Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Emanuela Ughi

Un'osservazione su un criterio di fattorialità

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **69** (1980), n.1-2, p. 31–36.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1980_8_69_1-2_31_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1980.

Geometria algebrica. — *Un' osservazione su un criterio di fattorialità* (*). Nota di EMANUELA UGHI, presentata (**) dal Socio E. MARTINELLI.

SUMMARY. — A factoriality condition for the homogeneous coordinate ring of a projective variety is examined under general assumptions for X.

Sia X una varietà algebrica affine di dimensione $n \geq 2$, definita su un qualunque campo algebricamente chiuso K ed immersa in uno spazio affine A^r_K. Dette $u_0, u_1, \cdots, u_r$ $(r+1)$ indeterminate algebricamente libere su K, e $\mathfrak{p}$ l'ideale primo di X in $K[X_1, \cdots, X_r]$, è ben noto (A. Seidenberg [12]) che l'elemento $u_0 + u_1 x_1 + \cdots + u_r x_r$ genera un ideale primo nell'anello

$$K(u)[x_1, \cdots, x_r] = K(u)[X_1, \cdots, X_r]/\mathfrak{p}\, K(u)[X_1, \cdots, X_r]$$

(avendo indicato con u il complesso delle $u_0, u_1, \cdots, u_r$ e con $x_1, \cdots, x_r$ i residui delle variabili $X_1, \cdots, X_r$). Da qui si trae che per una specializzazione «generica» $u_i \mapsto a_i \in K$ il corrispondente elemento $a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_r x_r$ genera un ideale primo nell'anello $K[x_1, \cdots, x_r] = K[X_1, \cdots, X_r]/\mathfrak{p}$, l'anello delle coordinate di X.

Quando si passa al caso di una qualsiasi varietà proiettiva, ferma restando l'ipotesi $n \geq 2$, della quale $\mathfrak{p}_0$ designi l'ideale primo omogeneo in $K[X_0, X_1, \cdots, X_r]$, la forma lineare $u_0 x_0 + u_1 x_1 + \cdots + u_r x_r$ genera in $K(u)[x_0, x_1, \cdots, x_r]$ un ideale che, se non è primo, coincide con l'intersezione di un ideale primo con un ideale irrilevante (vale a dire, un ideale primario omogeneo appartenente all'ideale massimale $(x_0, x_1, \cdots, x_r)$). Nei due casi, di conseguenza, la forma lineare $a_0 x_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_r x_r$ per una specializzazione «generica» $u_i \mapsto a_i \in K$ genera o un ideale primo o un ideale che è intersezione di un ideale primo con un ideale irrilevante (cfr. [13], p. 613).

Diremo soddisfacenti alla *condizione* (*) le varietà X per le quali si verifichi, nella fissata immersione $X \hookrightarrow P^r_K$, la prima delle circostanze appena elencate. Detta condizione non esprime altro che la possibilità di enunciare il secondo teorema di Bertini relativo al sistema lineare delle sezioni iperpiane di X *in una forma forte*, relativa cioè agli ideali principali di $P = K[x_0, x_1, \cdots, x_r] = K[X_0, X_1, \cdots, X_r]/\mathfrak{p}_0$ (l'anello delle coordinate

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del G.N.S.A.G.A. mentre l'Autrice godeva di una borsa di studio del C.N.R.

(**) Nella seduta del 27 novembre 1979.

omogenee di X) generati dalle forme lineari di P. Le varietà che soddisfano a tale proprietà (che si può vedere non essere altro che una formulazione «geometrica» della disuguaglianza prof $(\mathcal{O}) \geq 2$, ovvero della corrispondente $\dim h(X) < r$) (1), mostrano qualche interesse di per sè, e su di esse l'autrice spera di poter tornare in un prossimo lavoro. Tra di esse vi sono evidentemente le varietà X proiettivamente normali nella fissata immersione, le varietà intersezione completa e, più generalmente, le varietà di Cohen-Macaulay (nel senso proiettivo) (2). Nella presente nota ci si limiterà a presentare per il tramite della condizione (*) alcune semplici osservazioni riguardanti la possibilità di estensione del seguente criterio di fattorialità (cfr. ad esempio Hartshorne [4], p. 147 o [5], p. 181) al caso di varietà X non più supposte a priori proiettivamente normali:

PROPOSIZIONE I. – *Sia* X *una varietà algebrica proiettiva immersa in uno spazio proiettivo* P^r. *Se* X *è proiettivamente normale nella fissata immersione e* $Cl(X)$ *è isomorfo a* Z *e generato dalla classe di una sezione iperpiana, allora l'anello* P *delle coordinate omogenee di* X *è un dominio a fattorizzazione unica (ed evidentemente viceversa).*

E ricordiamo che una varietà algebrica X (affine o proiettiva) si dice normale se l'anello locale di ogni suo punto è integralmente chiuso (nel caso affine questa condizione è equivalente alla chiusura integrale dell'anello delle coordinate della varietà), e che una varietà proiettiva X dicesi invece proiettivamente normale, relativamente ad una data immersione di X in uno spazio proiettivo P^r, se risulta integralmente chiuso il suo anello delle coordinate omogenee (3), vale a dire, l'anello delle coordinate del cono affine C(X) associato ad X nello spazio affine A^{r+1}.

La normalità proiettiva (detta anche a volte *normalità aritmetica*) può dipendere dalla data immersione di X, ed implica che la varietà è normale.

La normalità, che è evidentemente una proprietà intrinseca, non implica invece necessariamente la normalità proiettiva per una fissata immersione di X (ma si può provare che se X è normale esiste sempre una immersione rispetto alla quale risulti proiettivamente normale) (4).

(1) Ove $\mathcal{O}$ indica l'anello locale del vertice del cono affine C(X) associato ad X, prof $(\mathcal{O})$ la profondità di $\mathcal{O}$, detta anche codimensione omologica di $\mathcal{O}$ (cfr. [14], IV-12 ovvero [20], vol. 2, p. 396) e $\dim h(X)$ la dimensione omologica di P come $K[X_0, X_1, \cdots, X_r]$-modulo (cfr. [13] p. 619 ovvero [20], vol. 2, p. 242).

(2) La condizione (*) dipende dalla fissata immersione di X, come è esplicitamente osservato nella successiva nota (5).

(3) Come ben noto la condizione indicata è equivalente al fatto che, per ogni intero $m > 0$, il sistema lineare segato su X dalle ipersuperficie di ordine m in P^r è completo. Su questo argomento cfr. ad esempio [16]; [4], p. 126 e p. 159; [6], cap. 5; ma anche, prima degli altri, [7].

(4) Per tutto quanto concerne questi argomenti cfr. [16], o anche [6], cap. 5 (con attenzione al fatto che nell'articolo originale [16] Zariski chiama normali le varietà che qui chiamiamo, come d'uso, proiettivamente normali).

Le varietà X normali risultano non singolari in codimensione uno; diremo R_1, seguendo la terminologia di [3], le varietà che godono di questa ultima proprietà, per le quali si costruisce il *gruppo di classe* $Cl(X)$ come il gruppo di tutti i divisori di Weil di X modulo quelli principali.

Invero, supporre X proiettivamente normale anziché soltanto normale rende la dimostrazione della proposizione I molto semplice. Infatti, il gruppo di classe di C (X) è correlato a quello di X dalla seguente successione esatta (cfr. Hartshorne, *loc. cit.*, p. 147):

$$0 \to Z \xrightarrow{\alpha} Cl(X) \xrightarrow{\beta} Cl(C(X)) \to 0$$

(α manda 1 nella classe di una sezione iperpiana, β manda la classe di un divisore di X nella classe del divisore di C (X) ottenuto come proiezione di quello).

Di qui si trae che se $Cl(X)$ è isomorfo a Z e generato dalla classe di una sezione iperpiana (e soltanto in questo caso), allora $Cl(C(X))$ è uguale a zero. Se quindi $P = \Gamma(C(X), \mathcal{O}_{C(X)})$, l'anello delle coordinate di C (X), è integralmente chiuso (ovvero P è, come si dice, un *dominio di Krull*), si può introdurre (cfr. [2], p. 29; [9], p. 4) il *gruppo di classe* di P, $Cl(P)$, il quale risulta nelle attuali ipotesi isomorfo a $Cl(C(X))$, ed è ben noto che l'annullarsi del gruppo $Cl(P)$ è condizione necessaria e sufficiente affinché P sia un dominio fattoriale (cfr. [2], p. 31, ma anche Hartshorne, *loc. cit.*, p. 131).

