Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giovanni Matarazzo

Sull'andamento dell'energia libera canonica in un processo termoelastico

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **69** (1980), n.1-2, p. 54–60.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1980_8_69_1-2_54_0>

Fisica matematica. — *Sull'andamento dell'energia libera canonica in un processo termoelastico* (*). Nota (**) di GIOVANNI MATARAZZO (***), presentata dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — We determine the energy behavior for an elastic body immersed in an environment, that is thermally and mechanically passive at constant temperature, in a process starting from the rest at constant temperature.

1. INTRODUZIONE

In un articolo apparso nel 1973 [1] M. E. Gurtin stabilisce un criterio di minimo dell'energia potenziale per un corpo elastico soggetto a forze conservative e posto in un ambiente a temperatura costante e termicamente passivo; egli dimostra che l'energia potenziale del corpo risulta sempre minore o uguale del suo valore iniziale anche in presenza di effetti termodinamici.

In questo lavoro é mia intenzione pervenire ad una più particolare caratterizzazione del risultato di M. E. Gurtin [1], [3].

Infatti é possibile sulla base dei lavori [2], [4], [5] stabilire per l'energia libera canonica, relativa ad una sfera che si contrae, un andamento monotono non crescente in ogni processo termoelastico che inizia da uno stato a temperatura costante uguale a quella dell'ambiente.

Tale legge di comportamento può contenere o meno un termine di flusso a secondo delle caratteristiche del processo termoelastico e può essere utilizzatà nello studio di problemi di unicità, di dipendenza continua dai dati e di stabilità con le particolari condizioni al contorno della definizione di ambiente meccanicamente e termicamente passivo.

2. Sia B un corpo continuo, che identifichiamo con la regione B_0 dello spazio euclideo $\mathbf{R}^3$ occupata in una fissata configurazione di riferimento.

Pertanto i punti di B sono rappresentati dalla posizione $X \in \mathbf{R}^3$ che il generico punto assume nella configurazione di riferimento. Il moto di B é descritto mediante l'applicazione: $\boldsymbol{x} : B_0 \times (0 , T) \rightarrow \mathbf{R}^3$, che alla coppia (X , t) associa la posizione di X all'istante t.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito delle attività del G.N.F.M. del C.N.R.
(**) Pervenuta all'Accademia il 28 agosto 1980.
(***) Istituto di Meccanica Razionale della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Napoli.

Definiamo ora le seguenti grandezze misurate nella configurazione di riferimento e supposte sufficientemente regolari nell'insieme $Q = B_0 \times (0, T)$: $\rho(X) > 0$ rappresenta la densità di massa, $\mathbf{S}(X, t)$ il primo tensore di Piola–Kirchhoff, $\mathbf{F} = \nabla_X \boldsymbol{x}(X, t)$ il gradiente di deformazione, $\varepsilon(X, t)$ la densità di energia interna, $\boldsymbol{b}(X, t)$ le forze di massa, $\eta(X, t)$ la densità di entropia, $\theta(X, t) > 0$ la temperatura assoluta, mentre $\boldsymbol{g}(X, t) = \nabla_X \theta(X, t)$ é il gradiente di temperatura, $\psi(X, t) = \varepsilon(X, t) - \theta(X, t)\eta(X, t)$ la densità di energia libera di Helmholtz, $\boldsymbol{q}(X, t)$ il vettore flusso di calore.

Questi campi devono verificare le leggi di bilancio della quantità di moto e dell'energia nonché la diseguaglianza di Clausius–Duhem.

$$\rho\ddot{\boldsymbol{x}} = \nabla \cdot \mathbf{S} + \rho \boldsymbol{b} \tag{2.1}$$

$$\rho\left[\dot{\varepsilon} + \left(\frac{\dot{\boldsymbol{x}}^2}{2}\right)^{\boldsymbol{\cdot}}\right] = \rho\boldsymbol{b}\cdot\dot{\boldsymbol{x}} + \nabla\cdot(\mathbf{S}\cdot\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{q}) \tag{2.2}$$

$$\rho\dot{\eta} \geq -\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{q}}{\theta}\right). \tag{2.3}$$

Come é noto si dice processo termoelastico la sestupla ordinata di funzioni regolari e limitate $p(\boldsymbol{x}, \theta, \psi, \mathbf{S}, \eta, \boldsymbol{q})$ compatibili con le equazioni (2.1), (2.2), (2.3) e con le equazioni costitutive:

$$\psi = \hat{\psi}(\mathbf{F}, \theta) \quad , \quad \mathbf{S} = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}, \theta) \quad , \quad \eta = \hat{\eta}(\mathbf{F}, \theta) \quad , \quad \boldsymbol{q} = \hat{\boldsymbol{q}}(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{g});$$

che supporremo, nel dominio di definizione, continue assieme alle derivate prime. Da considerazioni termodinamiche abbiamo [3], [4]:

(i) $\quad \hat{\mathbf{S}} = \rho \dfrac{\partial\hat{\psi}}{\partial\mathbf{F}} \quad , \quad \hat{\eta} = -\dfrac{\partial\hat{\psi}}{\partial\theta}$

(ii) $\quad \theta \dfrac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\theta^2} \leq 0$

quindi il fattore (calore specifico) $c(\mathbf{F}, \theta) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\theta^2}$ risulta non negativo; inoltre supponiamo:

$$\hat{\psi}(\mathbf{F}, \theta_0) \geq 0 \quad ; \quad \hat{\psi}(\mathbf{F}, \theta_0) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{F} = 0 \quad ; \quad \hat{\mathbf{S}}(0, \theta_0) = 0$$

dove θ_0 é la temperatura dell'ambiente esterno del corpo.

Consideriamo il corpo B immerso in un ambiente a temperatura costante e localmente termicamente passivo, cioé supponiamo che sulla frontiera di B risulti:

$$(\theta(X, t) - \theta_0)\, \boldsymbol{q}(X, t)\cdot\boldsymbol{n}(X) \geq 0 \quad , \quad (X, t) \in \partial B_0 \times (0, T), \tag{2.3'}$$

dove $\boldsymbol{n}$ rappresenta il versore della normale esterna alla frontiera ∂B_0, quindi se un punto di ∂B_0 ha temperatura maggiore di θ_0, il calore non può fluire verso l'interno di B in quel punto e viceversa.

L'ambiente é localmente meccanicamente passivo [5] se esiste una funzione $V(\boldsymbol{x})$ a valori in R^+, chiamata densità di energia potenziale di tutte le forze esterne applicate a B, tale che:

$$\int_{B_0} \alpha \boldsymbol{b}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}\,dm + \int_{\partial B_0} \alpha \mathbf{S}\cdot\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}\,d\sigma \leq -\int_{B_0} \alpha \dot{V}(\boldsymbol{x})\,dm \tag{2.4}$$

$\forall\alpha \geq 0$, $\alpha \in C_0^\infty(R^3\times(0, T))$, se vale l'eguaglianza l'ambiente é detto conservativo.

Ad esempio la (2.4) é soddisfatta considerando le forze esterne derivanti dal potenziale $V(\boldsymbol{x})$, cioé $\boldsymbol{b} = -\nabla_{\boldsymbol{x}} V(\boldsymbol{x})$ e imponendo le seguenti condizioni al contorno:

$$\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{n} = -k\dot{\boldsymbol{x}}\,,\ k > 0 \quad , \quad (X, t) \in \partial_1 B_0 \times (0, T) \tag{2.5}$$

dove $\partial_1 B_0 \subseteq \partial B_0$ mentre nella parte $\partial_2 B_0 = \partial B_0 - \partial_1 B_0$

$$\boldsymbol{x}(X, t) = \boldsymbol{a}(X) \quad , \quad (X, t) \in \partial_2 B_0 \times (0, T)\,; \tag{2.5'}$$

Se in particolare le forze esterne agenti su B derivano dal potenziale $V(\boldsymbol{x})$ ed é imposta la condizione al contorno:

$$\boldsymbol{x}(X, t) = \boldsymbol{a}(X) \quad , \quad (X, t) \in \partial B_0 \times (0, T) \tag{2.5''}$$

la (2.4) é identicamente soddisfatta col segno di eguaglianza, risultando in tal caso l'ambiente meccanicamente conservativo.

3. La disuguaglianza sulla energia che stabiliremo in questo numero si avvale della limitatezza del rapporto:

$$\frac{\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}, \theta)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}}{\hat{\psi}(\mathbf{F}, \theta_0) + \frac{1}{2}\dot{x}^2 + c(\theta - \theta_0)^2 + V}$$

su ogni processo termoelastico. Tale limitatezza, per la regolarità delle equazioni costitutive, é conseguenza dell'ipotesi che ogni processo p é composto di campi limitati e il limite per $\mathbf{F} \to 0$, $\dot{\boldsymbol{x}} \to 0$, $\theta \to \theta_0$ esiste finito anche quando $V \equiv 0$, se supponiamo $\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{F}^2}(0, \theta_0) \neq 0$. Infatti utilizzando prima la formula di Taylor per $\hat{S}(\mathbf{F}, \theta)$ in un intorno I_{θ_0} di θ_0 abbiamo:

$$\frac{|\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}, \theta)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}|}{\hat{\psi}(\mathbf{F}, \theta_0) + \frac{1}{2}x^2 + c(\theta - \theta_0)^2 + V} \leq \frac{|\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}, \theta)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}|}{\hat{\psi}(\mathbf{F}, \theta_0) + \frac{1}{2}\dot{x}^2 + c(\theta - \theta_0)^2} \leq$$

$$\leq \frac{|\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}, \theta_0)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}| + |(\theta - \theta_0)\mathbf{M}(\mathbf{F})\cdot\dot{\boldsymbol{x}}|}{\hat{\psi}(\mathbf{F}, \theta_0) + \frac{1}{2}\dot{x}^2 + c(\theta - \theta_0)^2}$$

dove $\mathbf{M}(\mathbf{F})$ é il massimo di $|\partial\hat{\mathbf{S}}/\partial\theta|$ su I_{θ_0}. Quindi ricordando che $\mathbf{S} = \rho\partial\hat{\psi}/\partial\mathbf{F}$ e utilizzando ancora la formula di Taylor per $\hat{\mathbf{S}}$, $\hat{\psi}$ in un intorno di $\mathbf{F} = 0$ si ha che il nostro rapporto é limitato perché maggiorato da una funzione del tipo:

$$\frac{\alpha\,|\,\mathbf{F}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}|+\beta\,|(\theta-\theta_0)\,\dot{\boldsymbol{x}}\,|}{a\mathbf{F}^2+\frac{1}{2}\dot{x}+b\,(\theta-\theta_0)^2}$$

con α , β , a , b costanti positive.

TEOREMA I. *L'energia di un corpo in ogni processo termoelastico p compatibile con l'ambiente meccanicamente e termicamente passivo, che inizia da uno stato a temperatura costante verifica la diseguaglianza*:

$$\int_{S_t(X_0)}[\hat{\psi}(\mathbf{F}(t)\,,\,\theta_0)+\tfrac{1}{2}\dot{x}^2(t)+\mathrm{V}(\boldsymbol{x})(t)]\,\mathrm{d}m+\int_0^t\int_{\partial S_\tau(X_0)}\frac{\theta-\theta_0}{\theta}\,\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau\leq$$

$$\leq\int_{S_0(X_0)}[\hat{\psi}(\mathbf{F}(0)\,,\,\theta_0)+\tfrac{1}{2}\dot{x}^2(0)+\mathrm{V}(\boldsymbol{x}(0))]\,\mathrm{d}m\qquad\forall t\in(0\,,\mathrm{T})$$

dove

$$S_t(X_0)=\{X\in B_0:|\,X-X_0\,|\leq r+\mathrm{N}(\mathrm{T}-t)\}\,,\qquad r>0\,,$$

e

$$\mathrm{N}=\operatorname*{Max}_p\frac{|\,\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}\,,\,\theta)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}\,|}{\hat{\psi}(\mathbf{F}\,,\,\theta_0)+\frac{1}{2}\dot{x}^2+c\,(\theta-\theta_0)^2+\mathrm{V}(\boldsymbol{x})}\,.$$

Dimostrazione. Consideriamo un processo p ammissibile che verifica le condizioni di locale passività (2.3') e (2.4); su tale processo definiamo:

$$\varphi(t)=\int_{B_0}\alpha\,(\hat{\varepsilon}-\theta_0\,\hat{\eta}+\tfrac{1}{2}\dot{x}^2+\mathrm{V}(\boldsymbol{x}))\,\mathrm{d}m\tag{3.1}$$

dove $\hat{\varepsilon}-\theta_0\,\hat{\eta}+\frac{1}{2}\dot{x}^2+\mathrm{V}(\boldsymbol{x})$ é chiamata densità di energia libera canonica relativa ad un ambiente a temperatura costante θ_0 e α é un'arbitraria funzione non negativa di $C_0^\infty(\mathrm{R}\times(0\,,\mathrm{T}))$; derivando (3.1) rispetto a t e tenendo conto di (2.2), (2.3) si ha:

$$\dot{\varphi}(t)\leq\int_{B_0}\dot{\alpha}\,(\hat{\varepsilon}-\theta_0\,\hat{\eta}+\tfrac{1}{2}\dot{x}^2+\mathrm{V})\,\mathrm{d}m+\int_{B_0}\alpha\left(\boldsymbol{b}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}+\frac{1}{\rho}\nabla\cdot(\hat{\mathbf{S}}\cdot\dot{\boldsymbol{x}})+\dot{\mathrm{V}}\right)\mathrm{d}m+$$

