possibility of wave propagation under conditions of complete interaction between thermal and mechanical phenomena.

1. INTRODUZIONE

Recentemente è stata proposta una modifica della classica legge di Fourier sul legame tra flusso di calore e temperatura, con lo scopo di eliminare il paradosso della velocità infinita di propagazione del calore e di stabilire inoltre un certo tipo di interazione fra i fenomeni termici ed i fenomeni meccanici [1].

Le teoria che ne deriva è stata applicata al caso dei fluidi non viscosi ed ai corpi elastici poco deformabili [2].

Lo scopo di questa Nota è quello di indagare, sulla base della nuova legge costitutiva, sulle possibili velocità di propagazione di onde termomeccaniche nel caso di corpi iperelastici con deformazioni finite, differenti da quelle, ben note, delle onde acustiche isoterme od adiabatiche.

Si trova che le velocità di propagazione (non nulle) soddisfano un'equazione di ottavo grado che si scinde in un'equazione di quarto grado e in due identiche di secondo grado. Quest'ultime danno luogo ad una propagazione effettiva solo se lo stato imperturbato non è esente da stress e questo ha carattere di trazione.

Lo studio dell'equazione irriducibile di quarto grado porta, in generale, alla determinazione di altre possibili velocità di propagazione.

Lo studio è stato portato avanti nel caso in cui lo stato imperturbato sia uno stato naturale di equilibrio termico, in corrispondenza al quale, in generale, sono possibili due distinte velocità di propagazione.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M.

(**) Pervenuta all'Accademia l'8 settembre 1980.

(***) Istituto di Meccanica Razionale e Matem. appl. all'Ingegneria, via Del Rotolo, 46, Catania.

2. SULLE EQUAZIONI DELLA TERMOELASTICITÀ

Si consideri un continuo omogeneo con deformazioni finite e si denoti con C′ la configurazione attuale e con C la configurazione di riferimento. Fissato un riferimento cartesiano trirettangolo indico con x_r le coordinate del generico elemento P′ di C′ e con y_r le coordinate del corrispondente P di C.

Sia

$$x_r = x_r(y_r, t) \tag{1}$$

la rappresentazione della trasformazione fra C e C′ continua, invertibile e dotata delle ben note proprietà di regolarità e plausibilità fisica.

Detto $\boldsymbol{u}$ lo spostamento PP′, si ponga, come è usuale,

$$u_r = x_r - y_r \quad , \quad x_{r,s} = \frac{\partial x_r}{\partial y_s} = \delta_{rs} + u_{r,s} \quad , \quad D = \det \| x_{r,s} \| > 0 \tag{2}$$

e si denoti con $\boldsymbol{a}$ l'operatore matriciale di componenti $a_{rs} = x_{r,s}$.

Dette ε_{rs} le caratteristiche di deformazione, per il seguito converrà considerare anche l'operatore

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a} = \mathbf{I} + 2\boldsymbol{\varepsilon} , \tag{3}$$

essendo $\boldsymbol{\varepsilon}$ l'operatore che caratterizza la deformazione del continuo.

Supposto che il continuo sia iperelastico, l'energia libera ψ dipenderà dalle caratteristiche di deformazione ε_{rs} e dalle temperature assolute $T^{(0)}$ e T di C e C′.

Detto Y_{rs} lo stress simmetrico di Piola–Kirchoff si ha, com'è ben noto,

$$Y_{rs} = -\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{rs}} . \tag{4}$$

Tenuto conto di (4) le equazioni indefinite in forma lagrangiana, con chiaro significato dei simboli, in base alle ben note espressioni delle ε_{rs}, si scrivono [1]

$$x_{r,is} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{is}} + x_{r,i}\, x_{p,hs}\, x_{p,l} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon_{hl}\, \partial \varepsilon_{is}} + T_{,s}\, x_{r,i} \frac{\partial^2 \psi}{\partial T\, \partial \varepsilon_{is}} = \rho\,(\ddot{u}_r - F_r) . \tag{5}$$