La proposizione I *senza ulteriori assunzioni non può essere estesa neppure al caso di varietà non singolari*, come mostra il seguente esempio (ove supponiamo per semplicità che sia $K = C$, il campo dei numeri complessi).

Una generica V^3 intersezione completa in P^8 è una varietà non singolare tale che:

(*i*) il suo spazio d'appartenenza (il minimo sottospazio di P^8 che la contiene) è l'intero P^8;

(*ii*) il suo anello delle coordinate proiettive omogenee è un dominio a fattorizzazione unica, a norma del teorema di Lefschetz (cfr. ad esempio [1], p. 97; [10], p. 93), e pertanto risulta $Cl(V) = Z$ e generato dalla classe di una sezione iperpiana.

Poiché la *varietà della corde* di V ha dimensione (al più) 7, la generica proiezione di V su un P^7 è una X^3 non singolare isomorfa a V e dello stesso ordine, e pertanto non normale in senso classico, vale a dire, tale che il sistema lineare delle sue sezioni iperpiane non è completo. In particolare X^3 nella fissata immersione in P^7 non è neanche proiettivamente normale, e fornisce il controesempio desiderato, in quanto evidentemente $Cl(X) = Z$ ed è generato dalla classe di una sezione iperpiana.

D'altro canto, una varietà X normale soddisfacente alla condizione (*) è anche proiettivamente normale, in virtù del cosiddetto criterio di normalità di Serre (cfr. [14], III–13; [3], p. 107, ma anche, prima degli altri, [12], p. 363) (5). È quindi possibile di esprimere la proposizione I per varietà normali soddisfacenti però alla condizione $(*)$. Di questo fatto vogliamo dare una dimostrazione alternativa, che ci sembra mettere in luce maggiormente l'aspetto «geometrico» della questione, la quale dimostrazione non poggi sul detto criterio di Serre bensì sul seguente semplice (ed utile) lemma di Andreotti–Salmon (cfr. [1], p. 99) una cui dimostrazione riportiamo qui per comodità del lettore (6).

LEMMA 3. – *Sia* $\mathfrak{p}_0$ *un ideale primo omogeneo dell'anello* $K[X_0, X_1, \cdots, X_r]$, $\mathfrak{p}_0 \not\ni X_0$, *e* $\mathfrak{p}$ *il corrispondente ideale primo di* $K[Y_1, \cdots, Y_r]$ *nella disomogeneizzazione* $d: K[X_0, X_1, \cdots, X_r] \to K[Y_1, \cdots, Y_r]$.

Se $P = K[X_0, X_1, \cdots, X_r]/\mathfrak{p}_0$ *è un dominio a fattorizzazione unica tale è anche* $A = K[Y_1, \cdots, Y_r]/\mathfrak{p}$, *e vale il viceversa se si suppone in più che* $x_0 P$ *sia un ideale primo di* P (7) *(qui al solito* $x_0, x_1, \cdots, x_r$ *designano i residui di* $X_0, X_1, \cdots, X_r$ *modulo* $\mathfrak{p}_0$).

Dimostrazione. – Supponiamo che P sia un dominio a fattorizzazione unica ed indichiamo con X la varietà proiettiva in P^r associata a $\mathfrak{p}_0$, e con X_a quella affine in $A^r = P^r - [X_0 = 0]$ associata a $\mathfrak{p}$.

X ed X_a sono varietà normali, ed i relativi gruppi di classe sono palesemente correlati dalla seguente successione esatta:

$$0 \to N \hookrightarrow Cl(X) \xrightarrow{\beta} Cl(X_a) \to 0$$

(β è indotta dalla inclusione $X_a \hookrightarrow X$, ed N è il sottogruppo di $Cl(X)$ generato dalle componenti della sezione iperpiana $[X_0 = 0] \cdot X$).

Poiché $Cl(X)$ nelle attuali ipotesi è isomorfo a Z e generato dalla classe di una sezione iperpiana, e questa è un elemento di N, si deduce che $Cl(X_a) = 0$, e quindi che $A = \Gamma(X_a, \mathcal{O}_X) = \Gamma(X_a, \mathcal{O}_{X_a})$ è un dominio a fattorizzazione unica, grazie all'argomentazione riportata nella dimostrazione della Proposizione I.