$$+\int_{B_0}\alpha\left(\theta_0\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\boldsymbol{q}}}{\theta}\right)-\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{q}}\right)\mathrm{d}B_0$$

poiché vale (2.3'), (2.4) ed é

$$\alpha\left[\theta_0\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\boldsymbol{q}}}{\theta}\right)-\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{q}}\right]=\nabla\alpha\cdot\hat{\boldsymbol{q}}\,\frac{\theta-\theta_0}{\theta}+\nabla\cdot\left(\alpha\hat{\boldsymbol{q}}\,\frac{\theta_0-\theta}{\theta}\right),$$

$$\alpha\nabla\cdot(\hat{\mathbf{S}}\cdot\dot{\boldsymbol{x}})=\nabla\cdot(\alpha\hat{\mathbf{S}}\cdot\dot{\boldsymbol{x}})-\nabla\alpha\cdot(\hat{\mathbf{S}}\cdot\dot{\boldsymbol{x}})\,,$$

risulta:

$$\dot{\varphi}(t) \leq \int_{B_0} \alpha (\hat{\varepsilon} - \theta_0 \hat{\eta} + \tfrac{1}{2} \dot{x}^2 + V)\, dm - \tag{3.2}$$

$$- \int_{B_0} \nabla\alpha \cdot (\hat{\mathbf{S}} \cdot \dot{\boldsymbol{x}})\, dB_0 + \int_{B_0} \nabla\alpha \cdot \hat{\boldsymbol{q}} \frac{\theta - \theta_0}{\theta}\, dB_0$$

ora per la formula di Taylor [1]:

$$\hat{\psi}(\mathbf{F}, \theta_0) = \hat{\psi}(\mathbf{F}, \theta) + \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\theta}(\mathbf{F}, \theta)(\theta_0 - \theta) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\theta^2}(\mathbf{F}, \theta^*)(\theta_0 - \theta)^2$$

dove θ^* é un opportuno valore di θ compreso tra θ_0 e θ; pertanto per la (ii):

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\mathbf{F}, \theta_0) + c(\mathbf{F}, \theta^*)(\theta - \theta_0)^2 &= \hat{\psi}(\mathbf{F}, \theta) + \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\theta}(\mathbf{F}, \theta)(\theta_0 - \theta) \\ &= \hat{\varepsilon}(\mathbf{F}, \theta) - \theta\hat{\eta}(\mathbf{F}, \theta) - \theta_0 \hat{\eta}(\mathbf{F}, \theta) + \\ &+ \theta\hat{\eta}(\mathbf{F}, \theta) = \\ &= \hat{\varepsilon}(\mathbf{F}, \theta) - \theta_0 \hat{\eta}(\mathbf{F}, \theta) ; \end{aligned}$$

di conseguenza, integrando in $(0, T)$ e ricordando che inizialmente $\theta = \theta_0$, mentre $c(\theta - \theta_0)^2 \geq 0$, possiamo scrivere la (3.2) nel modo seguente:

$$\int_{B_0} \alpha(t) [\hat{\psi}(\mathbf{F}(X, t), \theta_0) + \tfrac{1}{2}\dot{x}^2(t) + V(\boldsymbol{x}(t))]\, dm + \tag{3.3}$$

$$+ \int_0^t \int_{B_0} \nabla\alpha \cdot \hat{\boldsymbol{q}} \frac{\theta_0 - \theta}{\theta}\, dB_0\, d\tau \leq \int_{B_0} \alpha(0) [\hat{\psi}(\mathbf{F}(X, 0), \theta_0) + \tfrac{1}{2}\dot{x}^2(0) + V(\boldsymbol{x}(0))]\, dm +$$

$$+ \int_0^t \int_{B_0} (\dot{\alpha}(X, t) + N |\nabla\alpha|) [\hat{\psi}(\mathbf{F}, \theta_0) + \tfrac{1}{2}\dot{x}^2 + c(\theta - \theta_0)^2 + V(\boldsymbol{x})]\, dm\, d\tau ,$$

con $\theta(X, 0) = \theta_0$ e N il massimo del rapporto

$$\frac{|\dot{\mathbf{S}}(\mathbf{F}, \theta) \cdot \dot{\boldsymbol{x}}|}{\psi(\mathbf{F}, \theta_0) + \tfrac{1}{2}\dot{x}^2 + c(\theta - \theta_0)^2 + V}$$

sul processo p.