Denotando con $\boldsymbol{q}$ il vettore che caratterizza il flusso di calore all'istante t e non trascurando l'interazione fra fenomeni termici e fenomeni meccanici, l'equazione del calore, desunta dalla relazione di Clausius–Duhem, nell'ulte-

(1) Se la temperatura, $T^{(0)}$, dello stato di riferimento non è uniforme nella (5) va aggiunto un termine dipendente da $T^{(0)}{}_{,s}$. Tuttavia, esso non ha influenza alcuna sugli sviluppi che seguiranno.

riore ipotesi che il continuo sia a trasformazioni reversibili, assume l'aspetto:

$$c\dot{T} - T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \, \partial \varepsilon_{is}} x_{p,i} \dot{x}_{p,s} + q_{i,m} \frac{A_{i,m}}{D} = 0 \tag{6}$$

ove A_{im} è il complemento algebrico di a_{im} nella matrice $\boldsymbol{a}$ e c è il calore specifico sotto configurazione costante.

Anzichè l'abituale legge di Fourier che collega il vettore $\boldsymbol{q}$ al gradiente di temperatura, per i motivi accennati nell'introduzione, si assumerà quale legge costitutiva quella espressa dalla relazione [3], [4], [1]:

$$\boldsymbol{q} = -h\mathbf{L} \int_0^\infty e^{-hs} \boldsymbol{g}(t-s) \, ds \tag{7}$$

dove h è una costante di rilassamento positiva ed $\mathbf{L}$, come proposto in [1], un operatore matriciale funzione della temperatura e, tenuto conto del principio di indifferenza materiale, delle $x_{r,s}$.

Come è stato osservato in [1], da (7), posto $z = 1/h$, segue:

$$z\dot{q}_r + q_r - z \left[\frac{\partial L_{rm}}{\partial x_{p,s}} \dot{x}_{p,s} + \frac{\partial L_{rm}}{\partial T} \dot{T} \right] (\mathbf{L}^{-1})_{mt} \, q_t + L_{ri} \, T_{,m} \frac{A_{im}}{D} = 0 \tag{8}$$

che assieme alle (5) e alla (6) costituisce il sistema differenziale che caratterizza il comportamento termomeccanico del continuo.

3. Equazioni per le discontinuità

In relazione al sistema delle (5), (6), (8), si studierà la propagazione di discontinuità caratterizzata dalle seguenti condizioni: attraverso il fronte d'onda risultano continui oltre alle forze di massa, T, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{u}$ e le derivate prime di $\boldsymbol{u}$; possono avere invece delle discontinuità di prima specie le derivate prime di T e $\boldsymbol{q}$ e le seconde di $\boldsymbol{u}$.

Indicato con $\boldsymbol{n}$ il versore della normale al fronte d'onda, orientata nel verso di avanzamento, nella configurazione C, con V la velocità di propagazione (assunta positiva) e denotati con α, $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\lambda}$, lo scalare ed i vettori che rispettivamente caratterizzano le discontinuità delle derivate prime di T e $\boldsymbol{q}$ e delle seconde di $\boldsymbol{u}$, l'applicazione delle note formule di Hugoniot-Hadamard alle equazioni (5), (6), (8) dà luogo al seguente sistema di equazioni per le discontinuità:

$$\begin{cases} \alpha n_s \, x_{r,i} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial T \, \partial \varepsilon_{is}} + \lambda_p \, n_h \, n_s \, x_{p,l} \, x_{r,i} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon_{hl} \, \partial \varepsilon_{is}} + \lambda_r \left(n_i \, n_s \dfrac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{is}} - \rho V^2 \right) = 0 \,, \\[2ex] -zV\tau_r + zV \left[\dfrac{\partial L_{rm}}{\partial x_{p,s}} \lambda_p \, n_s + \dfrac{\partial L_{rm}}{\partial T} \alpha \right] (\mathbf{L}^{-1})_{mt} \, q_t + \alpha L_{ri} \, n_m \dfrac{A_{im}}{D} = 0 \,, \\[2ex] -\alpha c V + T \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial T \, \partial \varepsilon_{is}} \lambda_p \, n_i \, V x_{p,s} + \boldsymbol{\tau} \cdot (\boldsymbol{a}^{-1})^{T} \boldsymbol{n} = 0 \,. \end{cases} \tag{9}$$

Si osservi che l'ipotesi $z = \alpha = 0$, $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ riduce il sistema (9) alle ben note equazioni che caratterizzano le onde acustiche isoterme. Non si considererà questo caso già ampiamente studiato.

