Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Martin Jurchescu, Alessandro Tancredi

Sulla trasversalità in geometria analitica complessa

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **68** (1980), n.4, p. 294–298.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1980_8_68_4_294_0>

Geometria. — *Sulla trasversalità in geometria analitica complessa.* Nota di MARTIN JURCHESCU e ALESSANDRO TANCREDI (*), presentata (**) dal Socio E. MARTINELLI.

SUMMARY. — We extend the notion of transversality to complexes of Fréchet modules and we give a Künneth formula for these complexes. Then, using this formula, we study the cohomology of transversal coherent analytic sheaves.

INTRODUZIONE

Il concetto di moduli trasversali è stato inizialmente usato, nel caso di moduli di Fréchet sopra un'algebra dello stesso tipo, da R. Kiehl e J. L. Verdier [5], i quali se ne sono serviti nella dimostrazione del teorema dell'immagine diretta di Grauert. Successivamente J. Hubbard [2] ha ripreso lo studio dei moduli di Fréchet trasversali trattando i moduli delle sezioni globali di fasci analitici coerenti. In particolare egli, nelle ipotesi che $(X, \mathcal{O}_X)$ e $(Y, \mathcal{O}_Y)$ siano spazi di Stein su uno spazio di Stein $(S, \mathcal{O}_S)$, $(X \times_S Y, \mathcal{O}^*)$ il loro prodotto fibrato, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ fasci analitici coerenti su X e Y, rispettivamente, e trasversali su S, $\mathcal{F}^*$ e $\mathcal{G}^*$ le immagini inverse di $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ su $X \times_S Y$, ha dimostrato che $\mathcal{F}(X)$ e $\mathcal{G}(Y)$ sono moduli di Fréchet trasversali su $\mathcal{O}_S(S)$ e che risulta $\mathcal{F}^* \underset{\mathcal{O}^*}{\otimes} \mathcal{G}^* (X \times_S Y) = \mathcal{F}(X) \underset{\mathcal{O}_S(S)}{\hat{\otimes}} \mathcal{G}(Y)$.

In questo lavoro si estende il concetto di trasversalità ai complessi di moduli e si dimostra una formula di Künneth, di cui sono casi particolari quella classica per i complessi spazi di Fréchet [1], e quelle per i complessi di spazi LF [3] e DFS [6]. I risultati ottenuti sui complessi trasversali di moduli di Fréchet permettono, senza supporre X e Y di Stein, di generalizzare i risultati di J. Hubbard. Si stabilisce invero l'esistenza di una successione spettrale il cui termine iniziale è dato da una formula nella quale compaiono $H^i(X, \mathcal{F})$ e $H^j(Y, \mathcal{G})$ e il cui imite è $H^n(X \times_S Y, \mathcal{F}^* \underset{\mathcal{O}^*}{\otimes} \mathcal{G}^*)$.

In questo lavoro ci limitiamo a esporre, senza entrare in particolari dimostrativi, i principali risultati nel caso Fréchet. In un successivo lavoro saranno dati i dettagli delle dimostrazioni e ulteriori risultati anche nel caso della coomologia con supporti.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.
(**) Nella seduta del 12 aprile 1980.

1. COMPLESSI TRASVERSALI

Prima di introdurre la nozione di complessi trasversali e i principali risultati ottenuti, cominciamo col richiamare alcuni fatti sui moduli di Fréchet trasversali [2].

Sia A un'algebra di Fréchet su **C**, cioè uno spazio di Fréchet su **C** munito di un'applicazione bilineare continua $A \times A \to A$ per la quale A è un'algebra associativa, commutativa e dotata di unità. Uno spazio di Fréchet M su **C**, munito di un'applicazione bilineare continua $A \times M \to M$ per la quale è un A–modulo, si dice un A–modulo di Fréchet.

Sia M un A–modulo di Fréchet; si dice che M è nucleare se è nucleare come **C**–spazio vettoriale topologico; si dice che M è libero se è della forma $A \mathbin{\hat{\otimes}_\pi} F$, ove F è uno spazio di Fréchet su **C**.

