Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Giulio Mattei

## Sulle rotazioni viscose in Meccanica dei plasmi

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **69** (1980), n.3-4, p. 142–146.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1980_8_69_3-4_142_0>

**Meccanica.** — *Sulle rotazioni viscose in Meccanica dei plasmi.* Nota (*) di GIULIO MATTEI (**), presentata dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — In this paper we extend to Plasma Mechanics the study of the so-called "viscous rotations" introduced in Fluid Mechanics by Cisotti in 1924. The plasma is described by the magnetofluiddynamic equations, with and without the Hall effect. Velocity and magnetic fields (and, in correspondence, the pressure field) that make such motions possible are determined.

## 1. FORMULAZIONE DEL PROBLEMA

Nell'ambito della Meccanica dei fluidi, U. Cisotti (in due Note Lincee del 1924, [1] e [2]) ha studiato e caratterizzato una classe di moti di un fluido (omogeneo) incomprimibile, viscoso, da lui chiamati «*rotazioni viscose*». Si tratta (cfr. [1], p. 161) di moti rotatori, attorno ad un asse fisso, compatibili con la natura fluida e viscosa di una massa incomprimibile, nei quali si suppone ogni «particella» (1) dotata di moto circolare, in un piano normale all'asse e col centro sull'asse stesso, diverso da una particella all'altra. Lo studio di questa classe di moti (assai significativa da un punto di vista fisico) è stato poi ripreso, più recentemente, sempre nell'ambito della Meccanica dei fluidi, in [3], Sect. 6 e 37, 38.

*Lo scopo di questa Nota è, in sintesi, quello di studiare le rotazioni viscose nell'ambito della Meccanica dei plasmi.* Specificatamente, consideriamo un plasma descritto dalle equazioni della magnetofluidodinamica (MFD), omogeneo, incomprimibile, viscoso (stokesiano lineare), dotato di conducibilità elettrica finita e soggetto a forze di massa di origine non elettromagnetica conservative; in un primo tempo si supporrà trascurabile l'effetto Hall, in un secondo tempo se ne terrà conto.

Nell'ambito delle equazioni indefinite *non linearizzate* descriventi tale plasma, ci si chiede se siano possibili moti MFD stazionari che siano rotazioni viscose e, in caso affermativo, ci si propone di determinare dei campi di velocità e dei campi magnetici (ed i corrispondenti campi di pressione) che rendono tali moti possibili (stabilendo così delle classi di soluzioni esatte delle equazioni di base).

Caso particolare delle rotazioni viscose sono le rotazioni rigide d'assieme: esse, per il plasma in esame, sono state studiate e caratterizzate in [4].

(*) Pervenuta all'Accademia l'8 settembre 1980.
(**) Meccanica Razionale, Facoltà di Ingegneria dell'Università di Pisa.
(1) Nel senso della Meccanica dei sistemi continui.

## 2. EQUAZIONI DI BASE

Le equazioni non lineari di base sono (in unità di Gauss)

$$\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{\omega} - \operatorname{grad}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} - \mathrm{U}\right) + \frac{1}{4\pi\mu\rho}(\operatorname{rot} \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B} + \nu\nabla^2 \boldsymbol{v} = 0 \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \tag{2.2}$$

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \wedge \mathbf{B}) + \nu_m \nabla^2 \mathbf{B} = 0 \tag{2.3}$$

con la condizione

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 . \tag{2.4}$$

In esse $\boldsymbol{v}$ è il campo di velocità, $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ il vortice, $p$ la pressione, $\rho$ la densità (costante), U il potenziale delle forze di massa di origine non elettromagnetica riferito all'unità di massa, $\mu$ la permeabilità magnetica (costante), $\mathbf{B}$ il vettore induzione magnetica, $\nu$ il coefficiente di viscosità cinematica (costante), $\nu_m = \dfrac{c^2}{4\pi\mu\sigma}$ il coefficiente (costante) di viscosità magnetica ($c$ velocità della luce nel vuoto, $\sigma$ conducibilità elettrica, costante).

Le (2.1), (2.2), (2.3) costituiscono un sistema non lineare di 7 equazioni differenziali alle derivate parziali in 7 funzioni incognite scalari: le tre componenti di $\boldsymbol{v}$, le tre di $\mathbf{B}$ e $p$.

Prendendo il rotore di ambo i membri della (2.1) si ottiene la

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}) - \nu\nabla^2 \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{4\pi\mu\rho} \operatorname{rot}(\mathbf{B} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{B}) = 0 . \tag{2.5}$$

Le equazioni (2.3) e (2.5) esprimono le condizioni caratteristiche affinché un campo di velocità $\boldsymbol{v}$ ed un campo magnetico $\mathbf{B}$ solenoidali competano ad un moto MFD di un fluido viscoso incomprimibile. In analogia con la nomenclatura idrodinamica (cfr. [3], p. 3) chiamiamo la (2.5) « equazione di compatibilità ».

