Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Nicola Bellomo, Riccardo Riganti, Maria Teresa Vacca

Analisi stocastica del moto di una lamina piana in flusso molecolare

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **68** (1980), n.6, p. 514–525.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1980_8_68_6_514_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Fisica matematica. — *Analisi stocastica del moto di una lamina piana in flusso molecolare.* Nota II (*) di NICOLA BELLOMO, RICCARDO RIGANTI e MARIA TERESA VACCA (**), presentata (***) dal Socio C. AGOSTINELLI.

SUMMARY. — Some physical and mathematical problems related to the aerodynamics and dynamics of a flat plate in a molecular flow are studied in this paper. The considered system is a stochastic one since the initial conditions and some of the identification parameters are assumed to be given as constant random variables. The stochastic equation of the dynamics of the system is mathematically studied and particularized in a pertinent application.

1. In questa Nota studiamo da un punto di vista matematico l'equazione stocastica del moto del baricentro di una lamina piana, in condizioni di flusso molecolare, con assegnata legge di rotazione della lamina stessa.

Tale equazione è stata dedotta nella Nota I, [1], (vedi equazioni (35–39)), sulla base dei metodi della teoria cinetica dei gas [2, 3]. L'analisi della presente nota si basa essenzialmente sui metodi delle equazioni differenziali ordinarie deterministiche e stocastiche [4, 5, 6].

2. Consideriamo quindi l'equazione (35) della Nota I [1] e, seguendo l'indicazione proposta nei lavori [4, 6], introduciamo la seguente variabile incrementata:

$$\zeta = \{z , \alpha\} \in D \subset \mathbf{R}^6 \quad , \quad \zeta = \zeta(t) : I \to D \quad , \quad I = [0 , t]$$

la quale, con ovvie considerazioni, deve soddisfare la seguente equazione differenziale:

$$\dot{\zeta} = [B]\, \zeta + \varepsilon \cdot \boldsymbol{b}(\zeta , t) \quad ; \quad \zeta(t = 0) = \zeta_0 = \{z_0 , \alpha\} \tag{1}$$

a cui, nella formulazione stocastica del problema, si associa la densità di probabilità iniziale:

$$P(\zeta , t = 0) = P_0(\zeta_0) = P(z , t = 0) \cdot P(\alpha) \tag{2}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del CNR, G.N.F.M., con contributo CNR, contratto n. 79.00697.01.

(**) Istituto di Meccanica Razionale del Politecnico di Torino.

(***) Nella seduta del 12 aprile 1980.

ove, tenendo conto dell'eq. (35) della Nota I, [1], ed essendo $\alpha = \text{cost.}$:

$$(3) \qquad [B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_x \\ \psi_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lo studio dell'equazione differenziale stocastica definita dalle eq. (1–3) può essere effettuato a partire da alcuni risultati proposti in lavori precedenti (ed in particolare il metodo dello jacobiano della trasformazione $\zeta_0 \to \zeta(t)$ che consente [5] il calcolo della trasformazione $P(\zeta_0) \to P(\zeta, t)$ ed il noto metodo delle perturbazioni [7] esteso, come indicato in [6], allo studio di una classe di equazioni differenziali stocastiche).

Pertanto ricordiamo brevemente questi risultati:

(*i*) *Data l'equazione stocastica* $\dot{\zeta} = \boldsymbol{f}(\zeta, t)$, *l'evoluzione della densità di probabilità su* ζ *è definita dalla seguente equazione*:

$$(4) \qquad P(\zeta, t; \zeta_0) = J(t; \zeta_0)\, P_0(\zeta_0)$$

ove lo jacobiano della trasformazione $\zeta_0 \to \zeta(t)$ *soddisfa la seguente equazione differenziale*:

$$(5) \qquad \dot{J} = -J(\nabla \cdot \boldsymbol{f})$$

(*ii*) *Se si cerca la soluzione* $\zeta(t; \zeta_0)$ *nella seguente forma di prima perturbazione*:

$$(6) \qquad \zeta(t) = \zeta^{(0)}(t) + \varepsilon \cdot \zeta^{(1)}(t)$$

$\zeta^{(0)}$ *e* $\zeta^{(1)}$ *soddisfano le seguenti equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti*:

$$(7) \qquad \dot{\zeta}^{(0)} = [B]\, \zeta^{(0)} \quad , \quad \dot{\zeta}^{(1)} = [B]\, \zeta^{(1)} + \boldsymbol{b}(\zeta^{(0)}, t)$$

