Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mauro Biliotti, Guglielmo Lunardon

Insiemi di derivazione e sottopiani di Baer in un piano di traslazione

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **69** (1980), n.3-4, p. 135–141.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1980_8_69_3-4_135_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1980.

Geometria. — *Insiemi di derivazione e sottopiani di Baer in un piano di traslazione* (*). Nota (**) di MAURO BILIOTTI, e GUGLIELMO LUNARDON, presentata dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — We give a classification of the derivation sets of translation planes.

È ben noto che ogni piano affine A di traslazione di nucleo N può essere rappresentato, secondo André [2], mediante una congruenza F di sottospazi di un opportuno spazio vettoriale V sul corpo N (o, equivalentemente, secondo Bruck e Bose [4], mediante una fibrazione di sottospazi dello spazio proiettivo subordinato a V). È altresì noto che ad ogni insieme di derivazione sulla retta all'infinito di A corrisponde una congruenza parziale $D \subset F$ di V ed un insieme D' di sottogruppi di V $(+)$, ciascuno rappresentante un sottopiano di Baer di A, in modo tale che $F' = (F - D) \cup D'$ sia ancora una congruenza di sottogruppi di V $(+)$. In vari piani di traslazione noti gli elementi di D' risultano sottospazi di V. Ciò non è però vero in generale, come mostrato da A. Bruen in [6]. La presente nota è dedicata allo studio della struttura « vettoriale » degli elementi di D'. Tale studio permette di ottenere una classificazione degli insiemi di derivazione per una vasta classe di piani di traslazione comprendente tutti i piani di traslazione finiti. In particolare, per questi ultimi si mostra che esistono tre tipi di insiemi di derivazione, per ciascuno dei quali si forniscono esempi. I risultati di questa nota rettificano alcuni risultati di [14].

1. Ogni piano affine di traslazione A può essere rappresentato mediante un gruppo (abeliano) T ed una partizione di congruenza F di T [2]. Scriveremo $A = (\mathrm{T}, F)$. Gli endomorfismi di T che mutano in sé ogni componente di F costituiscono un corpo N (F), detto nucleo di F, isomorfo al corpo delle dilatazioni di A che fissano un medesimo punto. Se F è un sottocorpo di N (F), T può essere riguardato come spazio vettoriale sinistro V (F) su F e gli elementi di F risultano sottospazi di V (F). Scriveremo, in tal caso, $A = (\mathrm{V(F)}, F)$. Sia Δ un insieme di derivazione per $A = (\mathrm{T}, F)$ sulla retta all'infinito [11] e $D' = D'(\Delta)$ l'insieme dei sottopiani di Baer associati a Δ e passanti per O (O elemento neutro di T). Ogni sottopiano $\Sigma \in D'$ risulta, come insieme di punti, un sottogruppo di T [11]. Continueremo ad indicare con Σ il sottogruppo e con D' l'insieme dei sottogruppi. Se D denota l'insieme delle componenti di F rappresentanti le rette di A con il punto all'infinito in Δ, $F' = (F - D) \cup D'$ risulta ancora una congruenza di T e (T, F') è il piano affine (di trasla-

(*) Lavoro svolto nell'ambito delle attività del G.N.S.A.G.A del C.N.R.
(**) Pervenuta all'Accademia il 1° ottobre 1980.

zione) derivato di A mediante Δ. Sia $\Sigma \in D'$; gli elementi di $\mathrm{N}(F)$ che mutano in sé Σ costituiscono un sottocorpo $\mathrm{N}(\Sigma)$ di $\mathrm{N}(F)$. Esso è il massimo sottocorpo di $\mathrm{N}(F)$ su cui Σ risulta uno spazio vettoriale (sinistro).