Una risoluzione libera di un A–modulo di Fréchet M è una successione esatta $L_\bullet \to M \to 0$, ove L_n è un A–modulo di Fréchet libero per ogni $n \geq 0$; la risoluzione si dice diretta se è omotopicamente banale come complesso di **C**–spazi vettoriali topologici.

Si può dimostrare che ogni A–modulo di Fréchet ammette una risoluzione libera diretta, unica a meno di omotopie.

Siano M e N due A–moduli di Fréchet e si consideri il morfismo di A–moduli di Fréchet

$$d : M \mathbin{\hat{\otimes}_\pi} A \mathbin{\hat{\otimes}_\pi} N \to M \mathbin{\hat{\otimes}_\pi} N$$

definito da $x \otimes a \otimes y \mapsto ax \otimes y - x \otimes ay$. Si indica con $M \mathbin{\hat{\otimes}_A} N$ il conucleo di d, che in generale non ha topologia separata.

Sia $L_\bullet \to M \to 0$ una risoluzione libera diretta di un A–modulo di Fréchet M; per ogni A–modulo di Fréchet N si pone

$$\widehat{\mathrm{Tor}}_n^A(M, N) = H_n(L_\bullet \mathbin{\hat{\otimes}_A} N) .$$

Per l'unicità, a meno di omotopie, della risoluzione libera diretta la definizione non dipende dalla risoluzione scelta. Si prova che risulta $\widehat{\mathrm{Tor}}_0^A(M, N) = M \mathbin{\hat{\otimes}_A} N$ e che, se N è libero, ovvero se è della forma $A \mathbin{\hat{\otimes}_\pi} F$, risulta

$$\widehat{\mathrm{Tor}}_n^A(M, N) = \begin{cases} M \mathbin{\hat{\otimes}_\pi} F & \text{per } n = 0 \\ 0 & \text{per } n > 0 . \end{cases}$$

Ricordiamo infine la definizione di A–moduli di Fréchet trasversali: due A–moduli di Fréchet M e N si dicono trasversali su A se

i) $M \mathbin{\hat{\otimes}_A} N$ è separato;

ii) $\widehat{\mathrm{Tor}}_n^A(M, N) = 0$ per $n > 0$.

Si osservi che per $A = \mathbf{C}$ la condizione di trasversalità è banalmente soddisfatta.

Per i complessi di A-moduli di Fréchet poniamo la seguente

DEFINIZIONE. Siano $L^{\bullet}$ e $K^{\bullet}$ due complessi di A-moduli di Fréchet; si dice che $L^{\bullet}$ e $K^{\bullet}$ sono trasversali su A se

i) $L^{\bullet}$ e $K^{\bullet}$ hanno coomologia separata;

ii) per ogni $i, j \in \mathbf{Z}$, ciascun A-modulo di Fréchet L^i, $Z^i(L^{\bullet})$, $B^i(L^{\bullet})$, $H^i(L^{\bullet})$ è trasversale su A a ciascun A-modulo di Fréchet K^j, $Z^j(K^{\bullet})$, $B^j(K^{\bullet})$, $H^j(K^{\bullet})$.

La formula di Künneth per i complessi trasversali di A-moduli di Fréchet è espressa dal teorema che segue.

TEOREMA 1. *Siano* $L^{\bullet}$ *e* $K^{\bullet}$ *due complessi di* A*-moduli di Fréchet trasversali su* A *e limitati a sinistra. Si supponga inoltre soddisfatta una delle tre condizioni seguenti*

i) A *e* L^i, *per ogni* $i \in \mathbf{Z}$, *sono nucleari.*

ii) A *e* K^j, *per ogni* $j \in \mathbf{Z}$, *sono nucleari.*

iii) L^i *e* K^j, *per ogni* $i, j \in \mathbf{Z}$, *sono nucleari.*

Allora per ogni $n \in \mathbf{Z}$, $H^n(L^{\bullet} \hat{\otimes}_A K^{\bullet})$ *è separato e il morfismo canonico*

$$\bigoplus_{i+j=n} H^i(L^{\bullet}) \hat{\otimes}_A H^j(K^{\bullet}) \to H^n(L^{\bullet} \hat{\otimes}_A K^{\bullet})$$