Supponiamo viceversa che sia A un dominio a fattorizzazione unica e che $x_0 P$ sia primo, e cominciamo con il provare che una forma di P irriducibile e non invertibile è un elemento primo (ovvero, equivalentemente, che ogni ideale primo minimale *omogeneo* di P è principale).

(5) Di conseguenza, ogni varietà non singolare immersa che non sia proiettivamente normale non soddisfa alla condizione $(*)$ (come nell'esempio dianzi fornito), ed è allora chiaro che detta condizione dipende dalla immersione della varietà al pari della proiettiva normalità.

(6) Ma anche perché nell'articolo citato ci si limita a provare la fattorialità di P soltanto relativamente agli elementi omogenei di P, mentre qui si asserisce la fattorialità di P rispetto a tutti i suoi elementi.

(7) Questa ulteriore ipotesi, che è evidentemente necessaria, è anche essenziale per la validità dell'asserto, come gli Autori mostrano con un esempio.

Invero, poiché x_0 P è primo in P, l'omogeneizzazione $h : K[Y_1, \cdots, Y_r] \to$ $\to K[X_0, X_1, \cdots, X_r]$, che è la sezione di d definita di $h(f(Y_1, \cdots, Y_r)) =$ $= X_0^{\deg f} f(X_1/X_0, \cdots, X_r/X_0)$, induce una corrispondente omogeneizzazione $\bar{h} : A \to P$, che è una sezione di $\bar{d}$ che gode delle seguenti proprietà: per ogni forma F in P, $\bar{h}\bar{d}(F) = F/x_0^s$, ove $s \geq 0$ è la massima potenza di x_0 che divide F; $\bar{h}(fg) = \bar{h}(f)\bar{h}(g)$.

Se F è dunque una forma di P irriducibile e non invertibile, per provare che FP è primo basta provare (cfr. [20], vol. 2, p. 152) che, se $F \mid GH$, dove G, H sono forme di P, e $F \nmid G$, allora $F \mid H$.

Ed infatti, $\bar{d}(F)A$ è primo in A; poiché poi $\bar{d}(F) \mid \bar{d}(G)\bar{d}(H)$ e $\bar{d}(F) \nmid \bar{d}(G)$, allora $\bar{d}(F) \mid \bar{d}(H)$, il che implica $\bar{h}\bar{d}(F) = F \mid \bar{h}\bar{d}(H) \mid H$, come volevasi.

Resta ormai da provare soltanto che ogni ideale primo minimale di P è principale (ciò non è di immediata dimostrazione perché P non è supposto *a priori* essere un dominio di Krull).

Si può usare però dell'argomento di [2], p. 42: detto S l'insieme degli elementi omogenei non nulli di P, l'anello $S^{-1}P$ coincide con l'anello dei polinomi di Laurent $K(X)[x_0, x_0^{-1}]$, dove $K(X)$ è il campo delle funzioni razionali di X, vale a dire, il campo degli elementi del campo dei quozienti di P esprimibili come rapporto di forme dello stesso grado. Pertanto $S^{-1}P$ è un dominio fattoriale, e la conclusione discende allora dal seguente teorema di Nagata (cfr. [8], p. 144): se S è un sottoinsieme moltiplicativamente chiuso di un dominio di integrità noetheriano P tale che ogni elemento di S è prodotto di un numero finito di elementi primi, e se $S^{-1}P$ è un dominio fattoriale, allora anche P è un dominio fattoriale.

Ciò premesso, passiamo all'annunciata dimostrazione della seguente

PROPOSIZIONE II. - *Se* X *è una varietà algebrica proiettiva e normale immersa in uno spazio proiettivo* P^r *tale che* $Cl(X)$ *è isomorfo a* Z *e generato dalla classe di una sezione iperpiana, allora l'anello* P *delle coordinate omogenee di* X *rispetto a tale immersione è un dominio fattoriale se, ed evidentemente soltanto se,* X *soddisfa alla condizione* (*).

Nel caso $\dim(X) \geq 2$ [(8)], osserviamo che per ipotesi ogni sezione iperpiana di X è un divisore primo; sia λ una forma di grado uno in P tale che l'ideale λP sia un ideale primo di P.

