Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Ernst Mohr

Über zwei von G. Doetsch gestellte Fragen aus der Theorie der Laplace—Transformation

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **68** (1980), n.5, p. 402–406.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1980_8_68_5_402_0>

Trasformazioni integrali. — *Über zwei von G. Doetsch gestellte Fragen aus der Theorie der Laplace-Transformation.* Nota di ERNST MOHR, presentata (*) dal Socio G. FICHERA.

RIASSUNTO. — Se $\mathcal{F}(t)$ è trasformabile secondo Laplace, posto

$$\mathcal{M}(x) = \sup_{-\infty < y < \infty} \left| \int_0^\infty e^{-(x+iy)t} \mathcal{F}(t) \, dt \right| ,$$

si dimostra che $\mathcal{M}(x)$ è strettamente descrescente ed infinitesima per $x \to \infty$.

1. Wir übernehmen die Bezeichnungen von G. Doetsch aus [1] und setzen voraus:

$$f(s) = \int_0^\infty dt \, e^{-st} \mathcal{F}(t) \quad , \quad f(s) \not\equiv 0 \quad , \quad s = x + iy \tag{1}$$

besitzt eine Konvergenzabszisse $\beta < \infty$ und eine Beschränktsabszisse $\eta < \infty$; es existiert dann (R = Realteil)

$$\sup_{-\infty < y < \infty} |f(x+iy)| = \mathcal{M}(x) \quad \text{für} \quad \mathrm{R}s > \eta \quad ; \quad \mathcal{M}(x) > 0 \, .$$

$\mathcal{M}(x)$ ist nicht steigend, > 0, konvex (sogar logarithmisch konvex), speziell stetig, und falls $\mathcal{M}(x_1) = \mathcal{M}(x_2)$ füt zwei Stellen x_1 , x_2 mit $x_1 < x_3$ gilt, so ist

$$\mathcal{M}(x) = \text{const.} = \mathcal{M}(x_1) \quad \text{für} \quad x \geqq x_1 \, .$$

Es handelt sich dann um die Fragen ([1], p. 184):

1) Gibt es l = Funktionen $f(s)$, $f(s) \not\equiv 0$, für die $\mathcal{M}(x) = \text{const.} > 0$ ist ?, und

2) Kann der Fall $\lim\limits_{x \to \infty} \mathcal{M}(x) > 0$ tatsächlich eintreten ?

Wir zeigen im folgenden: die Frage 2) ist mit nein zu beantworten, und damit auch die Frage 1). Es ist also stets

$$\lim_{x \to \infty} \mathcal{M}(x) = 0$$

und

$$\mathcal{M}(x_1) > \mathcal{M}(x_2) \quad \text{für} \quad x_1 < x_2 \, .$$

(*) Nella seduta del 10 maggio 1980.

Den Beweis führen wir indirekt; wir nehmen also an: es existiert ein $f(s)$, für das

$$\lim \mathcal{M}(x) = c > 0 \tag{2}$$

ist (von selbst ist dann $f(s) \not\equiv 0$) und leiten daraus einen Widerspruch her.

2. Nach Definition von $\mathcal{M}(x)$ und der gemachten Annahme (2) existieren zwei reelle Zahlenfolgen (a_n) und (b_n) derart, dass

$$\lim_{n\to\infty} | f(a_n + ib_n) | = c > 0$$

ist, wobei

$$\eta + 2 < a_1 \quad , \quad \beta + 2 < a_1 \quad , \quad 0 < a_1$$
$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots \quad ; \quad a_n \to \infty$$
$$| b_1 | < | b_2 | < | b_3 | < \cdots \quad ; \quad | b_n | \to \infty \; ;$$

$| b_n | \to \infty$ wogen Satz 1, p. 162 in [1]; danach ist sogar notwending

$$\overline{\lim} \frac{| b_n |}{a_n} = \infty \qquad (n \to \infty) .$$

Nach geeigneter Siebung, die wir uns bereits vorgenommen denken, existiert

$$\lim f(a_n + ib_n) = ce^{i\theta} \quad , \quad \theta \text{ eine reelle Zahl} . \tag{3}$$