è un isomorfismo di A*-moduli di Fréchet.*

Facendo uso del Teorema 1 e delle successioni spettrali associate a un complesso doppio si dimostra il seguente

TEOREMA 2. *Siano* $L^{\bullet}$ *e* $K^{\bullet}$ *due complessi di* A*-moduli di Fréchet a coomologia separata, limitati a destra e a sinistra, per i quali* L^i *e* K^j *sono trasversali su* A *qualunque siano* $i, j \in \mathbf{Z}$. *Se* A *è nucleare e uno dei due complessi è costituito da* A*-moduli nucleari. esiste una successione spettrale tale che*

$$E_2^{p,q} = \bigoplus_{i+j=q} \widehat{\mathrm{Tor}}^{A}_{-p}(H^i(L^{\bullet})\ \ H^j(K^{\bullet}))$$

$$E^n = H^n(L^{\bullet} \hat{\otimes}_A K^{\bullet}) .$$

Osserviamo che i Teoremi 1 e 2 sussistono anche con dimostrazione analoga, nel caso di moduli di tipo LF e DFS su un'algebra dello stesso tipo. Per $A = \mathbf{C}$ le condizioni di trasversalità sono banalmente verificate e il Teorema 1 fornisce allora le formule di Künneth nel caso Fréchet [1], LF [3] e DFS [6].

2. FASCI TRASVERSALI

Siano $(X, \mathcal{O}_X)$ e $(Y, \mathcal{O}_Y)$ spazi analitici complessi di dimensione finita a base numerabile e sia $(S, \mathcal{O}_S)$ uno spazio di Stein. Dati i morfismi di spazi analitici $\varphi: X \to S$ e $\psi: Y \to S$, sia $X \times_S Y$ il prodotto fibrato di X e Y su S e siano π e τ le sue proiezioni canoniche su X e Y rispettivamente. Se $\mathcal{F}$ è un fascio analitico coerente su X e $\mathcal{G}$ un fascio analitico coerente su Y, poniamo $\mathcal{F}^* = \pi^* \mathcal{F}$, $\mathcal{G}^* = \tau^* \mathcal{G}$, $\mathcal{O}^* = \pi^* \mathcal{O}_X = \tau^* \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{X \times_S Y}$.

Considereremo sugli spazi vettoriali delle sezioni su un aperto (risp. dei germi di sezioni in un punto) di un fascio analitico coerente le topologie canoniche di spazi di Fréchet nucleari (risp. DFS nucleari).

DEFINIZIONE. I fasci $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ si dicono trasversali su S nel punto (x, y) di $X \times_S Y$ se risulta $\widehat{\mathrm{Tor}}_n^{\mathcal{O}_{S,s}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_y) = 0$ per ogni $n > 0$, ove $s = \varphi(x) = \psi(y)$. I fasci $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ si dicono trasversali su S se sono trasversali su S in ogni punto di $X \times_S Y$.

Prendendo ricoprimenti numerabili di X e Y costituiti da aperti speciali si costruiscono complessi di Čech per i fasci $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ che soddisfano alle condizioni del Teorema 2 e si dimostra il seguente

TEOREMA 3. *Se i fasci $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono trasversali su* S *e se gli spazi* $H^i(X, \mathcal{F})$ *e* $H^j(Y, \mathcal{G})$ *sono separati per ogni* $i, j \in \mathbf{N}$, *esiste una successione spettrale tale che*

$$E_2^{p,q} = \bigoplus_{i+j=q} \widehat{\mathrm{Tor}}_{-p}^{\mathcal{O}_S(S)}(H^i(X, \mathcal{F}), H^j(Y, \mathcal{G}))$$

$$E^n = H^n(X \times_S Y, \mathcal{F}^* \underset{\mathcal{O}^*}{\otimes} \mathcal{G}^*).$$

Concludiamo questa nota enunciando alcune conseguenze del Teorema 3.