Su ogni processo p conviene ora considerare opportune funzioni λ_h, $h > 0$, cosi definite [2]:

$$\lambda_h = \int_{-\infty}^{\sigma} \delta_h(\sigma)\, d\sigma , \quad \delta_h(\sigma) \in C^\infty(-\infty, \infty) , \quad \int_{-h}^{h} \delta_h(\sigma)\, d\sigma = 1 ,$$

$$\delta_h(\sigma) \geq 0 , \quad \delta_h(\sigma) \leq \frac{\text{cost}}{h} , \quad \delta_h(\sigma) = 0 \qquad \text{per} \quad |\sigma| \geq h ;$$

si definisce quindi per ogni $X_0 \in B_0$ ed $h > 0$:

$$\chi_h(X, t) = 1 - \lambda_h(|X - X_0| - N(T - t) - r + h) . r > 0 ;$$

riesce allora:

$$\nabla_X \chi_h = -\delta_h(|X - X_0| - N(T - t) - r + h) \frac{X - X_0}{|X - X_0|}$$

$$\dot{\chi}_h + N |\nabla_X \chi_h| = -N\delta_h + N\delta_h = 0 ,$$

$$\dot{\chi}_h(|X - X_0| - N(T - t) - r + h) \leq 0 ;$$

se si pone nella (3.3) $\chi_h(X, t)$ al posto di $\alpha(X, t)$ e si passa al limite per $h \to 0$, si ottiene la disuguaglianza del Teorema 1. □

Limitiamoci infine a considerare un processo p per cui sia limitato il rapporto:

$$\frac{|\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}, \theta) \cdot \dot{\boldsymbol{x}}| + \left|\frac{\theta - \theta_0}{\theta} \hat{\boldsymbol{q}}\right|}{\hat{\psi}(\mathbf{F}, \theta_0) + \frac{1}{2}\dot{x}^2 + c(\theta - \theta_0)^2 + V(\boldsymbol{x}(t))} \tag{3.4}$$

se indichiamo con M il massimo di (3.4) su p la diseguaglianza (3.3) può essere scritta:

$$\int_{S_t} \alpha(t) [\hat{\psi}(\mathbf{F}(t), \theta_0) + \tfrac{1}{2}\dot{x}^2(t) + V(\boldsymbol{x}(t))] \, dm \leq$$

$$\leq \int_{S_0} \alpha(0) [\hat{\psi}(\mathbf{F}(0), \theta_0) + \tfrac{1}{2}\dot{x}^2(0) + V(x(0))] \, dm +$$

$$+ \int_0^t \int_{S_\tau} (\dot{\alpha} + M |\nabla\alpha|)(\hat{\psi}(\mathbf{F}, \theta_0) + \tfrac{1}{2}\dot{x}^2 + c(\theta - \theta_0)^2 + V(\boldsymbol{x})) \, dm \, d\tau$$

pertanto con scelta analoga a quella fatta nel Teorema 1 per $\alpha(X, t)$ si ha:

TEOREMA 2. *Su ogni processo termoelastico p compatibile con un ambiente termicamente e meccanicamente passivo secondo le definizioni* (2.3′) *e* (2.4), *che parte da uno stato a temperatura costante, si ha*:

$$\int_{S_t(X_0)} (\hat{\psi}(\mathbf{F}(t), \theta_0) + \tfrac{1}{2}\dot{x}^2(t) + V(\boldsymbol{x}(t))) \, dm \leq$$

$$\leq \int_{S_0(X_0)} (\hat{\psi}(\mathbf{F}(0), \theta_0) + \tfrac{1}{2}\dot{x}^2(0) + V(\boldsymbol{x}(0)) \, dm$$

nell'ipotesi che M *sia il massimo del rapporto* (3.4) *su p.*

BIBLIOGRAFIA

[1] M. E. GURTIN (1973) - *Thermodynamics and the potential energy of an elastic body*, « J. Elasticity », *3*, 23-26.

[2] M. FABRIZIO (1973) - *Soluzioni generalizzate e diseguaglianze variazionali per alcuni sistemi differenziali non lineari della Fisica Matematica*, «Ann. di Matem. pura e applic.», (IV) XCV, 63-76.

[3] M. E. GURTIN (1974) - *Thermodynamics and the energy criterion for stability*, «Arch. Rational Mech. Anal.», *52*, 93-103.

[4] B. D. COLEMAN (1973) - *The energy criterion for stability in continuum thermodynamics*, « Rend. Seminario Mat. Fis. », Milano *43*, 85-89.

[5] C. H. WILCOX (1964) - *The domain of dependence inequality for symmetric hyperbolic systems*, « Bull. Amer. Math. Soc. », *70*, 149-154.