Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giuliana Gigante

Fibrati vettoriali con curvatura semidefinita e annullamento della coomologia

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **68** (1980), n.3, p. 188–190.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1980_8_68_3_188_0>

Geometria. — *Fibrati vettoriali con curvatura semidefinita e annullamento della coomologia.* Nota di GIULIANA GIGANTE, presentata (*) dal Corrisp. E. VESENTINI.

SUMMARY. — Given a compact Kähler manifold M and a holomorphic vector bundle F on M, with negative semi-definite curvature, a general cohomology theorem is established. The non-Kählerian case is discussed.

1 FIBRATI LINEARI OLOMORFI SU VARIETÀ DI KÄHLER

Sia M una varietà kähleriana compatta di dimensione $n > 0$ e sia F un fibrato lineare olomorfo su M. Sia $\Omega^p(F)$ il fascio dei germi delle p–forme olomorfe su M a coefficienti in F.

Un noto teorema di Kodaira dice che, se alla classe di Chern reale di F ($c_{\mathbf{R}}(F)$) appartiene una forma y la cui forma hermitiana associata è definita negativa in ogni punto di M (in simboli, $y < 0$), si annullano i gruppi di coomologia $H^q(M, \Omega^0(F))$ per $q \leq n-1$.

Questo risultato è stato generalizzato in due differenti direzioni.

In [1], Y. Akizuki e S. Nakano hanno dimostrato che, se $y < 0$, allora $H^q(M, \Omega^p(F)) = 0$ per $p + q \leq n - 1$.

In [7], E. Vesentini ha provato che se, in ogni punto di M la forma hermitiana associata ad y è semidefinita negativa (in simboli, $y \leq 0$) con rango r, cioè con almeno r autovalori negativi, allora

$$H^q(M, \Omega^0(F)) = 0 \quad \text{e} \quad H^0(M, \Omega(F)) = 0 \quad \text{per} \quad q \leq r - 1 .$$

Si è posta dunque la questione se un risultato analogo a quello di Akizuki–Nakano vale in questo caso.

Rispondiamo a tale questione ed enunciamo alcuni altri risultati, i cui dettagli dimostrativi appariranno in un lavoro attualmente in corso di stampa.

Utilizzando la disuguaglianza di Akizuki–Nakano ([3]) dimostriamo il

TEOREMA. *Se $y \leq 0$ con rango r in ogni punto di* M, *allora*

$$H^q(M, \Omega^p(F)) = 0 \quad \textit{per} \quad p + q \leq r - 1.$$

Come applicazione del suddetto teorema si ottiene la seguente generalizzazione del teorema di Lefschetz sulle sezioni iperpiane.

(*) Nella seduta dell'8 marzo 1980

Sia S una sottovarietà analitica non singolare di codimensione 1 nella varietà kähleriana compatta M. Il divisore S sia tale che $c_{\mathbf{R}}(S)$ contenga una forma $y \geq 0$ di rango r. Se ρ^* denota l'operatore di restrizione
$\rho_s^* : H^s(M, \mathbf{C}) \rightarrow H^s(S, \mathbf{C})$ allora

ρ_s^* è un isomorfismo per $s \leq r - 2$, e

ρ_{r-1}^* è iniettiva.

2. CASO GENERALE

Nel caso in cui M è una varietà hermitiana compatta, non necessariamente kähleriana, otteniamo risultati di annullamento per la coomologia di M a coefficienti non in F ma in potenze tensoriali di F.

L'ostacolo al risultato di annullamento della coomologia a coefficienti in F è determinato dal fatto che nel caso non kähleriano non vale la disuguaglianza di Akizuki–Nakano come si dimostra con il seguente esempio.

Sia $\mathbf{P}_2$ il piano proiettivo complesso e sia T il fibrato tangente olomorfo su $\mathbf{P}_2$. Sia PT il fibrato su $\mathbf{P}_2$ con fibra $\mathbf{P}_1$ costruito assegnando ad ogni punto x di $\mathbf{P}_2$ lo spazio proiettivo complesso dei sottospazi di dimensione 1 della fibra T_x di T e sia LT il fibrato lineare su PT ottenuto assegnando ad ogni punto di PT, che è una retta complessa in una fibra di T, la retta complessa stessa (per tale costruzione vedi ad esempio [5]). Si trova una metrica hermitiana, non di Kähler, su PT ed una metrica hermitiana sulle fibre di $(LT)^{-1}$ tali che la disuguaglianza di Akizuki–Nakano non è soddisfatta dalle $(0, 1)$ forme armoniche su PT a coefficienti in $(LT)^{-1}$.