Sia $A = (\mathrm{T}, F)$ un piano affine di traslazione e Δ un insieme di derivazione per A; sia $\Sigma \in D'(\Delta)$ e Q il quasicorpo destro (1) che coordinatizza A rispetto al riferimento $(\mathrm{O}, \mathrm{E}, \mathrm{U}_\infty, \mathrm{V}_\infty)$ con $\mathrm{O} \equiv O$, $\mathrm{U}_\infty, \mathrm{V}_\infty \in \Delta$ ed $\mathrm{E} \in \Sigma$. Com'è noto [7], [14], [9] il sottoanello ternario di Q che coordinatizza Σ risulta un corpo K e Q uno spazio vettoriale destro di dimensione 2 su K. Diremo, in tal caso, che (Q, K) Σ-coordinatizza A. I sottopiani di Baer di D', tutti fra loro isomorfi, sono rappresentati da tutti e soli gli insiemi di punti del tipo $\{(a\alpha, a\beta)/\alpha, \beta \in \mathrm{K}\}$ con $a \in \mathrm{Q}$, $a \neq 0$.

Denotiamo con $\mathrm{N}(\mathrm{Q})$ il nucleo di Q e sia $\mathrm{Z}(\mathrm{Q}) = \{a \in \mathrm{Q} / ab = ba, \forall b \in \mathrm{Q}\}$. La corrispondenza fra $\mathrm{N}(\mathrm{Q})$ ed $\mathrm{N}(F)$ che ad $n \in \mathrm{N}(\mathrm{Q})$ associa l'applicazione $\sigma_n : (a, b) \to (na, nb)$ è un isomorfismo. Nel seguito, quando diremo che due sottocorpi, l'uno di $\mathrm{N}(\mathrm{Q})$, l'altro di $\mathrm{N}(F)$, sono fra loro isomorfi, intenderemo sempre che sono isomorfi nell'isomorfismo sopra citato. Per ogni $a \in \mathrm{Q}$ poniamo:

$$\mathrm{N}_a = \{n \in \mathrm{N}(\mathrm{Q}) / na = a\bar{n} \quad \text{con} \quad \bar{n} \in \mathrm{K}\},$$

$$\mathrm{K}_a = \{\alpha \in \mathrm{K} / a\alpha = \tilde{\alpha} a \quad \text{con} \quad \tilde{\alpha} \in \mathrm{N}(\mathrm{Q})\}.$$

Vale il seguente

LEMMA 1.

(*i*) *Se* $\Sigma \in D'$, $\Sigma = \{(a\alpha, a\beta)\}$, *risulta* $\mathrm{N}_a \simeq \mathrm{N}(\Sigma)$;

(*ii*) K_a *è un corpo e l'applicazione* $\varphi_a : \mathrm{N}_a \to \mathrm{K}_a$ *definita da* $n \to \bar{n}$ *è un isomorfismo fra* N_a *e* K_a;

(*iii*) *siano* $a, b \in \mathrm{Q} - \mathrm{K}$ *e* $b = a\alpha + \beta$ *con* $\alpha, \beta \in \mathrm{K}$ *e* $\beta \neq 0$, *se* $\gamma \in \mathrm{N}_a \cap \mathrm{N}_b \cap \mathrm{K}$ *risulta* $\gamma^{\varphi_a i_\alpha} = \gamma^{\varphi_b} = \gamma^{i_\beta}$, *ove* i_α *ed* i_β *sono gli automorfismi interni di* K *indotti da* α *e da* β.

Dimostrazione. (*i*) Sia $\sigma_n \in \mathrm{N}(\Sigma)$. Deve risultare $(na, na) \in \Sigma$, ossia $(na, na) = (a\bar{n}, a\bar{n})$ con $\bar{n} \in \mathrm{K}$. Pertanto $n \in \mathrm{N}_a$. Viceversa sia $n \in \mathrm{N}_a$. Poiché $\mathrm{N}(\mathrm{Q})$ è il nucleo di Q e Q è uno spazio vettoriale destro su K risulta

$$(n(a\alpha), n(a\beta)) = ((na)\alpha, (na)\beta) = ((a\bar{n})\alpha, (a\bar{n})\beta = (a(\bar{n}\alpha), a(\bar{n}\beta)),$$

ossia $\Sigma^{\sigma_n} = \Sigma$ e quindi $\sigma_n \in \mathrm{N}(\Sigma)$. (*ii*) l'applicazione φ_a è iniettiva; inoltre siano $n, m \in \mathrm{N}_a$. È

$$(n + m)a = na + ma = a\bar{n} + a\bar{m} = a(\bar{n} + \bar{m}).$$

Ne segue $\overline{n + m} = \bar{n} + \bar{m}$. È anche

$$(nm)a = n(ma) = n(a\bar{m}) = (na)\bar{m} = (a\bar{n})\bar{m} = a(\bar{n}\bar{m}),$$