3. Wir betrachten die Funktionenfolge für $\mathrm{R}s > -2$:

$$f_n(s) = f(s + a_n + ib_n) \; ; \tag{4}$$

für sie ist

$$| f_n(s) | \leqq \mathcal{M}(-2 + a_1) = \mathcal{M}_1 \tag{5}$$

$$| f_n(s) | \leqq \mathcal{M}(-2 + a_{\mathcal{N}}) \qquad \text{für} \quad n \geqq \mathcal{N} \tag{6}$$

$$f_n(0) \to ce^{i\theta} . \tag{7}$$

Nach dem Theorem von Montel [2] folgt aus (5): es existiert eine Teilfolge $f_{n_\nu}(s)$, die in $\mathrm{R}s > -2$ gegen eine (holomorphe) Funktion $\varphi(s)$ konvergiert und dies gleichmässig in jedem abgeschlossenen Rechteck in $\mathrm{R}s > -2$. Speziell gilt $(s = x + iy)$

$$\lim f_{n_\nu}(s) = \varphi(s) \quad \text{gleichmässig in} \quad | x | \leqq 1 \quad , \quad | y | \leqq 1 . \tag{8}$$

Aus (6) und (2) fogt, da $a_{\mathcal{N}} \to \infty$

$$| \varphi(s) | \leqq c \quad \text{in} \quad | x | \leqq 1 \quad , \quad | y | \leqq 1 , \tag{9}$$

aus (7)

$$\varphi(0) = ce^{i\theta}, \tag{10}$$

und damit nach dem Maximumsprinzip

$$\varphi(s) = ce^{i\theta}, \tag{11}$$

zunächst im obigen Quadrat und alsdann in $\mathrm{R}s > -2$.

Für eine andere konvergente Teilfolge ergibt die Schlussweise wieder als Grenzfunktion $ce^{i\theta}$, d.h. (8) gilt bereits für die Ausgangsfolge $f_n(s)$ anstelle von $f_{n_\nu}(s)$:

$$\lim f_n(s) = ce^{i\theta} \qquad \text{für} \quad \mathrm{R}s > -2 \tag{12}$$

und gleichmässig in jedem abgeschlossenen Rechteck in $\mathrm{R}s > -2$, speziell auf $s = 1 + iy$ für $|y| \leqq b$, $b > 0$ beliebig und dann fest:

$$\begin{cases} |f_n(1 + iy) - ce^{i\theta}| < \varepsilon & \text{für} \quad n > \mathcal{N} \\ |y| \leqq b \end{cases} \tag{13}$$

Indessen würde es genügen, wenn auch weiterhin $n = n_\nu$ wäre und mit (8) gearbeitet würde.

4. Nach (4) und (1) ist für $\mathrm{R}s > -2$

$$f_n(s) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, e^{-st} \{e^{-(a_n+ib_n)t} \cdot \mathcal{F}(t)\}. \tag{14}$$

Mit

$$\Phi_n(t) = \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_0^\tau \mathrm{d}\sigma \{e^{-(a_n+ib_n)\sigma} \cdot \mathcal{F}(\sigma)\} = \int_0^t \mathrm{d}\sigma (t - \sigma)\, e^{-a_n\sigma} \cdot e^{-ib_n\sigma}\, \mathcal{F}(\sigma) \tag{15}$$

ist dann auch ([1], Satz 5, p. 92)

$$\frac{f_n(s)}{s^2} = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, e^{-st}\, \Phi_n(t) \qquad \text{für} \quad \mathrm{R}s > 0; \tag{16}$$

davon gilt die Umkehrformel ([1], Satz 1, p. 218)

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \mathrm{d}s\, e^{ts} \cdot \frac{f_n(s)}{s^2} \qquad \text{für} \quad t \geqq 0. \tag{17}$$

Es sei nun $T > 0$ beliebig und dann fest und

(18) $$0 \leqq t \leqq T \quad ; \quad T > 0 .$$

Dann folgt aus (17), (13) und (5), sowie (7)

(19) $$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(t) = ce^{i\theta}\cdot t , \qquad \text{gleichmässig in } 0 \leqq t \leqq T \quad ; \quad c > 0 .$$