Osserviamo che la difficoltà principale nell'applicare al problema in oggetto i risultati di cui ai punti *i*, *ii*) ovvero le equazioni (5–7), nasce dalla struttura complessa delle funzioni ψ che appaiono nel termine non-lineare. Si può quindi pensare di approssimare il termine $\boldsymbol{b}(\zeta, t)$ con un termine $\boldsymbol{b}^*(\zeta, t)$ che abbia una struttura analitica sufficientemente semplice da consentire l'applicazione delle equazioni (5–7). Allo scopo premettiamo alcuni risultati di carattere generale:

LEMMA I. *Se la soluzione* $\zeta(t; \zeta_0)$ *dell'equazione* (1) *è unica, per assegnate condizioni iniziali, e se la soluzione* $\zeta^*(t; \zeta_0)$ *dell'equazione* $\dot{\zeta} = [B]\, \zeta +$

$+ \varepsilon \cdot \boldsymbol{b}^*(\zeta, t)$ *è anch'essa unica per le stesse condizioni iniziali, allora vale il seguente risultato*:

$$\| \boldsymbol{b}^* - \boldsymbol{b} \| \to 0 \Rightarrow \| \zeta - \zeta^* \| \to 0 .$$

La dimostrazione è un risultato diretto dell'applicazione di metodi classici dell'analisi funzionale [8] e delle equazioni differenziali.

Consideriamo ora il caso in cui $\boldsymbol{b}$ possa essere approssimato, con un certo errore in norma, il che corrisponde ai casi pratici che si incontrano in questa classe di problemi, e proponiamo il seguente risultato:

LEMMA II. *Consideriamo una evoluzione in* I *e supponiamo che* $\boldsymbol{b}$ *sia approssimato da* $\boldsymbol{b}^*$ *con un errore* δ *in norma. Se le soluzioni sono cercate nella forma* (6) *allora*:

$$\| \boldsymbol{b}^* - \boldsymbol{b} \| \leq \delta \Rightarrow \| \zeta^* - \zeta \| \leq \varepsilon \cdot \delta \cdot t \cdot \exp (\| \det [B] \| \varepsilon \cdot t)$$

ove la norma, in questo problema, viene specificata come segue:

$$\| g(\zeta, \tau) \| = \max_{\substack{\tau \in I \\ \zeta \in D}} | g_i | \qquad \text{con} \quad \boldsymbol{g} = \{ g_i \} .$$

Dimostrazione. Scriviamo le due equazioni in oggetto nella forma integrale:

$$\zeta = \zeta_0 + [B] \int_0^t \zeta(s)\, ds + \varepsilon \cdot \int_0^t b(\zeta(s), s)\, ds ;$$

$$\zeta^* = \zeta_0 + [B] \int_0^t \zeta^*(s)\, ds + \varepsilon \cdot \int_0^t b^*(\zeta(s), s)\, ds$$

con $\zeta = \zeta^{(0)} + \varepsilon \cdot \zeta^{(1)}$ e $\zeta^* = \zeta^{*(0)} + \varepsilon \cdot \zeta^{*(1)}$.

Risulta:

$$\zeta^{(0)} = \zeta^{*(0)} \quad , \quad \| \zeta - \zeta^* \| = \| \varepsilon \cdot (\zeta^{(1)} - \zeta^{*(1)}) \|$$

e quindi:

$$\| \zeta - \zeta^* \| = \left\| \varepsilon \int_0^t [B] (\zeta^{(1)} - \zeta^{*(1)})\, ds + \varepsilon \int_0^t (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}^*)\, ds \right\|$$

e quindi per la diseguaglianza di Gronwall:

$$\| \zeta - \zeta^* \| = \| \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}^* \| \varepsilon\, t \exp (k \cdot t) \leq \delta \cdot \varepsilon \cdot t \cdot \exp (kt) \quad \text{ove} \quad k = \varepsilon \| \det [B] \|$$

il che dimostra il Lemma II.

L'espansione approssimata di $\boldsymbol{b}$ può essere cercata nella forma seguente:

$$\boldsymbol{b} \cong \boldsymbol{b}^* = \boldsymbol{b}_0(\zeta_0) + \sum_{j=1}^{n} \{\boldsymbol{c}_j(\zeta_0)\,\mathrm{H}_j(t) + \boldsymbol{d}_j(\zeta_0)\,\mathrm{K}_j(t)\} \tag{8}$$

ove:

$$\boldsymbol{c}_j = \sum_{r=1}^{m} \boldsymbol{c}_r^{(j)}\,\mathrm{L}_r(\zeta_0) \quad , \quad \boldsymbol{d}_j = \sum_{r=1}^{m} \boldsymbol{d}_r^{(j)}\,\mathrm{L}_r(\zeta_0)\,. \tag{9}$$

Nelle relazioni (8, 9) L , H e K sono funzioni note, definite a priori sulla base di una analisi qualitativa del problema in oggetto, di ζ_0 e t rispettivamente. Nell'ambito di questo paragrafo verranno indicate alcune soluzioni analitiche per i casi (per altro più frequenti) in cui tali espansioni possono essere effettuate mediante potenze di t o funzioni trigonometriche o esponenziali di t.