(1) Vale $(a + b)c = ac + bc$ per ogni $a, b, c \in \mathrm{Q}$.

e quindi $\overline{nm} = \bar{n}\bar{m}$. Ciò prova l'asserto. *(iii)* Sia $\gamma \in N_a \cap N_b \cap K$, risulta

$$\gamma b = \gamma (a\alpha + \beta) = \gamma (a\alpha) + \gamma\beta = (\gamma a)\, \alpha + \gamma\beta =$$
$$= (a\gamma^{\varphi_a})\, \alpha + \gamma\beta = a\, (\gamma^{\varphi_a}\, \alpha) + \gamma\beta\, .$$

D'altra parte è anche

$$\gamma b = b\gamma^{\varphi_b} = (a\alpha + \beta)\, \gamma^{\varphi_b} = a\, (\alpha\gamma^{\varphi_b}) + \beta\gamma^{\varphi_b}\, .$$

Ne discende $\gamma^{\varphi_a}\, \alpha = \alpha\gamma^{\varphi_b}$ e $\gamma\beta = \beta\gamma^{\varphi_b}$, da cui l'asserto.

Notiamo che, per *(i)*, se $b = a\alpha$, e quindi $\{(a\alpha\, , a\beta)\} = \{(b\alpha\, , b\beta)\}$, è $N_a = N_b$.

Sia $N(F')$ il nucleo della congruenza F'. Vale il seguente

TEOREMA 1. *È* $\bigcap_{a \in Q^*} N_a = N(Q) \cap K \cap Z(Q)$ [2]. *Il sottocorpo di* $N(F)$ *isomorfo a* $N(Q) \cap K \cap Z(Q)$ *è il massimo sottocorpo di* $N(F)$ *sul quale ogni sottopiano di Baer di* D' *risulta uno spazio vettoriale (sinistro) e coincide pertanto con* $N(F) \cap N(F')$.

Dimostrazione. Poiché chiaramente $N_1 = N(Q) \cap K$ (1 unità di Q) è $\bigcap_{a \in Q^*} N_a \subseteq K$. Sia $\gamma \in \bigcap_{a \in Q^*} N_a$. Ponendo in *(iii)* $\alpha = \beta = 1$ segue $\gamma^{\varphi_a} = \gamma$ per ogni $a \in Q - K$. Tenuto conto di ciò, per $\beta = 1$, da *(iii)* segue $\gamma^{i_\alpha} = \gamma$ per ogni $\alpha \in K^*$. Se ne conclude $\gamma \in Z(Q)$. Pertanto $\bigcap_{a \in Q^*} N_a \subseteq N(Q) \cap K \cap Z(Q)$. Valendo ovviamente l'altra inclusione la prima parte del teorema è provata. Il sottocorpo di N (F) isomorfo a $N(Q) \cap K \cap Z(Q)$ coincide (Lemma 1, *(i)*) con $\bigcap_{\Sigma \in D'} N(\Sigma)$ ed è pertanto costituito da tutti e soli gli elementi di $N(F)$ che mutano in sé ogni sottopiano di D'. Da ciò segue l'asserto.

Supporremo nel seguito che $N(Q)$ e K siano campi.

LEMMA 2. *Se* $a\, , b \in Q - K$ *ed* $\{(a\alpha\, , a\beta)\}$ *e* $\{(b\alpha\, , b\beta)\}$ *rappresentano sottopiani di Baer di* D' *distinti, allora risulta*

$$N_a \cap N_b \cap K = N(Q) \cap K \cap Z(Q)\, .$$

Dimostrazione. Sia $\gamma \in N_a \cap N_b \cap K$. Poiché per l'ipotesi posta, è $b = a\delta + \delta'$ con $\delta' \neq 0$ $(\delta\, , \delta' \in K)$, dal Lemma 1, *(iii)* discende $\gamma^{\varphi_a} = \gamma^{\varphi_b} = \gamma$. Allora, se $c \in Q\, , c = a\eta + \nu$ $(\eta\, , \nu \in K)$, risulta

$$\gamma c = \gamma (a\eta + \nu) = \gamma (a\eta) + \gamma\nu = (\gamma a)\, \eta + \gamma\nu = (a\gamma)\, \eta + \gamma\nu =$$
$$= a\, (\eta\gamma) + \nu\gamma = (a\eta + \nu)\, \gamma = c\gamma\, .$$

ossia $\gamma \in Z(Q)$. È pertanto $N_a \cap N_b \cap K \subseteq N(Q) \cap K \cap Z(Q)$. Valendo banalmente l'inclusione inversa l'asserto è provato.

