
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ENNIO DE GIORGI, ANTONIO MARINO, MARIO TOSQUES

**Problemi di evoluzione in spazi metrici e curve di
massima pendenza**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 68 (1980), n.3, p. 180–187.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1980_8_68_3_180_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi matematica — *Problemi di evoluzione in spazi metrici e curve di massima pendenza*. Nota di ENNIO DE GIORGI, ANTONIO MARINO e MARIO TOSQUES, presentata (*) dal Corrisp. E. DE GIORGI.

SUMMARY. — In this note a definition of "Maximal decreasing curve" is given, which extends the usual notion of solution of an evolution problem of the type, for example, of the heat equation.

This definition seems the right one in order to study many limit cases of evolution problems which have been settled only in the convex case.

INTRODUZIONE

Nello studio della Γ -convergenza e della G -convergenza ha grande interesse il collegamento fra la Γ -convergenza di funzionali e la convergenza delle soluzioni delle equazioni di evoluzione associate ad essi. Anzi i primi risultati sulla Γ -convergenza di funzionali quadratici di tipo ellittico furono ottenuti attraverso lo studio delle corrispondenti equazioni di evoluzione (cfr. [1]). Successivamente la teoria della Γ -convergenza ha avuto un notevole sviluppo e molti risultati sono stati ottenuti, ai quali non è stato possibile, fino ad ora, associare analoghe proposizioni riguardanti le equazioni di evoluzione (cfr. [2], [3], [4]). Ciò sembra dovuto, almeno in parte, alla mancanza di una nozione abbastanza generale di problema di evoluzione. Lo scopo di questo lavoro è appunto quello di cercare una impostazione opportuna di questo problema, studiando alcune possibili definizioni generalizzate di esso.

Per questo vengono anche studiate alcune proprietà delle soluzioni e vengono forniti alcuni teoremi di esistenza locale.

Le dimostrazioni saranno esposte, con uno studio più approfondito, in successivi lavori.

§ 1. *Curve di massima pendenza in spazi metrici.*

Nel seguito consideriamo uno spazio metrico X con metrica d ed una funzione $f: X \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ semicontinua inferiormente.

Vogliamo anzitutto associare ad ogni elemento u di X un numero di $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ che, nel caso in cui X sia $\mathbf{R}^n$ ed f sia differenziabile coincida con il modulo del gradiente di f in u .

(*) Nella seduta dell'8 marzo 1980.

DEFINIZIONE 1.1. Sia u di X tale che $f(u) < +\infty$. Diciamo « pendenza discendente di f in u » il numero

$$|\nabla f|_u = \begin{cases} \max \left\{ 0, \max_{v \rightarrow u} \lim \frac{f(u) - f(v)}{d(u, v)} \right\} & \text{se } u \text{ non è isolato in } X \\ 0 & \text{se } u \text{ è isolato in } X. \end{cases}$$

Vogliamo ora considerare una curva in X , che nel caso in cui X sia $\mathbf{R}^n$ ed f sia differenziabile, coincida con la soluzione dell'equazione

$$U' = -\operatorname{grad} f(U)$$

DEFINIZIONE 1.2. Sia I un intervallo contenuto in $\mathbf{R}$ aperto a destra. Diciamo che una curva $U: I \rightarrow X$ è una « curva di massima pendenza puntuale (discendente) per f » se

a) U è continua

b) $f \circ U$ è monotona non crescente ed $f \circ U(t) < +\infty$ se $t \in I$,
 $t > \inf I$

c) $\max_{\tau \rightarrow 0^+} \lim_{\tau} \frac{d(U(t+\tau), U(t))}{\tau} \leq |\nabla f|_U(t)$ se $t \in I$
con $f \circ U(t) < +\infty$

d) $\max_{\tau \rightarrow 0^+} \lim_{\tau} \frac{f \circ U(t+\tau) - f \circ U(t)}{\tau} \leq -(|\nabla f|_U(t))^2$ se $t \in I$
con $f \circ U(t) < +\infty$.

Consideriamo ora un altro tipo di curva che si evolve sul grafico di f seguendo, in certo senso, la direzione di massima decrescenza di f . Vedremo, infatti, che per l'esistenza di tali curve sono necessarie in generale condizioni meno restrittive di quelle che occorrono per l'esistenza di curve di massima pendenza per f .