Consideriamo quindi le equazioni differenziali (7) in cui la matrice [B], definita dalla prima delle (3), ha l'autovalore $\lambda = 0$ con molteplicità 6. L'integrale generale della prima delle equazioni (7) è anche integrale generale dell'equazione omogenea associata alla seconda delle (7) e si può mettere nella forma $[\Psi(t)]\,\boldsymbol{c}$, ove $[\Psi(t)]$ è la matrice fondamentale:

$$[\Psi(t)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{con det. } [\Psi(t)] = 1 \tag{10}$$

e $\boldsymbol{c}$ è un vettore costante arbitrario.

Imponendo le condizioni iniziali: $\zeta^{(0)}(0) = \zeta_0 = \{0\,,\,0\,,\,\dot{x}_0\,,\,\dot{y}_0\,,\,\alpha_1\,,\,\alpha_2\}$ risulta:

$$\zeta^{(0)}(t) = \{\dot{x}_0\,t\,,\,\dot{y}_0\,t\,,\,\dot{x}_0\,,\,\dot{y}_0\,,\,\alpha_1\,,\,\alpha_2\} \tag{11}$$

soluzione del moto uniforme del baricentro della lamina.

Applicando alla seconda delle (7) il metodo della variazione delle costanti si ottiene l'integrale generale di tale equazione completa come somma dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata e di un integrale particolare dell'equazione completa [9], ossia,

$$\zeta^{(1)} = [\Psi(t)]\cdot\boldsymbol{c} + [\Psi(t)]\int_0^t [\Psi^{-1}(\tau)]\,\boldsymbol{b}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,,\ [\Psi^{-1}(t)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Se, venendo ai casi particolari, si suppone:

$$\boldsymbol{b}^*(t) = \boldsymbol{b}_j t^j = \{0, 0, b_{j3}, b_{j4}, 0, 0\} \cdot t^j \qquad (j = 0, 1, 2, \cdots) \tag{13}$$

si ottengono gli integrali particolari:

$$\mathscr{B}_j(t) = \Psi[(t)] \int_0^t [\Psi^{-1}(\tau)]\, \boldsymbol{b}_j\, \tau^j \, d\tau = \tag{14}$$

$$= \left\{ \frac{b_{j3}}{(j+1)(j+2)} t^{j+2}, \frac{b_{j4}}{(j+1)(j+2)} t^{j+2}, \frac{b_{j3}}{j+1} t^{j+1}, \frac{b_{j4}}{j+1} t^{j+1}, 0, 0 \right\}.$$

Se più in generale supponiamo:

$$\boldsymbol{b}^*(t) = \sum_{j=0}^{N} \boldsymbol{b}_j t^j \tag{15}$$

ove i coefficienti $\boldsymbol{b}_j$ sono dati dalla (13), otteniamo l'integrale particolare polinomiale:

$$\sum_{j=0}^{N} \mathscr{B}_j(t) \quad \text{con } \mathscr{B}_j \text{ espresse dalle (14).} \tag{16}$$

Consideriamo ora l'equazione:

$$\dot{\xi}^{(1)} = [B]\, \xi^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} \{\boldsymbol{c}_j(\xi_0)\, H_j(t) + \boldsymbol{d}_j(\xi_0)\, K_j(t)\} \tag{17}$$

ove:

$$\boldsymbol{c}_j = \{0, 0, c_{j3}(\xi_0), c_{j4}(\xi_0), 0, 0\} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{d}_j = \{0, 0, d_{j3}(\xi_0), d_{j4}(\xi_0), 0, 0\}$$

ed esaminiamo i due casi in cui rispettivamente sono:

(I): $H_j = \sin(j\nu t)$, $K_j = \cos(j\nu t)$; (II): $H_j = \operatorname{sh}(j\nu t)$, $K_j = \operatorname{ch}(j\nu t)$

essendo ν una costante positiva.