(2) $Q^* = Q - \{0\}$.

Possiamo ora enunciare il seguente

TEOREMA 2. *Sia* $A = (\mathrm{T}\,, F)$ *un piano affine di traslazione e* Δ *un insieme di derivazione per* A. *Supponiamo inoltre che* $\mathrm{N}(F)$ *sia un campo e che i sottopiani di Baer associati a* Δ *siano piani di Pappo. Si verifica necessariamente uno dei seguenti casi*:

I) $\mathrm{N}(F) \subseteq \mathrm{N}(F')$ *e sono soddisfatte le condizioni*:

I.a) $\mathrm{N}(\Sigma) = \mathrm{N}(F)$ *per ogni sottopiano di Baer* Σ *di* $D'(\Delta)$,

I.b) *se* $(\mathrm{Q}\,, \mathrm{K})$ Σ*–coordinatizza* A *con* $\Sigma \in D'(\Delta)$ *risulta*

$$\mathrm{N}(\mathrm{Q}) \subseteq \mathrm{K} \cap \mathrm{Z}(\mathrm{Q})\,;$$

II) $\mathrm{N}(F) \nsubseteq \mathrm{N}(F')$ *e sono soddisfatte le condizioni*:

II–a) *l'insieme* $S = \{\Sigma_i / i \in \mathrm{I}\}$ *dei sottopiani di Baer di* $D'(\Delta)$ *tali che* $\mathrm{N}(\Sigma_i) = \mathrm{N}(F)$ *ha cardinalità non superiore a due*; *per ogni sottopiano di Baer di* $D'(\Delta)$ *non in* S *risulta* $\mathrm{N}(\Sigma) = \mathrm{N}(F) \cap \mathrm{N}(F')$,

II.b) *se* $(\mathrm{Q}\,, \mathrm{K})$ Σ_i*–coordinatizza* A $(i \in \mathrm{I})$ *risulta*:

1) $\mathrm{N}(\mathrm{Q}) \subseteq \mathrm{K}$,

2) $\mathrm{N}(F) \cap \mathrm{N}(F') \simeq \mathrm{N}(\mathrm{Q}) \cap \mathrm{Z}(\mathrm{Q})$,

3) *se* $|S| = 2$ *e* $\Sigma_j = \{(a\alpha\,, a\beta)\}$ $(j \neq i)$ *esiste un monomorfismo non identico* $\sigma : \mathrm{N}(\mathrm{Q}) \to \mathrm{K}$ *tale che* $na = an^{\sigma}$ *per ogni* $n \in \mathrm{N}(\mathrm{Q})$;

II.c) *se* $(\mathrm{Q}\,, \mathrm{K})$ Σ*–coordinatizza* A *con* $\Sigma \in D'(\Delta) - S$ *risulta*

1) $\mathrm{N}(\mathrm{Q}) \cap \mathrm{K} \subseteq \mathrm{Z}(\mathrm{Q})$,

2) $\mathrm{N}(F) \cap \mathrm{N}(F') \simeq \mathrm{N}(\mathrm{Q}) \cap \mathrm{K}$,

3) *se* $\Sigma_i = \{(a_i\,\alpha\,, a_i\,\beta)\}$ $(i \in \mathrm{I})$ *esiste un monomorfismo* $\sigma_i : \mathrm{N}(\mathrm{Q}) \to \mathrm{K}$ *tale che* $na_i = a_i\, n^{\sigma_i}$ *per ogni* $n \in \mathrm{N}(\mathrm{Q})$.