In der Tat: wir spalten das Integral

(*) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} ds\, e^{ts}\, \frac{f_n(s) - ce^{i\theta}}{s^2}$$

in die drei Teile auf

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{1-ib}^{1+ib} + \frac{1}{2\pi i}\int_{1-i\infty}^{1-ib} + \frac{1}{2\pi i}\int_{1+ib}^{1+i\infty} = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}$$

und schätzen sie einzeln ab. Es ist unabhängig von n

$$|\,\mathrm{II}\,| \leqq \frac{1}{2\pi}\, e^{T}\cdot\{\mathcal{M}_1 + c\} \int_b^{\infty} \frac{dy}{1+y^2} < \frac{e^{T}\cdot\{\mathcal{M}_1 + c\}}{2\pi}\cdot\frac{1}{b} ;$$

dieselbe Abschätzung gilt fur III. Sei nun $\delta > 0$ gegeben. Wir wählen $b > 0$ so gross, dass

$$\frac{e^{T}\cdot\{\mathcal{M}_1 + c\}}{\pi}\,\frac{1}{b} < \frac{\delta}{2}, \qquad \text{d.h.} \quad |\,\mathrm{II}\,| + |\,\mathrm{III}\,| < \frac{\delta}{2}$$

wird; b ist jetzt fest. Alsdann nehmen wir in (13) als ε

$$\varepsilon = e^{-T}\cdot\delta \qquad \text{und dazu das } \mathcal{N} \text{ gemäss (13)}$$

und bekommen für $n > \mathcal{N}$

$$|\,\mathrm{I}\,| \leqq \frac{1}{2\pi}\, e^{T}\cdot\varepsilon \int_{-b}^{b} \frac{dy}{1+y^2} < \frac{1}{2\pi}\,\delta\cdot\pi = \frac{\delta}{2} .$$

Zusammen ergibt sich

$$|\,\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}\,| \leqq |\,\mathrm{I}\,| + |\,\mathrm{II}\,| + |\,\mathrm{III}\,| < \delta \qquad \text{für} \quad n > \mathcal{N}.$$

$\delta > 0$ war beliebig und es folgt: der Limes von (*) ist $= 0$, gleichmässig für die t aus (18). Wegen

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} ds\, e^{ts}\,\frac{1}{s^2} = t$$

folgt (19).

Anderseits ist nach (15)

$$\Phi_n(t) = e^{-a_n t} \left[\int_0^t d\sigma \, \{(t-\sigma) \, e^{a_n(t-\sigma)}\} \cdot e^{-ib_n\sigma} \, \mathscr{F}(\sigma) \right]. \tag{20}$$

Die geschweifte Klammer ist streng monoton fallend.

Das "Abelsche Lemma" auf das Integral angewandt ergibt

$$| [\ ] | \leqq t e^{a_n t} \cdot \left\{ \max_{0 \leqq \tau \leqq t} \left| \int_0^\tau d\sigma \, e^{-ib_n\sigma} \, \mathscr{F}(\sigma) \right| \right\};$$

daraus und aus (20) folgt, dass umso mehr

$$| \Phi_n(t) | \leqq T \cdot \left\{ \max_{0 \leqq t \leqq T} \left| \int_0^t d\tau \, e^{-ib_n\tau} \mathscr{F}(\tau) \right| \right\}$$

gilt. Hier strebt aber die geschweifte Klammer gleichmässig in $0 \leqq t \leqq T$ nach Null fúr $n \to \infty$, da $b_n \to \infty$ (vergl. [1], p. 169):

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(t) = 0 \,, \qquad \text{gleichmässig in} \quad 0 \leqq t \leqq T \,. \tag{21}$$

Die Aussagen (19) und (21) widersprechen sich aber für $0 < t \leqq T$.

Da man leicht Funktionen $f(s)$ konstruieren kann, für welche

$$\mathscr{M}(x) \geqq c > 0$$

ausfällt, so ist für ein solches $f(s)$ nach dem obigen Ergebnis notwendig $\beta = \infty$ d.h. $f(s)$ besitzt keine Beschränktheits = Halbebene.

LITERATUR

[1] GUSTAV DOETSCH (1971) – *Handbuch der Laplace-Transformation*, Band I, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, 1950 oder Verbesserter Nachdruck der ersten Auflage 1950.

[2] Vergleiche E. GOURSAT – «Cours d'Analyse», II vol., 5ª ed. pag. 674 (diesen Hinweis verdanke ich Herrn Prof. Fichera).