Nel caso (I) cerchiamo un integrale particolare nella forma:

$$\sum_{j=1}^{n} \{\mathscr{C}_j \sin(j\nu t) + \mathscr{D}_j \cos(j\nu t)\} \tag{18}$$

ottenendo per le incognite $\mathscr{C}_j$ e $\mathscr{D}_j$ il sistema:

$$\begin{aligned} [B]\, \mathscr{C}_j + j\nu \mathscr{D}_j &= -\boldsymbol{c}_j \\ -j\nu \mathscr{C}_j + [B]\, \mathscr{D}_j &= -\boldsymbol{d}_j \end{aligned} \tag{19}$$

da cui ricaviamo:

$$\mathscr{C}_j = \{-c_{j3}/(j\nu)^2, -c_{j4}/(j\nu)^2, d_{j3}/(j\nu), d_{j4}/(j\nu), 0, 0\} \tag{20a}$$

$$\mathscr{D}_j = \{-d_{j3}/(j\nu)^2, -d_{j4}/(j\nu)^2, -c_{j3}/(j\nu), -c_{j4}/(j\nu), 0, 0\}. \tag{20b}$$

Nel caso (II) cerchiamo un integrale particolare della forma:

$$\sum_{j=1}^{n} \{\mathscr{E}_j \operatorname{sh}(j\nu t) + \mathscr{F}_j \operatorname{ch}(j\nu t)\} \tag{21}$$

ottenendo per le incognite $\mathscr{E}_j$ e $\mathscr{F}_j$ il sistema:

$$\begin{aligned} [\mathrm{B}]\,\mathscr{E}_j - j\nu\mathscr{F}_j &= -\boldsymbol{c}_j \\ -j\nu\mathscr{E}_j + [\mathrm{B}]\,\mathscr{F}_j &= -\boldsymbol{d}_j \end{aligned} \tag{22}$$

da cui ricaviamo:

$$\mathscr{E}_j = \{c_{j3}/(j\nu)^2 \ , \ c_{j4}/(j\nu)^2 \ , \ d_{j3}/(j\nu) \ , \ d_{j4}/(j\nu) \ , \ 0 \ , \ 0\} \tag{23 a}$$

$$\mathscr{F}_j = \{d_{j3}/(j\nu)^2 \ , \ d_{j4}/(j\nu)^2 \ , \ c_{j3}/(j\nu) \ , \ c_{j4}/(j\nu) \ , \ 0 \ , \ 0\}. \tag{23 b}$$

Ed infine, se $\boldsymbol{b}^*(t)$ è espresso dalla (8), un integrale particolare della equazione differenziale in $\zeta^{(1)}$ si ottiene come somma della (13) per $j = 0$ e della (18) o (21) rispettivamente nel caso (I) o nel caso (II).

Possiamo quindi osservare, a conclusione di questo paragrafo, che mediante le relazioni (11–23) è possibile ottenere una espressione analitica approssimata della risposta dinamica del sistema $\zeta(t\,;\,\zeta_0)$ e quindi, nei termini di tale approssimazione (discussa nei lemmi I e II), è possibile calcolare lo jacobiano J della trasformazione $\zeta(t=0) \to \zeta(t)$ o dalla sua definizione diretta, ricordata al punto (*i*) di questo paragrafo, o per integrazione della (5) nella forma:

$$\mathrm{J}(t\,;\,\zeta_0) = \exp\left[-\int_0^t g(\zeta(s\,;\,\zeta_0))\,\mathrm{d}s\right] \quad , \quad g = \nabla\cdot\boldsymbol{f} \tag{24}$$

da cui segue $\mathrm{P}(\zeta\,;t)$ per la (4) ed infine, essendo noti ζ e P, il calcolo dei momenti di ζ può essere effettuato nella forma:

$$\langle \zeta_i^p \rangle = \int (\zeta_i(t))^p \,\mathrm{P}(\zeta\,;t)\,\mathrm{d}\zeta\,. \tag{25}$$

Nella classe di problemi considerata ha interesse il caso $p = 1$ come nella applicazione specifica del paragrafo seguente.

3. In applicazione dei risultati analitici finora ottenuti proponiamoci, a titolo di esempio, di studiare il processo stocastico descritto dalle Eq. (1–3) e precisato dalle seguenti ipotesi.

I) *Le condizioni iniziali del moto della lamina sono assegnate in forma deterministica come segue*:

$$t = 0 \ : \ x(0) = 0 \ ; \ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \ ; \ y(0) = 0 \ ; \ \dot{y}(0) = 0\,. \tag{26}$$

II) *L'identificazione dei parametri relativi alle condizioni al contorno è effettuata in senso probabilistico, assumendo che le componenti di* α *siano variabili aleatorie indipendenti, costanti in t, con assegnate densità di probabilità*:

$$(27) \qquad P(\alpha_i) = \frac{1}{B(\lambda_i, \mu_i)} \alpha_i^{(\lambda_i - 1)} \cdot (1 - \alpha_i)^{(\mu_i - 1)} \; ; \quad i = 1, 2 \; ; \; \lambda_i, \mu_i \in \mathbf{R}_+ \; ; \; \alpha_i \in [0, 1]$$

ove:

$$(28) \qquad B(\lambda_i, \mu_i) = \int_0^1 \alpha_i^{(\lambda_i - 1)} \cdot (1 - \alpha_i)^{(\mu_i - 1)} \, d\alpha_i = \frac{\Gamma(\lambda_i)\, \Gamma(\mu_i)}{\Gamma(\lambda_i + \mu_i)} \, .$$