COROLLARIO 1. *Se* $H^i(X, \mathcal{F})$ *e* $H^j(Y, \mathcal{G})$ *sono trasversali su* $\mathcal{O}_S(S)$ *per ogni* $i, j \in \mathbf{N}$, $(i, j) \neq (0, 0)$, *esiste un isomorfismo per ogni* $n \in \mathbf{N}$

$$\bigoplus_{i+j=n} H^i(X, \mathcal{F}) \underset{\mathcal{O}_S(S)}{\hat{\otimes}} H^j(Y, \mathcal{G}) \simeq H^n(X \times_S Y, \mathcal{F}^* \underset{\mathcal{O}^*}{\otimes} \mathcal{G}^*).$$

Osserviamo che, se si suppone che S sia ridotto a un punto e abbia $\mathbf{C}$ per fascio strutturale, le condizioni di trasversalità sono banalmente soddisfatte e si può ottenere la formula di Künneth per la coomologia a valori in un fascio analitico coerente [4].

COROLLARIO 2. *Se* $H^i(X, \mathcal{F})$ *e* $H^j(Y, \mathcal{G})$ *sono nulli per ogni* $i > 0$, $j > 0$, *allora*

i) $H^n(X \times_S Y, \mathcal{F}^* \underset{\mathcal{O}^*}{\otimes} \mathcal{G}^*) = 0$ *per ogni* $n > 0$;

ii) $\mathscr{F}(X)$ *e* $\mathscr{G}(Y)$ *sono trasversali su* $\mathscr{O}_S(S)$ *e* $\mathscr{F}^* \underset{\mathscr{O}^*}{\otimes} \mathscr{G}^*(X \times_S Y) =$
$= \mathscr{F}(X) \underset{\mathscr{O}_S(S)}{\hat{\otimes}} \mathscr{G}(Y)$.

Il corollario precedente si applica in particolare quando X e Y sono spazi di Stein come in [2].

Dal Teorema 3 segue ancora, quando $Y = S$ e $\psi = \mathrm{id}$, il seguente

COROLLARIO 3. *Esiste una successione spettrale tale che*

$$E_2^{p,q} = \widehat{\mathrm{Tor}}_{-p}^{\mathscr{O}_Y(Y)}(H^q(X, \mathscr{F}), \mathscr{G}(Y))$$

$$E^n = H^n(X, \mathscr{F} \underset{\mathscr{O}_X}{\otimes} \varphi^* \mathscr{G}).$$

Se, nel corollario precedente, si suppone anche $H^q(X, \mathscr{F}) = 0$ per ogni $q > 0$, allora risulta $H^n(X, \mathscr{F} \underset{\mathscr{O}_X}{\otimes} \varphi^* \mathscr{G}) = 0$ per ogni $n > 0$; inoltre $\mathscr{F}(X)$ e $\mathscr{G}(Y)$ sono trasversali su $\mathscr{O}_Y(Y)$ e $\mathscr{F} \underset{\mathscr{O}_X}{\otimes} \varphi^* \mathscr{G}(X) = \mathscr{F}(X) \underset{\mathscr{O}_Y(Y)}{\hat{\otimes}} \mathscr{G}(Y)$.

Per $\mathscr{F} = \mathscr{O}_X$ si ottiene d'altra parte una caratterizzazione della coomologia dell'immagine inversa.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. GROTHENDIECK (1954) – Exposé *24*, in «Séminaire Schwartz», Paris.

[2] J. HUBBARD (1974) – *Transversalité*, «Asterisque», *16*.

[3] M. JURCHESCU (1974) – *Faisceaux sur un espace localement compact*, «Rev. Roumaine Math. Pures Appl.», *19*, 3 329–352.

[4] L. KAUP (1967) – *Eine Künnethformel für Fréchetgarben*, «Math. Z.», *97*, 158–168.

[5] R. KIEHL e J. L. VERDIER (1971) – *Ein einfacher Beweis des Kohärenzsatzes von Grauert*, «Math. Ann.», *195*, 24–50.

[6] G. NARDELLI e A. TANCREDI (1975) – *Una formula di Künneth per la coomologia con supporti compatti a valori in un fascio analitico coerente*, «Bollettino U. M. I.», *12*, Suppl. fasc. 3, 413–422.