Dimostrazione. Sia $\mathrm{N}(F) \subseteq \mathrm{N}(F')$. Poiché (Teorema 1) $\mathrm{N}(F) \supseteq \mathrm{N}(\Sigma) \supseteq \mathrm{N}(F) \cap \mathrm{N}(F')$, risulta $\mathrm{N}(\Sigma) = \mathrm{N}(F)$ per ogni $\Sigma \in D' = D'(\Delta)$. Sia $\Sigma \in D'$ e supponiamo che $(\mathrm{Q}\,, \mathrm{K})$ Σ–coordinatizzi A. È $\mathrm{N}_1 \simeq \mathrm{N}(\Sigma) = \mathrm{N}(F) \simeq \mathrm{N}(\mathrm{Q})$ ed $\mathrm{N}_1 \subseteq \mathrm{K}$, ossia $\mathrm{N}(\mathrm{Q}) \subseteq \mathrm{K}$. D'altra parte è (Teorema 1) $\mathrm{N}(\mathrm{Q}) = \bigcap_{a \in \mathrm{Q}^*} \mathrm{N}_a = \mathrm{N}(\mathrm{Q}) \cap \mathrm{K} \cap \mathrm{Z}(\mathrm{Q}) = \mathrm{N}(\mathrm{Q}) \cap \mathrm{Z}(\mathrm{Q})$ e quindi $\mathrm{N}(\mathrm{Q}) \subseteq \mathrm{Z}(\mathrm{Q})$. Sussiste pertanto I.b. Sia $\mathrm{N}(F) \nsubseteq \mathrm{N}(F')$. Esistano $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3 \in D'$, $\Sigma_1 \neq \Sigma_2 \neq \Sigma_3 \neq \Sigma_1$, tali che $\mathrm{N}(\Sigma_1) = \mathrm{N}(\Sigma_2) = \mathrm{N}(\Sigma_3) = \mathrm{N}(F)$. Supponiamo che $(\mathrm{Q}\,, \mathrm{K})$ Σ_1–coordinatizzi A e sia $\Sigma_2 = \{(a\alpha\,, a\beta)\}$ e $\Sigma_3 = \{(b\alpha\,, b\beta)\}$. Risulta $\mathrm{K} \supseteq \mathrm{N}_1 = \mathrm{N}(\mathrm{Q})$ ed $\mathrm{N}_a = \mathrm{N}_b = \mathrm{N}(\mathrm{Q})$. Per il Lemma 2 è allora $\mathrm{N}(\mathrm{Q}) \cap \mathrm{K} \cap \mathrm{Z}(\mathrm{Q}) = \mathrm{N}(\mathrm{Q})$ e quindi, per il Teorema 1, $\mathrm{N}(F) \cap \mathrm{N}(F') \simeq \mathrm{N}(\mathrm{Q}) \cap \mathrm{K} \cap \mathrm{Z}(\mathrm{Q}) = \mathrm{N}(\mathrm{Q}) \simeq \mathrm{N}(F)$ da cui segue $\mathrm{N}(F) \subseteq \mathrm{N}(F')$, contrariamente a quanto supposto. Sia $\Sigma \in D' - S$ e $(\mathrm{Q}\,, \mathrm{K})$ Σ–coordinatizzi A. È $\mathrm{N}(\mathrm{Q}) \nsubseteq \mathrm{K}$. Sia $n \in \mathrm{N}(\mathrm{Q}) - \mathrm{K}$. Poiché $\mathrm{N}(\mathrm{Q})$ è un campo risulta $\mathrm{N}_n = \mathrm{N}(\mathrm{Q}) \cap \mathrm{K}$. Se $\gamma \in \mathrm{N}_n$ è $\gamma n = n\gamma$. Procedendo come nella dimostrazione del Lemma 2 si prova allora che $\gamma c = c\gamma$

per ogni $c \in \mathrm{Q}$, ossia $\mathrm{Z(Q)} \supseteq \mathrm{N}_n = \mathrm{N(Q)} \cap \mathrm{K}$. Per il Teorema 1 è allora $\mathrm{N}(F) \cap \mathrm{N}(F') \simeq \mathrm{N(Q)} \cap \mathrm{K} \cap \mathrm{Z(Q)} = \mathrm{N(Q)} \cap \mathrm{K}$. Essendo $\mathrm{N}(\Sigma) \simeq \mathrm{N_I} = \mathrm{N(Q)} \cap \mathrm{K}$, restano provati II.a, II.c.1 e II.c.2; II.c.3 segue dal Lemma 1 (*ii*). Se (Q, K) Σ_i–coordinatizza A ($i \in \mathrm{I}$), allora $\mathrm{N(Q)} \subseteq \mathrm{K}$ e per il Teorema 1 risulta $\mathrm{N}(F) \cap \mathrm{N}(F') \simeq \mathrm{N(Q)} \cap \mathrm{Z(Q)}$. Ciò prova II.b.1 e II.b.2; II.b.3 segue dal Lemma 1 (*ii*).