Determinata una soluzione solenoidale ($\boldsymbol{v}$, $\mathbf{B}$) del sistema (2.5)-(2.3), la pressione $p$ si ricava dalla (2.1) con una quadratura.

## 3. SOLUZIONE DEL PROBLEMA

Introdotta una terna di coordinate cilindriche ortogonali T$(0 ; r, \varphi, z)$ di versori $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_z$, con $0z$ asse fisso di rotazione, per i moti in questione è (2)

$$\boldsymbol{v} = v(r)\, \boldsymbol{e}_\varphi . \tag{3.1}$$

(2) È opportuno notare esplicitamente che $v$ (componente fisica di $\boldsymbol{v}$ lungo $\boldsymbol{e}_\varphi$) è, per la (2.2), necessariamente indipendente da $\varphi$. La indipendenza di $v$ da $z$ (moto piano) invece è qui un'ipotesi a priori (che si rivelerà compatibile con il sistema di equazioni di base), mentre nel caso della Meccanica dei fluidi (cfr. [1] n. 4 e [3] p. 17) è una condizione che deve necessariamente verificarsi in forza della equazione di compatibilità.

Per (3.1), la (2.2) è identicamente soddisfatta e sussistono le

$$
(3.2)\qquad
\begin{cases}
\boldsymbol{\omega} = \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\mathrm{d}(rv)}{\mathrm{d}r}\,\boldsymbol{e}_z \\[2ex]
\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{\omega} = \operatorname{grad}\left(\dfrac{v^2}{2} + \displaystyle\int \dfrac{v^2}{r}\,\mathrm{d}r\right) \\[2ex]
\nabla^2 \boldsymbol{v} = \left(v'' + \dfrac{v'}{r} - \dfrac{v}{r^2}\right)\boldsymbol{e}_\varphi \\[2ex]
\operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}) = 0 \\[2ex]
\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = \left(v''' + \dfrac{2v''}{r} - \dfrac{v'}{r^2} + \dfrac{v}{r^3}\right)\boldsymbol{e}_z .
\end{cases}
$$

Per la (3.2), la (2.1) e la (2.5) assumono la forma

$$
(2.1')\qquad -\operatorname{grad}\left(\frac{p}{\rho} - \int \frac{v^2}{r}\,\mathrm{d}r - \mathrm{U}\right) + \\
+ \frac{1}{4\pi\mu\rho}(\operatorname{rot}\mathbf{B}) \wedge \mathbf{B} + \nu\left(v'' + \frac{v'}{r} - \frac{v}{r^2}\right)\boldsymbol{e}_\varphi = 0
$$

$$
(2.5')\qquad -\nu\left(v''' + \frac{2v''}{r} - \frac{v'}{r^2} + \frac{v}{r^3}\right)\boldsymbol{e}_z + \frac{1}{4\pi\mu\rho}\operatorname{rot}(\mathbf{B} \wedge \operatorname{rot}\mathbf{B}) = 0 .
$$

Cerchiamo, se esistono, classi di soluzioni esatte per le quali sia

$$
(3.3)\qquad \mathbf{B} = \mathrm{B}_\varphi(r)\,\boldsymbol{e}_\varphi + \mathrm{B}_z(r)\,\boldsymbol{e}_z .
$$

Da (3.3) segue [3]

$$
(3.4)\qquad \mathbf{B} \wedge \operatorname{rot}\mathbf{B} = \operatorname{grad}\left(\frac{\mathrm{B}^2}{2} + \int \frac{\mathrm{B}_\varphi^2}{r}\,\mathrm{d}r\right).
$$

La (2.4) resta identicamente soddisfatta dalla (3.3) e la (2.5′) diventa

$$
(3.5)\qquad v''' + \frac{2v''}{r} - \frac{v'}{r^2} + \frac{v}{r^3} = 0 .
$$

La (3.5) è un'equazione differenziale di Eulero il cui integrale generale è

$$
(3.6)\qquad v = \frac{\mathrm{A}}{r} + \mathrm{C}r + \mathrm{D}r\log r ,
$$

con A, C, D costanti arbitrarie.

(3) Si noti che, con un campo magnetico del tipo (3.3), se si suppone a priori $v = v(r, z)$, da (2.5) segue necessariamente, per (3.4), proiettando su $\boldsymbol{e}_\varphi : \partial v/\partial z = 0$ (cfr. nota (2)).