Inoltre, tenuto conto dei risultati ricavati in [10] *relativi all'identificazione in senso deterministico di tali parametri, si assumerà in particolare che le distribuzioni* (27) *abbiano le seguenti medie e varianze*:

$$(29) \qquad \langle \alpha_1 \rangle = 0.25 \, , \; \sigma^2_{\alpha_1} = 0.02 \quad ; \quad \langle \alpha_2 \rangle = 0.42 \, , \; \sigma^2_{\alpha_2} = 0.03 \, ,$$

cui corrispondono rispettivamente i valori: $\lambda_1 = 2 \, ; \, \mu_1 = 6 \, ; \, \lambda_2 = 3 \, ; \, \mu_2 = 4$ *dei paramentri* $\lambda_i \, , \, \mu_i$ *presenti nelle* (27) *e* (28).

III) *Si assume che la rotazione* θ *della lamina sia una funzione nota del tempo* $t \in [0 \, , \, t_m]$ *soddisfacente alle condizioni*: $\theta(0) = \theta_0 \, , \; \dot{\theta}_0 (0) = \dot{\theta}_0 \, , \; \theta(t_m) = \theta_m \, , \; \dot{\theta}(t_m) = 0$, *e si esprime analiticamente* $\theta(t)$ *nella forma*:

$$(30) \qquad \theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0 \, t + \frac{3(\theta_m - \theta_0) - 2\, \dot{\theta}_0 \, t_m}{t_m^2} \, t^2 + \frac{\dot{\theta}_0 \, t_m - 2(\theta_m - \theta_0)}{t_m^3} \, t^3 .$$

I calcoli che seguono sono stati effettuati, in particolare, per $t_m = 1$ *sec.*, $\theta_0 = 0$, $\dot{\theta}_0 = 0.1$ *rad/sec*, $\theta_m = \pi/6$.

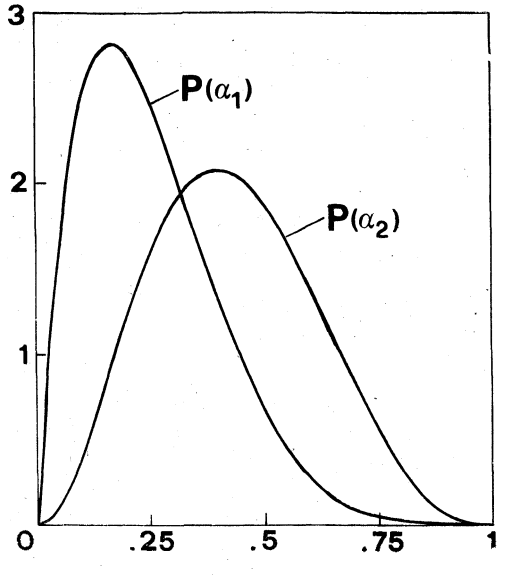


Fig. 1. – Densità di probabilità $P(\alpha)$.

Notiamo che B e Γ introdotte nella (28) sono rispettivamente le funzioni Beta e Gamma [11]. In base alle ipotesi I e II, alla Eq. (1) associamo pertanto la densità di probabilità iniziale:

$$P(\zeta ; t = 0) = P_0(\zeta_0) = P(\alpha_1)\, P(\alpha_2)\, \delta(x)\, \delta(y)\, \delta(\dot{x} - \dot{x}_0)\, \delta(\dot{y}) \tag{31}$$

ove δ è la funzione di Dirac e le $P(\alpha_i)$, riportate in fig. 1 sono definite dalla (27). Cerchiamo la soluzione $\zeta(t ; \zeta_0)$ del processo stocastico così definito nella forma di prima perturbazione (6)–(7). A seguito delle ipotesi fatte, le componenti non nulle del vettore $\boldsymbol{b}(\zeta^{(0)}, t)$ presente nella seconda delle Eq. (7), e definito dalla seconda delle (3), possono approssimarsi (cfr. ad esempio [11, 12]) con le seguenti espansioni polinomiali:

$$\begin{aligned} b_3 &\simeq b_3^* = \frac{\dot{x}_0^2}{l} \sum_{j=0}^{N} c_j^{(x)}(\zeta_0)\, T_j(t) \quad , \quad T_j(t) = \cos(j \cos^{-1} t) \\ b_4 &\simeq b_4^* = \frac{\dot{x}_0^2}{l} \sum_{j=0}^{N} c_j^{(y)}(\zeta_0)\, T_j(t) \end{aligned} \tag{32}$$

dove i coefficienti dei polinomi di Chebyshev $T_j(t)$ sono a loro volta espressi mediante analoghe espansioni rispetto alle variabili aleatorie α_1, α_2:

$$\begin{aligned} c_j^{(x)}(\zeta_0) &= \sum_{r=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} c_{jrk}^{(x)}\, T_r(\alpha_1)\, T_k(\alpha_2) \\ c_j^{(y)}(\zeta_0) &= \sum_{r=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} c_{jrk}^{(y)}\, T_r(\alpha_1)\, T_k(\alpha_2) . \end{aligned} \tag{33}$$