Il seguente risultato di annullamento nel caso non kähleriano in parte già conosciuto (vedi [2], dove gli autori utilizzano risultati sulla q–convessità di F), si ottiene partendo dall'espressione locale dell'operatore di Laplace–Beltrami ed usando un lemma sulle forme hermitiane, dovuto a E. Calabi [4].

TEOREMA. *Sia* F *un fibrato lineare olomorfo su una varietà hermitiana compatta* M. *Sia* B *un fibrato vettoriale olomorfo su* M. *Se* $c_{\mathbf{R}}(F)$ *contiene una forma* y *la cui forma hermitiana associata ha almeno* $n - k_2$ *autovalori positivi e* k_1 *autovalori negativi in ogni punto di* M, *allora* $H^q(M, F^{\mu} \otimes B) = 0$ *per* $\mu \gg 0$, $q \neq k_1, \cdots, k_2$.

3. FIBRATI VETTORIALI OLOMORFI

I risultati di annullamento enunciati in 1 e 2 si generalizzano a fibrati vettoriali olomorfi e con fibra $\mathbf{C}^r (r > 1)$. Denotiamo con Θ il tensore di curvatura della metrica hermitiana h sulle fibre di E. Se M è di Kähler e se, per ogni $\zeta \in \mathbf{C}^r - \{0\}$ la forma quadratica nella variabile $\eta \in \mathbf{C}^n : \Theta(\zeta, \eta) = \Sigma \Theta^{\rho}_{\sigma i \bar{j}} \zeta^{\sigma} \bar{\zeta}^{\rho} \eta^i \bar{\eta}^{\zeta}$ è semidefinita positiva (risp. negativa) di rango k in ogni punto di M, allora

$$H^q(M, \Omega^p(E)) = 0 \qquad \text{se } p + q \geq 2n + r - k \quad (\text{risp. } p + q \leq k - r)$$

In generale, se M è una varietà hermitiana compatta e se per ogni $\zeta \in \mathbf{C}^r - \{0\}$ la forma $\Theta(\zeta, \eta)$ ha in ogni punto di M almeno $n - k_2$ autovalori positivi e k_1 autovalori negativi, allora per ogni fibrato vettoriale olomorfo B su M si ha: $H^q(M, S^\mu E \oplus B) = 0 \quad \mu \geqslant 0, q \neq k_1, \cdots, k_2$, dove $S^\mu E$ denota la μ-esima potenza tensoriale simmetrica di E.

Nel caso di semidefinitezza negativa in «senso forte» cioè $\Sigma \Theta^\rho_{\sigma i \bar{j}} \tau^\sigma_i \tau^\rho_j \leq 0$ per ogni $\tau_i \in \mathbf{C}^{nr}$, $\rho, \sigma = 1, 2, \cdots, r$; $i, j = 1, 2, \cdots, n$ in ogni punto di una varietà di Kähler M, si ottiene il seguente

LEMMA. *Se* φ *è una* $(0, p)$ — *o* $(p, 0)$ *forma armonica su* M *a coefficienti in* E *si ha* $\varphi \wedge \Theta = 0$.

Dalla suddetta condizione segue il

TEOREMA. *Se* Θ *è semidefinita negativa in senso forte di rango* k $(0 \leq k \leq nr)$ *in ogni punto di* M, *allora*

$$H^0(M, \Omega^p(E)) = 0 \quad e \quad H^p(M, \Omega^0(E)) = 0 \qquad per \quad p < k - (r-1)n .$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Y. AKIZUKI e S. NAKANO (1953) – *Note on Kodaira-Spencer's proof of Lefschetz theorems*, «Proc. Japan Acad.», *30*, 266–272.

[2] A. ANDREOTTI e H. GRAUERT (1962) – *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes*, «Bull. Soc. Math. France», *90*, 193–259.

[3] A. ANDREOTTI e E. VESENTINI (1961) – *Sopra un teorema di Kodaira*, «Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa», (3), 283–309.

[4] A. ANDREOTTI e E. VESENTINI (1965) – *Carleman estimates for the Laplace-Beltrami equation on complex manifolds*, «Institut. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.», *25*, 81–130.

[5] S. KOBAYASHI e T. OCHIAI (1970) – *On complex manifolds with positive tangent bundles*, «Journal of Math. Soc. of Japan», *22*, N. 4, 499–525.

[6] S. NAKANO (1955) – *On complex analytic vector bundles*, «Journal of Math. Soc. of Japan», 7, N. 1, 1–12.

[7] E. VESENTINI (1957) – *Osservazioni sulle strutture fibrate analitiche sopra una varietà kähleriana compatta*, «Rend. Acc. Naz. dei Lincei», (8), *23*, 232–241.