Supporremo per semplicità che sia $\lambda = x_0$, ed indicheremo $D = \mathrm{div}(x_0)$. D è allora una sottovarietà irriducibile di X di codimensione uno, e la varietà affine X_a ottenuta come complementare di D in X risulta per ipotesi

(8) Nel caso $\dim(X) = 1$, l'asserto è evidente senza ulteriori assunzioni perché allora dal teorema di Bézout consegue che X è di necessità una retta in P^r.

ancora normale. Possiamo allora utilizzare la successione esatta (cfr. Hartshorne, *loc. cit.*, p. 133)

$$0 \to Z \xrightarrow{\alpha} Cl(X) \xrightarrow{\beta} Cl(X_a) \to 0$$

(α manda 1 in $cl(D)$, β è indotta dalla inclusione $X_a \hookrightarrow X$) per dedurre che $Cl(X_a)$ è uguale a zero, e quindi che l'anello $A = \Gamma(X_a, \mathcal{O}_X) = \Gamma(X_a, \mathcal{O}_{X_a})$ è un dominio a fattorizzazione unica, grazie all'argomentazione già riportata a proposito della dimostrazione della Proposizione I, e tenuto conto del fatto che A risulta adesso integralmente chiuso.

Per ottenere la conclusione, basta allora applicare il lemma sopracitato, c.v.d.

Bibliografia

[1] A. Andreotti e P. Salmon (1957) - *Anelli con unica decomponibilità in fattori primi ed un problema di intersezioni complete.* «Monatsh. Math.», *61*, 97–142.

[2] R.M. Fossum (1973) - *The divisor class group of a Krull domain*, Berlin, Springer-Verlag.

[3] A. Grothendieck (1965) - *Elements de géométrie algébrique*, IV, I.H.E.S., 24.

[4] R. Hartshorne (1977) - *Algebraic geometry*, New York, Springer-Verlag.

[5] R. Hartshorne (1970) - *Ample subvarieties of algebraic varieties*, «Lecture Notes in Mathematics», *156*, Berlin, Springer-Verlag.

[6] S. Lang (1964) - *Introduction to algebraic geometry*, New York, J. Wiley and Sons.

[7] H.T. Muhly (1941) - *A remark on normal varieties.* «Annals of Mathematics», *42*, 921–925.

[8] M. Nagata (1957) - *A remark on the unique factorization theorem*, «J. Math. Soc. Japan», *9*, 143–145.

[9] P. Samuel (1964) - *Lectures on unique factorization domains*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay.

[10] P. Samuel (1964) - *Anneaux factoriels*, «Bol. Soc. Mat.», São Paulo.

[11] B. Segre (1971) - *Prodromi di geometria algebrica*, Roma, Cremonese.

[12] A. Seidenberg (1950) - *The hyperplane sections of normal varieties*, «Trans. Am. Math. Soc.», *69*, 357–386.

[13] A. Seidenberg (1972) - *The hyperplane sections of arithmetically normal varieties*, «Amer. J. Math.», *94*, 609–630.

[14] J.P. Serre (1965) - *Algèbre locale. Multiplicités*, «Lecture Notes in Mathematics», 11, Berlin, Springer-Verlag.

[15] A. Weil (1962) - *Foundations of algebraic geometry*, «American Mathematical Society Colloquium Publications», *29*, 2nd ed., Providence, American Mathematical Society.

[16] O. Zariski (1939) - *Some results in the arithmetic theory of algebraic varieties*, «Amer. J. Math.», *61*, 249–294.

[17] O. Zariski (1941) - *Pencils on an algebraic variety and a new proof of a theorem of Bertini*, «Trans. Am. Math. Soc.», *50*, 48–70.

[18] O. Zariski (1958) - *Introduction to the problem of minimal models in the theory of algebraic surfaces*, «The Mathematical Society of Japan».

[19] O. Zariski (1969) - *An introduction to the theory of algebraic surfaces*, «Lecture Notes in Mathematics», 83, Berlin, Springer-Verlag.

[20] O. Zariski e P. Samuel (1960) - *Commutative Algebra*, vol. 1, 2, New York, Van Nostrand.