I coefficienti di tali espansioni sono da determinarsi calcolando numericamente gli integrali (38) e (39) della Nota I [1], al variare di t, α e per assegnati valori di z_0, β. Se in particolare si assume: $\rho_\infty = 1 \cdot 10^{-11}$ gr/cm^3 ; $T_\infty = 600\ ^0$K; $T_w = 400\ ^0$K ; m = 4.452 10^{-23} gr ; $V_0 = \dot{x}_0 = 5 \cdot 10^5$ cm/sec (cui corrisponde un valore della « speed ratio » S ≃ 8.2), si ricava:

$$\boldsymbol{b}^*(\zeta^{(0)} ; t) = \sum_{j=0}^{5} \boldsymbol{b}_j^*(\alpha)\, t^j \tag{34}$$

con:

$$\begin{aligned} & b_{j1}^* = b_{j2}^* = b_{j5}^* = b_{j6}^* = 0 \\ & b_{j3}^* = \frac{\dot{x}_0^2}{l} \sum_{k=0}^{2} \sum_{r=0}^{1} p_{jrk}\, \alpha_1^r\, \alpha_2^k \quad ; \quad b_{j4}^* = \frac{\dot{x}_0^2}{l} \sum_{k=0}^{2} \sum_{r=0}^{1} q_{jrk}\, \alpha_1^r\, \alpha_2^k , \end{aligned} \tag{35}$$

dove i coefficienti p_{jrk}, q_{jrk} hanno i valori riportati nelle Tabelle I e II. Tenuto conto delle (11) e (13), si ha allora la seguente soluzione approssimata del processo stocastico studiato:

$$\zeta^*(t) = \zeta^{(0)} + \varepsilon \zeta^{*(1)} \tag{36}$$

dove $\zeta^{(0)}$ è la soluzione (11) del moto uniforme del baricentro della lamina e le componenti di $\zeta^{*(1)}$ vàlgono (eliminando da ora in poi l'asterisco usato per

distinguere la soluzione approssimata da quella esatta):

$$\zeta_1^{(1)} = \sum_{j=0}^{5} \frac{b_{j3}}{(j+1)(j+2)} t^{j+2} \quad ; \quad \zeta_2^{(1)} = \sum_{j=0}^{5} \frac{b_{j4}}{(j+1)(j+2)} t^{j+2}$$

$$\zeta_3^{(1)} = \sum_{j=0}^{5} \frac{b_{j3}}{j+1} t^{j+1} \quad ; \quad \zeta_4^{(1)} = \sum_{j=0}^{5} \frac{b_{j4}}{j+1} t^{j+1} \tag{37}$$

$$\zeta_5^{(1)} = \zeta_6^{(1)} = 0 .$$

TABELLA I.

Valori dei coefficienti p_{jrk} nelle eq. (35) *e* (41).

j	$r=0$			$r=1$		
	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=0$	$k=1$	$k=2$
0	—0.0003	—0.0014	0.0018	0.0738	0	0
1	0.0593	—0.0204	—0.0102	—0.1048	0.0064	0
2	—0.5181	0.2083	0.0721	2.9956	—0.0876	0.0240
3	1.2206	—0.6374	—0.0018	—1.5781	0.2116	—0.0148
4	1.3310	0.4159	—0.7427	—2.5472	—0.2140	—0.0240
5	—1.6484	—0.0204	0.5764	1.8402	0.0672	0.0296

TABELLA II.

Valori dei coefficienti q_{jrk} nelle eq. (35) e (41).

j	$r=0$			$r=1$		
	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=0$	$k=1$	$k=2$
0	0.0134	—0.0030	0.0028	0.0012	0	0
1	0.2152	—0.0427	—0.0563	—0.1210	0.0689	—0.0665
2	—1.8492	0.3641	0.7279	1.2123	—0.4821	0.4397
3	9.3314	—1.9458	—2.7112	—5.5307	1.2546	—1.0826
4	—10.1169	2.5081	2.5311	5.9791	—1.4152	1.1732
5	3.1843	—0.9813	—0.6743	—1.9238	0.5617	—0.4545