Gli insiemi di derivazione verificanti il caso I del Teorema 2 saranno detti di *tipo* I, quelli verificanti il caso II saranno detti di *tipo* II.0, II.1 o II.2 secondoché $|S| = 0, 1$ o 2.

TEOREMA 3. *Sia $A = (\mathrm{T}, F)$ un piano affine di traslazione finito e Δ un insieme di derivazione per A. Si verifica necessariamente uno dei seguenti casi*:

1) Δ è *di tipo* I;

2) Δ *è di tipo* II.0, *A ha dimensione dispari sul nucleo* (3) *ed* $[\mathrm{N}(F) : \mathrm{N}(F) \cap \mathrm{N}(F')] = 2$ (4);

3) Δ *è di tipo* II.2 *ed A ha dimensione pari sul nucleo* (5).

Dimostrazione. Supponiamo che Δ non sia di tipo I. Sia p^{2k} (p numero primo) l'ordine di A e quindi $|D'| = p^k + 1$, sia inoltre $|\mathrm{N}(F) \cap \mathrm{N}(F')| = p^h$. Per il Teorema 2, II.c.2, è $h \mid k$. Sia infine $|\mathrm{N}(F)| = p^s$. Si ha $s \mid 2k$, $h \mid s$, $h < s$. $\mathrm{N}(F)^* = \mathrm{N}(F) - \{0\}$ opera come gruppo di permutazioni su D'. Se $\Sigma \in D' - S$, per il Teorema 2, II lo stabilizzatore di Σ in $\mathrm{N}(F)^*$ ha ordine $p^h - 1$. Σ appartiene pertanto ad un'orbita di $\mathrm{N}(F)^*$ su D' di lunghezza $(p^s - 1)/(p^h - 1)$. Posto $|S| = m$, ed indicato con n il numero delle orbite di $\mathrm{N}(F)^*$ di lunghezza maggiore di uno, deve sussistere quindi la relazione

$$p^k + 1 = m + n\,(p^s - 1)/(p^h - 1)\,. \tag{1}$$

È subito visto che la (1) non sussiste per $m = 1$. Per $m = 2$ deve aversi $s \mid k$ poiché, se (Q, K) Σ_i–coordinatizza A ($i \in \mathrm{I}$), è $\mathrm{N(Q)} \subseteq \mathrm{K}$. A deve avere pertanto dimensione pari sul nucleo e la (1) sussiste con $n = (p^k - 1)(p^h - 1)/(p^s - 1)$. Per $m = 0$ la (1) sussiste se e solo se $s \nmid k$, e quindi A ha dimensione dispari sul nucleo, ed inoltre $s = 2h$, ossia $[\mathrm{N(Q)} : \mathrm{N(Q)} \cap \mathrm{K}] = [\mathrm{N}(F) : \mathrm{N}(F) \cap \mathrm{N}(F')] = 2$. Infatti, se $m = 0$, posto $p^h = q$, $t = k/h$, $r = s/h$, la (1) diviene

$$q^t + 1 = n\,(q^r - 1)/(q - 1)\,. \tag{1'}$$

(3) Per dimensione di A sul nucleo si intende la dimensione sul nucleo di un qualsiasi quasicorpo che coordinatizza A.

(4) $[\mathrm{N}(F) : \mathrm{N}(F) \cap \mathrm{N}(F')]$ denota la dimensione di $\mathrm{N}(F)$ riguardato come spazio vettoriale su $\mathrm{N}(F) \cap \mathrm{N}(F)')$.

(5) Il presente teorema rettifica il Teorema 4 di [14]. Per un caso particolare si veda [12].