La (2.3), avendosi per (3.1) e (3.3) rot $(\boldsymbol{v} \wedge \mathbf{B}) = 0$, assume la forma

$$\nabla^2 \mathbf{B} = 0 . \tag{3.7}$$

La (3.7) proiettata su $\boldsymbol{e}_r$ dà un'identità; proiettata su $\boldsymbol{e}_\varphi$ dà

$$B_\varphi'' + \frac{B_\varphi'}{r} - \frac{B_\varphi}{r^2} = 0 , \tag{3.8}$$

il cui integrale generale è

$$B_\varphi = Er + F/r , \tag{3.9}$$

con E ed F costanti arbitrarie; proiettata su $\boldsymbol{e}_z$ dà

$$B_z'' + \frac{B_z'}{r} = 0 , \tag{3.10}$$

il cui integrale generale è

$$B_z = G \log r + H , \tag{3.11}$$

con G ed H costanti arbitrarie.

Passiamo ora alla determinazione della pressione. Da (2.1′) per (3.4) e (3.6) segue

$$\frac{p}{\rho} - U = \int \frac{v^2}{r}\, dr + 2 D v \varphi - \frac{B^2}{8\pi\mu\rho} - \frac{1}{4\pi\mu\rho} \int \frac{B_\varphi^2}{r}\, dr . \tag{3.12}$$

Se, come supponiamo, U è una funzione uniforme del posto ed il fluido occupa un dominio dove $\varphi$ può variare da zero a $2\pi$, per evitare polidromia nella pressione $p$ rispetto a cammini circondanti l'asse $z$ (polidromia fisicamente inaccettabile) porremo $D = 0$.

Conseguentemente da (3.6) segue

$$v = \frac{A}{r} + Cr \tag{3.13}$$

e da (3.12)

$$\frac{P}{\rho} - U = -\frac{A^2}{2}\frac{1}{r^2} + 2 AC \log r + \frac{C^2}{2} r^2 - \frac{1}{4\pi\mu\rho}\left(-\frac{F}{2}\frac{1}{r^2} + 2 EF \log r + \frac{E^2 r^2}{2}\right) + K , \tag{3.14}$$

con K costante arbitraria, è $P = p + p_m$ con $p_m = B^2/8\pi\mu$ pressione magnetica (da considerarsi nota in base a (3.3), (3.9) e (3.11)). La (3.14) determina la pressione.

*In definitiva possiamo concludere che per il plasma in esame sono possibili «rotazioni viscose» con un campo di velocità dato dalla* (3.13), *con un campo magnetico dato dalle* (3.3), (3.9) e (3.11) *e con campo di pressione dato dalla* (3.14).

Le costanti arbitrarie saranno utilizzate per soddisfare condizioni al contorno relative a specifici problemi.

Al riguardo osserviamo che se, in uno specifico problema, si richiede regolarità sull'asse di rotazione per il campo di velocità e per il campo magnetico, si deve porre $A = 0$, $F = 0$ e $G = 0$. Ne segue che le rotazioni viscose divengono in tal caso necessariamente rotazioni rigide d'assieme ed il campo magnetico assume la forma

$$\mathbf{B} = B_0\, \boldsymbol{e}_z + hr\, \boldsymbol{e}_\varphi\,, \tag{3.15}$$

con $B_0\, \boldsymbol{e}_z$ interpretabile come campo magnetico primario costante e $hr\boldsymbol{e}_\varphi$, con $h$ costante dimensionata, interpretabile come campo magnetico indotto. In corrispondenza, per la pressione segue da (3.14)

$$\frac{p}{\rho} + \frac{h^2 r^2}{4\,\pi\mu\rho} - \frac{C^2 r^2}{2} - U = \text{cost} \tag{3.16}$$

(cfr. [4], (3.12)).

## 4. Caso in cui non è trascurabile l'effetto Hall (cfr. [4], n. 4)

Nel caso in cui non è trascurabile l'effetto Hall le (2.1), (2.2) e (2.4) restano inalterate, mentre la (2.3) è sostituita dalla

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \wedge \mathbf{B}) + \nu_m \nabla^2 \mathbf{B} + \beta \operatorname{rot}(\mathbf{B} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{B}) = 0\,, \tag{4.1}$$

dove si è posto $\beta = c^2 \beta_H / 4\,\pi\mu$, con $\beta_H$ coefficiente di Hall.

Osservando che la (4.1) differisce dalla (2.3) per il solo termine contenente $\beta$ e tenuto conto della (3.4), è immediato riconoscere che i risultati del n. 3 restano validi anche in presenza dell'effetto Hall (analogamente a quanto visto in [4] n. 4 per le rotazioni rigide).

## Bibliografia


[1] U. Cisotti (1924) – *Rotazioni viscose*, «Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.», *33*, 1° Sem., 161–167.

[2] U. Cisotti (1924) – *Sull'integrazione dell'equazione delle rotazioni viscose*, ibidem, 253–257.

[3] R. Berker (1963) – *Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible*, «Handbuch der Physik», *Band VIII/2*, 1–384.

[4] G. Mattei (1979) – *Sulle rotazioni rigide in Meccanica dei plasmi*, «Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.», (8) *67*, 404–407.