Ricordando poi che i momenti di ordine p della soluzione approssimata valgono, nel caso esaminato:

$$\mathrm{E}\{\zeta_i^p(t)\} = \langle \zeta_i^p(t) \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \zeta_i^p(t) \cdot \mathrm{P}(\alpha_1) \cdot \mathrm{P}(\alpha_2)\, d\alpha_1\, d\alpha_2 , \tag{38}$$

risulta in particolare, per $p = 1$:

$$\langle \zeta(t) \rangle = \zeta^{(0)} + \varepsilon \langle \zeta^{(1)} \rangle \tag{39}$$

con:

$$\begin{aligned}
\langle \zeta_1^{(1)} \rangle &\equiv \langle x^{(1)}(t) \rangle = \frac{\dot{x}_0^2}{l} \sum_{j=0}^{5} \frac{t^{j+2}}{(j+1)(j+2)} \mathscr{P}_j(\alpha) \\
\langle \zeta_2^{(1)} \rangle &\equiv \langle y^{(1)}(t) \rangle = \frac{\dot{x}_0^2}{l} \sum_{j=0}^{5} \frac{t^{j+2}}{(j+1)(j+2)} \mathscr{Q}_j(\alpha) \\
\langle \zeta_3^{(1)} \rangle &\equiv \langle \dot{x}^{(1)}(t) \rangle = \frac{\dot{x}_0^2}{l} \sum_{j=0}^{5} \frac{t^{j+1}}{j+1} \mathscr{P}_j(\alpha) \\
\langle \zeta_4^{(1)} \rangle &\equiv \langle \dot{y}^{(1)}(t) \rangle = \frac{\dot{x}_0^2}{l} \sum_{j=0}^{5} \frac{t^{j+1}}{j+1} \mathscr{Q}_j(\alpha)
\end{aligned} \tag{40}$$

essendo:

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}_j(\alpha) &= p_{j00} + p_{j01}\langle \alpha_2 \rangle + p_{j02}\langle \alpha_2^2 \rangle + p_{j10}\langle \alpha_1 \rangle + p_{j11}\langle \alpha_1 \rangle \langle \alpha_2 \rangle + p_{j12}\langle \alpha_1 \rangle \langle \alpha_2^2 \rangle \\
\mathscr{Q}_j(\alpha) &= q_{j00} + q_{j01}\langle \alpha_2 \rangle + q_{j02}\langle \alpha_2^2 \rangle + q_{j10}\langle \alpha_1 \rangle + q_{j11}\langle \alpha_1 \rangle \langle \alpha_2 \rangle + q_{j12}\langle \alpha_1 \rangle \langle \alpha_2^2 \rangle .
\end{aligned} \tag{41}$$

Le espressioni dei momenti di ordine superiore possono facilmente dedursi analiticamente in modo analogo dalle (37) e (38). Infine, per il calcolo della densità di probabilità su $\zeta^*(t)$, risulta dalle (4) e (24):

$$\nabla \cdot f^* = 0 \Rightarrow \mathrm{J} = 1 \Rightarrow \mathrm{P}(\zeta^*, t\,;\, \zeta_0) = \mathrm{P}_0(\zeta_0) \tag{42}$$

con $\mathrm{P}_0(\zeta_0)$ data dalla (31).

Le figure 2 e 3 riportano in funzione del tempo i valori che si ricavano per le grandezze adimensionali $\overline{\mathrm{X}}(t)$, $\overline{\mathrm{Y}}(t)$, $\overline{v}_{\mathrm{X}}(t)$, $\overline{v}_{\mathrm{Y}}(t)$ definite nelle figure stesse. Tali valori, moltiplicati per il coefficiente ε dato dalla (36) della Nota I, [1], permettono una valutazione quantitativa del termine correttivo di prima perturbazione da apportare al moto uniforme del baricentro della lamina, nel caso in cui essa sia soggetta alla rotazione $\theta(t)$ definita nella ipotesi III).

Osserviamo quindi, in conclusione, che mediante l'esempio particolare considerato sono stati evidenziati quantitativamente alcuni risultati ottenibili mediante la teoria esposta nel paragrafo precedente e relativa alla equazione differenziale stocastica, dedotta nella Nota I, del moto del baricentro di una lamina piana in regime di flusso molecolare. Più precisamente, le soluzioni analitiche approssimate sono ottenute come prima perturbazione in termini