Se $s \mid k$, ossia $r \mid t$, allora $q^r - 1 \mid q^t - 1$ e quindi $(q^t + 1, (q^r - 1)/(q - 1)) = 1$ o 2 e la (1') non sussiste; pertanto $s \nmid k$. Se n soddisfa (1') si può porre $n = q^{t-(r-1)} - q^{t-r} + n_1$, con n_1 intero positivo, e sussiste la relazione

$$q^{t-r} + 1 = n_1 (q^r - 1)/(q - 1) .$$

Iterando il procedimento, se $lr < t < l(r + 1)$ (l intero positivo), sussiste la relazione

$$q^{t-lr} + 1 = n_l (q^r - 1)/(q - 1)$$

con n_l intero positivo. Deve allora essere $t - lr = r - 1$, $r = 2$ ed $n_l = 1$. Pertanto $s = 2h$ e la (1') sussiste con $n = (q^t + 1)/(q + 1)$.

Esistono insiemi di derivazione di tutti i tipi ammessi dal Teorema 3. I piani di André di dimensione 2 sul nucleo posseggono insiemi di derivazione di tipo I. I piani sopra i « twisted fields » generalizzati di A. A. Albert [1] di dimensione 2 sul nucleo destro e di dimensione dispari sul nucleo sinistro posseggono insiemi di derivazione di tipo II.0. Infine i piani sopra i semicorpi di D. E. Knuth di tipo III e IV [13] posseggono insiemi di derivazione di tipo II.2. In [10] A. Herzer e G. Lunardon hanno dato un esempio di piano di traslazione finito che possiede insiemi di derivazione sia di tipo I che di tipo II.2.

Concludiamo con alcune osservazioni.

OSSERVAZIONE 1. Le condizioni I.a ed I.b del Teorema 2 sono diretta conseguenza della condizione $N(F) \subseteq N(F')$ e sussistono senza alcuna restrizione su $N(Q)$ e $D'(\Delta)$.

OSSERVAZIONE 2. Se A è un piano affine desarguesiano e Δ un insieme di derivazione per A, allora è ovviamente $N(\Sigma) \neq N(F)$ per ogni $\Sigma \in D'(\Delta)$. Se $\Sigma \in D'(\Delta)$ e (Q, K) Σ-coordinatizza A, risulta, per il Teorema 1, $N(F) \cap N(F') \simeq K \cap Z(Q)$. In [3] è stato provato che addirittura risulta $N(F') \simeq K \cap Z(Q)$. Se poi A è un piano di Pappo, allora risulta $N(F') = N(\Sigma) \simeq K$ per ogni $\Sigma \in D'(\Delta)$.

OSSERVAZIONE 3. Se V è uno spazio vettoriale sul corpo F, sia P (V/F) lo spazio proiettivo costituito dai sottospazi di V. Dato il piano affine di traslazione $A = (V(F), F)$ con $F \subseteq N(F)$, l'insieme F costituisce, com'è ben noto, una fibrazione di P (V/F) (V = V (F)). Sia Δ un insieme di derivazione per A. Se $\Sigma \in D'(\Delta)$, Σ risulta un sottospazio di P (V/F) se e solo se $F \subset N(\Sigma)$. Se $F \subseteq N(F) \cap N(F')$, allora tutti i sottopiani di Baer di $D'(\Delta)$ risultano sottospazi di P (V/F) e $D(\Delta)$, $D'(\Delta)$ costituiscono, nella terminologia di [5], una « regular pair » di « switching sets » di P (V/F). $D(\Delta)$, $D'(\Delta)$ costituiscono una « regular pair » di « switching sets » di P (V/N(F)) se e solo se Δ è di tipo I. Se Δ è di tipo II.2 non esiste alcuna limitazione per $[N(F) : N(\Sigma)]$ (nei piani sopra i semicorpi di Knuth di tipo III e IV, $[N(F) : N(\Sigma)]$ può risultare un intero positivo qualsiasi). Se $[N(F) : N(F) \cap N(F')] = 2$ e Σ' denota l'insieme dei sottospazi unodimensionali di V (N(F)) aventi intersezione non nulla con Σ, Σ' risulta una sottogeometria di P (V/N(F)) della stessa dimensione di P (V/N(F)) o un sottospazio di P (V/N(F)). Poichè, come facilmente si verifica, se $\Sigma_1, \Sigma_2 \in D'(\Delta)$ risulta $\Sigma'_1 = \Sigma'_2$ o $\Sigma'_1 \cap \Sigma'_2 = \varnothing$, tenuto conto dei risultati del Teorema 2, resta determinata una partizione di $D(\Delta)' = \bigcup_{\Sigma \in D'(\Delta)} \Sigma'$ in un certo numero di sottogeometrie di P (V/N(F)) delle quali al più due risultano sottospazi. Ad uno studio della situazione geometrica ora descritta, limitatamente al caso di piani di traslazione di dimensione 2 sul nucleo finiti, è dedicato [8].