Da (9.11) moltiplicando per $(A_{rl}/D)\, n_l$ e sommando rispetto ad r si ha:

$$(10)\qquad \alpha\left[zV\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial T}\mathbf{L}^{-1}\boldsymbol{q}+\mathbf{L}(\boldsymbol{a}^{-1})^{T}\right]\cdot(\boldsymbol{a}^{-1})^{T}\boldsymbol{n}+\lambda_p V z\, n_s\left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_{p,s}}\mathbf{L}^{-1}\boldsymbol{q}\right)\cdot$$
$$\cdot(\boldsymbol{a}^{-1})^{T}\boldsymbol{n}-zV\boldsymbol{\tau}\cdot(\boldsymbol{a}^{-1})^{T}\boldsymbol{n}=0$$

che combinata con la (9.III), moltiplicata per zV (supposta $V \neq 0$), dà:

$$(11)\qquad \alpha\left[-zcV^2+zV\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial T}\mathbf{L}^{-1}\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{a}^{-1})^{T}\boldsymbol{n}+\mathbf{L}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}^{-1}\boldsymbol{n}\right]+$$
$$+\lambda_p zV\left[n_i\, x_{p,s}\, V\frac{\partial^2\psi}{\partial T\,\partial\varepsilon_{is}}T-n_s\left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_{p,s}}\mathbf{L}^{-1}\boldsymbol{q}\right)\cdot(\boldsymbol{a}^{-1})^{T}\boldsymbol{n}\right]=0\,.$$

Posto

$$(12)\qquad \Sigma=-zcV^2+zV\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial T}\mathbf{L}^{-1}\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{a}^{-1})^{T}\boldsymbol{n}+\mathbf{L}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}^{-1}\boldsymbol{n}\,,$$

e supposto [2] $\Sigma \neq 0$, da (11) segue:

$$(11')\qquad \alpha=-\lambda_p\frac{zV}{\Sigma}\left[n_i\, x_{p,s}\, V\frac{\partial^2\psi}{\partial T\,\partial\varepsilon_{is}}T-n_s\left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_{p,s}}\mathbf{L}^{-1}\boldsymbol{q}\right)\cdot(\boldsymbol{a}^{-1})^{T}\boldsymbol{n}\right].$$

Sostituendo in (9.1) si ottiene

$$(13)\qquad \lambda_p\frac{zV}{\Sigma}\left[n_i\, x_{p,s}\, V\frac{\partial^2\psi}{\partial T\,\partial\varepsilon_{is}}T-n_s\left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_{p,s}}\mathbf{L}^{-1}\boldsymbol{q}\right)\cdot(\boldsymbol{a}^{-1})^{T}\boldsymbol{n}\right]n_k\, x_{r,q}\frac{\partial^2\psi}{\partial T\,\partial\varepsilon_{qk}}+$$
$$-\lambda_p\, n_h\, n_k\, x_{p,l}\, x_{r,q}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varepsilon_{hl}\,\partial\varepsilon_{qk}}=\lambda_r\left(n_h\, n_k\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon_{hk}}-\rho V^2\right).$$

Se si pone

$$(14)\qquad B_{qphk}=\frac{zV}{\Sigma}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial T\,\partial\varepsilon_{hl}}TVx_{p,l}-\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_{p,h}}\mathbf{L}^{-1}\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{a}^{-1})^{T}\boldsymbol{n}\right]\frac{\partial^2\psi}{\partial T\,\partial\varepsilon_{qk}}+$$
$$+x_{p,l}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varepsilon_{hl}\,\partial\varepsilon_{qk}}$$

e

$$(15)\qquad \Lambda=n_h\, n_k\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon_{hk}}-\rho V^2$$