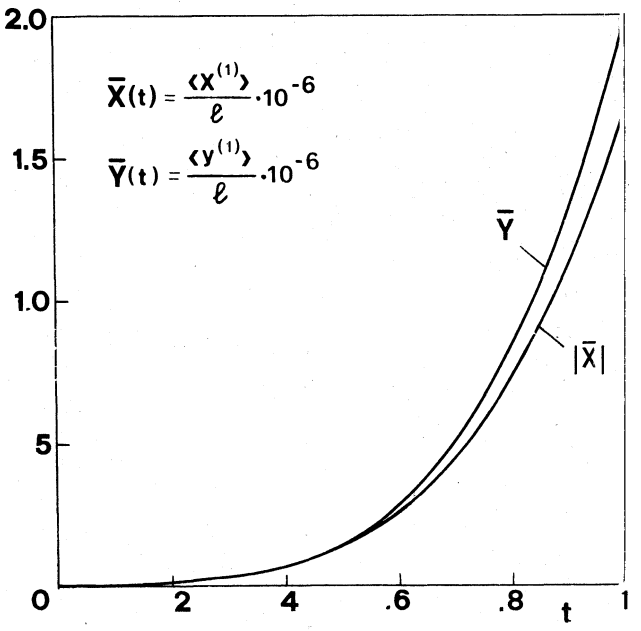


Fig. 2. – $\overline{Y}$ e $\overline{X}$ in funzione del tempo t.

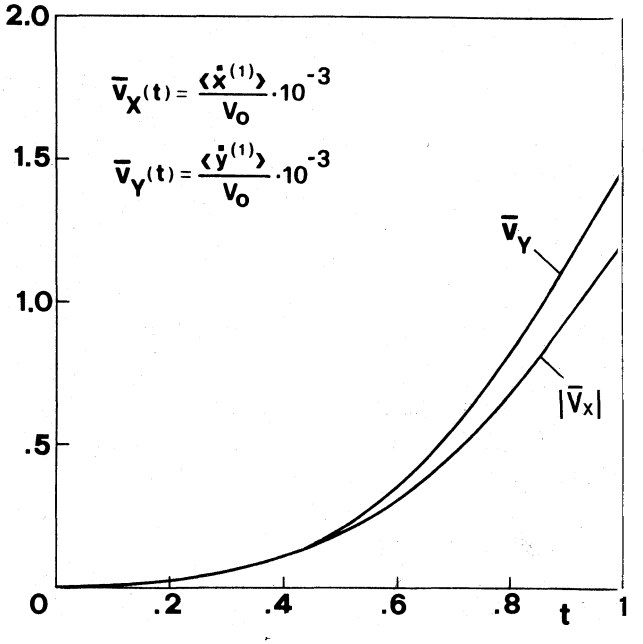


Fig. 3. – $\bar{v}_x$ e $\bar{v}_y$ in funzione di t.

del parametro $\varepsilon = \rho_\infty l^2 b/2\,\mathrm{M}$. Tenendo conto dell'ordine di grandezza di ε, in problemi reali, non pare opportuno, secondo gli autori, considerare perturbazioni di ordine superiore, ottenibili per altro mediante una estensione diretta del metodo matematico proposto.

BIBLIOGRAFIA

[1] N. BELLOMO, R. RIGANTI e M. T. VACCA (1980) – *Analisi stocastica del moto di una lamina piana in flusso molecolare*, Nota I, « Atti Accademia Nazionale dei Lincei ».

[2] C. CERCIGNANI (1975) – *Theory and Applications of the Boltzmann Equation*, Scottish Press, Edinburgh, London.

[3] R. MONACO (1978) – *On the Theory of Drag Calculation and Profile Optimization in Shockless Near Free Molecule Flow*, « Acta Mechanica », 29, 275.

[5] T. SOONG (1974) – *Random Differential Equations*, Academic Press, New York.

[5] N. BELLOMO e G. PISTONE (1979) – *Direct solution methods for a class of integral equations with random distribution of the inhomogeneous part*, in « Volterra Equations », ed. S. O. Londen e O. J. Staffans, Springer Lecture Note in Mathematics n. 737, Springer, Berlin, New York.

[6] N. BELLOMO (1980) – *On a class of stochastic dynamical systems: mathematical analysis, some optimization problems and applications*, in « Numerical Techniques for Stochastic Systems », ed. M. Cugiani e F. Archetti, North Holland, Amsterdam.

[7] A. HASAN NAYFEH (1973) – *Perturbation Methods*, Wiley, New York.

[8] K. YOSHIDA (1974) – *Functional Analysis*, Springer–Verlag, Berlin, New York.

[9] V. I. SMIRNOV (1978) – *Corso di Matematica Superiore*, vol. III, Ed. Riuniti, Roma.

[10] R. MONACO e A. PALAMARA ORSI (1980) – *Molecular gas-flow on upper-atmosphere satellites: mathematical modeling and heat transfer calculation*, « Appl. Math. Modelling », (in stampa).

[11] C. E. PEARSON (1974) – Handbook of Applied Mathematics, Van Nostrand Co, New York.

[12] M. CUGIANI (1972) – *Metodi dell'Analisi Numerica*, « UTET », Torino.