OSSERVAZIONE 4. Sia A un piano di traslazione finito di dimensione 2 sul nucleo e siano Δ e $\bar{\Delta}$ due insiemi di derivazione per A. Se Δ e $\bar{\Delta}$ non sono entrambi di tipo II.2 è possibile provare che $|\Delta \cap \bar{\Delta}| \leq 2$. Infatti sia $|\Delta \cap \bar{\Delta}| > 2$ e supponiamo Δ di tipo II.2 e

$\overline{\Delta}$ di tipo I. Sia $\Sigma \in D'(\Delta)$ con $N(\Sigma) = N(F)$ e (Q, K) Σ–coordinatizzi A in modo tale che U_∞, V_∞ ed il punto all'infinito della retta OE appartengano a $\Delta \cap \overline{\Delta}$, allora $(Q, \overline{K})$ $\overline{\Sigma}$–coordinatizza A per un certo sottopiano $\overline{\Sigma} \in D'(\overline{\Delta})$. Per il Teorema 3 risulta $K = N(Q) = \overline{K}$ e quindi $\Delta = \overline{\Delta}$. Analogo è il ragionamento se Δ e $\overline{\Delta}$ sono entrambi di tipo I. Se Δ e $\overline{\Delta}$ sono sono entrambi di tipo II.2, il risultato sopra citato non sussiste. Esistono infatti [12] semicorpi di Knuth di ordine q^4 tali che i nuclei destro, sinistro e mediano hanno ciascuno ordine q^2 e si intersecano a due a due in un sottocampo di ordine q.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. A. ALBERT (1961) – *Generalized twisted fields*, « Pacif. J. Math. », *11*, 1–8.

[1] J. ANDRÈ (1954) – *Über nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe*, « Math. Z. », *60*, 156–186.

[3] M. BILIOTTI (1980) – *Sui derivati dei piani desarguesiani*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », *62*, 165–181.

[4] R. H. BRUCK–R. C. BOSE (1964) – *The construction of translation planes from projective spaces*, « J. Algebra », *1*, 85–102.

[5] R. H. BRUCK–R. C. BOSE (1966) – *Linear representations of projective planes in projective spaces*, « J. Algebra », *4*, 117–172.

[6] A. BRUEN (1972) – *Spreads and a Conjecture of Bruck and Bose*, « J. Algebra », *23*, 519–537.

[7] D. A. FOULSER (1972) – *Subplanes of partial spreads in translation planes*, « Bull. London Math. Soc. », *4*, 32–38.

[8] J. W. FREEMAN (1980) – *Reguli and pseudo-reguli in* PG$(3, s^2)$, « Geom. Dedicata », *9*, 267–280.

[9] T. GRUNDHÖFER (1978) – *Reguli, normale Teilquasicorper und ableitbare Translationsebenen*, « Diplomarbeit, Kaserlautern ».

[10] A. HERZER–G. LUNARDON (1980) – *Regoli, pseudoregoli e varietà algebriche*, « Boll. Un. Mat. It. », (5) *17-A*, 323–329.

[11] N. L. JOHNSON (1972) – *Derivation in infinite planes*, « Pacif. J. Math. », *43*, 387–402.

[12] N. L. JOHNSON–A. RAHILLY (1977) – *On elations of derived semifield planes*, « Proc. London Math. Soc. » (3) *35*, 76–88.

[13] D. E. KNUTH (1965) – *Finite semifields and projective planes*, « J. Algebra », *2*, 182–217.

[14] G. LUNARDON (1979) – *Piani di traslazione derivabili*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », *61*, 271–284.