(2) Per brevità non si approfondirà il caso $\Sigma = 0$ il quale in generale porta a $\alpha = 0$, $\lambda = 0$, $\tau = 0$ e non dà luogo a propagazione.

le (13) assumono l'aspetto:

$$\lambda_p \left[n_h n_k x_{r,q} B_{qphk} - \delta_{rp} \Lambda \right] = 0 . \tag{16}$$

La determinazione delle possibili velocità di propagazione porta pertanto alla ricerca delle radici dell'equazione:

$$-\Lambda^3 + J_1 \Lambda^2 - J_2 \Lambda + J_3 = 0 , \tag{17}$$

ove con J_1, J_2, J_3 si sono indicati i tre invarianti principali della matrice:

$$M_{rp} = n_h n_k x_{r,q} B_{qphk} . \tag{18}$$

Con qualche sviluppo si riconosce che risulta:

$$J_2 = J_3 = 0 \quad \text{e} \quad J_1 = x_{r,q} B_{qrhk} n_h n_k \tag{19}$$

per cui la (17) si scinde nelle equazioni

$$\Lambda^2 = 0 \quad , \quad \Lambda - x_{r,q} B_{qrhk} n_h n_k = 0 . \tag{20}$$

4. Sulle possibili velocità di propagazione

Dalla (20.1), in base a (15), si ha

$$V^2 = \frac{1}{\rho} n_h n_k \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{hk}} \tag{21}$$

che, tenuto conto di (4), può scriversi

$$V^2 = -\frac{1}{\rho} Y_{hk} n_h n_k = -\frac{1}{\rho} \mathbf{Y}\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} . \tag{22}$$

La (22) è accettabile solo se è $\mathbf{Y}\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} \leq 0$.

Il significato di tale limitazione risulta chiaro non appena si osserva che detto $\mathbf{X}$ lo stress di Cauchy, $d\sigma'$ e $d\sigma$ gli elementi superficiali corrispondenti al fronte d'onda ed alla sua immagine nello stato di riferimento ed $\boldsymbol{n}'$ il versore della normale a $d\sigma'$ risulta, com'è ben noto,

$$\mathbf{Y} = D\boldsymbol{a}^{-1} \mathbf{X} (\boldsymbol{a}^T)^{-1} \quad , \quad \boldsymbol{n} = \frac{d\sigma'}{D d\sigma} \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{n}' ,$$

per cui la (22) diviene

$$V^2 = -\frac{1}{D\rho} \left(\frac{d\sigma'}{d\sigma} \right)^2 \mathbf{X}\boldsymbol{n}' \cdot \boldsymbol{n}' . \tag{23}$$

Si riconosce così che la (22) dà luogo ad una soluzione accettabile allora e solo allora che lo stress in P' non abbia carattere di pressione ($\mathbf{X}\boldsymbol{n}' \cdot \boldsymbol{n}' \leq 0$).

* * *

Supposto $\Sigma \neq 0$ (vedi nota (2)), sarà considerato il caso in cui il mezzo imperturbato sia in uno stato di equilibrio naturale a temperatura uniforme ($T = T^{(0)} = \text{cost}$, $\boldsymbol{q} = \mathbf{0}$).

Si deve osservare che in tale ipotesi, tenuto conto della continuità di $\boldsymbol{q}$, T e delle $x_{r,s}$ attraverso il fronte d'onda, risulta

$$\boldsymbol{q} \equiv \mathbf{0} \quad , \quad T \equiv T^{(0)} = \text{cost} \quad , \quad x_{r,s} = \delta_{rs} \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{rs}} = 0$$

anche su di esso.

In base a (15), si riconosce che la (20.1) dà $V = 0$. Esclusa tale soluzione, l'equazione risolvente è la (20.11) che per le (12), (15), supposto $V \neq 0$, e posto

$$(24) \qquad \beta = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon_{hq} \, \partial \varepsilon_{qk}} n_h n_k \quad , \quad \gamma_q = \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \, \partial \varepsilon_{qh}} n_h \quad , \quad m = \mathbf{L}\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} ,$$

diviene

$$(25) \qquad \rho z c V^4 - V^2 [\rho m + z (c\beta + T^{(0)} \gamma^2)] + \beta m = 0$$

il cui discriminante è

$$(26) \qquad \Delta (z) = z^2 (c\beta + T^{(0)} \gamma^2)^2 + 2 \rho m z (T^{(0)} \gamma^2 - \beta c) + \rho^2 m^2 .$$

Si riconosce che l'equazione in z, $\Delta (z) = 0$, non ha zeri reali. Infatti, oltre ad essere $\Delta (0) > 0$, con semplici calcoli si constata che il suo discriminante è espresso da

$$(27) \qquad \Delta^* = - 4 \rho^2 m^2 \beta c T^{(0)} \gamma^2 .$$

Basta allora riferirsi per ogni punto ad una terna unita di ε e denotare con E_i i coefficienti principali di ε per constatare che è [3]

$$(28) \qquad \beta = \frac{\partial^2 \psi}{\partial E_i^2} n_i^2 > 0 .$$

Ne segue $\Delta^* < 0$ e, pertanto, $\Delta (z) > 0$ per ogni z.

Vale la pena osservare, inoltre, che il coefficiente di V^2 nella (25) è certamente positivo se si continua ad ammettere, come nella teoria tradizionale, la condizione $\mathbf{L}\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} \geq 0$ in tal caso le due radici in V^2 della (25) oltre ad essere reali sono anche positive e si hanno due possibili velocità di propagazione.

(3) L'ipotesi di iperelasticità presuppone che lo stato di equilibrio naturale sia stabile. Ciò implica [5], [6]: $\partial^2 \psi / \partial E_i^2 > 0$.

Se, invece, $\mathbf{L}\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} < 0$ (il che non può escludersi a priori, dato che la classica legge di Fourier è sostituita dalla (7)) una sola delle due radici in V^2 della (25) sarebbe positiva e ciò corrisponderebbe ad una sola possibile velocità di propagazione.

Si può osservare che si giunge ancora ad una biquadratica, anche se la propagazione avviene in un mezzo che non si trova in uno stato di equilibrio, limitatamente però alla ricerca di onde la cui giacitura contiene il vettore

$$\boldsymbol{a}^{-1} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathrm{T}} \mathbf{L}^{-1} \boldsymbol{q} .$$

Per brevità si rinuncia a svolgere un'analoga discussione che porta alla esistenza di radici reali positive in V^2.

Mi è gradito rivolgere un sentito ringraziamento al prof. G. Grioli per le preziose osservazioni e i consigli ricevuti nell'elaborazione della presente Nota.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. GRIOLI (1979) – *Sulla propagazione di onde termomeccaniche nei continui*. Nota I, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », *67*, pp. 332–339.

[2] G. GRIOLI – *Sulla propagazione di onde termomeccaniche nei continui*. Nota II. « Rend. Acc. Naz. dei Lincei » (in corso di stampa).

[3] C. CATTANEO (1948) – *Sulla conduzione del calore*, « Atti del Seminario matematico e fisico dell'Università di Modena », *3*, pp. 83–101.

[4] M. E. GURTIN e A. C. PIPKIN (1968) – *A general theory of heat conduction with finite wave speeds*, « Arch. Rational Mech. Anal. », *31*, p. 113–126.

[5] A. SIGNORINI (1949) – *Trasformazioni termoelastiche finite*, Memoria 2, « Annali di Matematica pura e applicata », Ser. IV, *30*, pag. 8.

[6] G. GRIOLI (1962) – *Mathematical Theory of Elastic Equilibrium* (Recent results), Springer-Verlag, pag. 16.