DEFINIZIONE 1.3. Indichiamo con $\mathcal{G}_f: X \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ la funzione così definita:

$$\mathcal{G}_f(v, r) = \begin{cases} r & \text{se } r \geq f(v) \\ +\infty & \text{se } r < f(v). \end{cases}$$

In $X \times \mathbf{R}$ consideriamo la metrica $\delta((v_1, r_1), (v_2, r_2)) = \{d(v_1, v_2)^2 + (r_1 - r_2)^2\}^{\frac{1}{2}}$.

Osserviamo che una curva di massima pendenza puntuale per $\mathcal{G}_f$ in $X \times \mathbf{R}$ è in ogni caso lipschitziana di costante 1.

TEOREMA 1.4. *Sia $U: I \rightarrow X$ una curva di massima pendenza puntuale per f , assolutamente continua e tale che $f \circ U$ sia finita in I .*

Allora esiste un intervallo J aperto a destra ed esiste $\psi: J \rightarrow I$ non decrescente, surgettiva e tale che, posto

$$V(s) = U \circ \psi(s) \quad , \quad R(s) = \psi(s) - s + f \circ U(t_0)$$

la curva (V, R) sia di massima pendenza puntuale per $\mathcal{G}_f$ ed $f \circ V$ sia monotona non crescente. Inoltre se $f \circ V$ è continua $R = f \circ V$.

TEOREMA 1.5. *Sia J un intervallo aperto a destra e sia $(V, R): J \rightarrow X \times \mathbf{R}$ una curva di massima pendenza puntuale per $\mathcal{G}_f$, tale che $f \circ V$ sia monotona non crescente e $R(s) = f \circ V(s)$ per almeno un s di J .*

Allora esiste un intervallo I aperto a destra ed esiste $\phi: I \rightarrow J$ strettamente crescente, tale che la curva $U = V \circ \phi$ sia di massima pendenza puntuale per f e assolutamente continua ed $f \circ U$ sia finita in I . Inoltre se $f \circ V = R$ allora $f \circ U$ è continua.

Osserviamo che se (V, R) è di massima pendenza puntuale per $\mathcal{G}_f$ allora la non crescenza di $f \circ V$ è equivalente alla proprietà:

Se, per s_0 , $R(s_0) > f \circ V(s_0)$, allora:

$$V(s) = V(s_0), \quad R(s) = R(s_0) - (s - s_0) \quad \text{in un intorno di } s_0.$$

È anche molto utile la seguente nuova definizione.

DEFINIZIONE 1.6. *Sia I un intervallo di $\mathbf{R}$, con parte interna non vuota. Diciamo che una curva $U: I \rightarrow X$ è una « curva di massima pendenza (discendente) in media per f » se:*

- a) U è continua
- b) $f \circ U(t) < +\infty$ se $t \in I$ con $t > \inf I$
- c) $d(U(t_2), U(t_1)) \leq \int_{t_1}^{t_2} |\nabla f| U(\tau) d\tau$ se $t_1 < t_2$ in I
- d) $f \circ U(t_2) - f \circ U(t_1) \leq - \int_{t_1}^{t_2} (|\nabla f| U(\tau))^2 d\tau$ se $t_1 < t_2$ in I .

Con i Teoremi (1.7) ed (1.8) confrontiamo ora le definizioni (1.1) ed (1.6).

TEOREMA 1.7. *Sia $U: I \rightarrow X$ una curva in X . U è di massima pendenza in media per f se e solo se*

- a) U è continua ed inoltre è assolutamente continua in $\{t \mid t \in I, t > \inf I\}$
- b) $f \circ U$ è monotona non crescente ed $f \circ U(t) < +\infty$ se $t > \inf I$

$$c) \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{d(U(t+\tau), U(t))}{\tau} = |\nabla f| U(t) \text{ per quasi ogni } t \text{ di } I$$

$$d) \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{f \circ U(t+\tau) - f \circ U(t)}{\tau} = -(|\nabla f| U(t))^2 \text{ per quasi ogni } t \text{ di } I.$$

TEOREMA 1.8. Se U è di massima pendenza puntuale ed assolutamente continua essa è di massima pendenza in media.

Se U è una curva di massima pendenza in media per f e se $|\nabla f| U(t)$ è semicontinua inferiormente allora U è di massima pendenza puntuale per f .

§ 2. Alcune proprietà generali.

TEOREMA 2.1. (Composizione con funzioni monotone).

Sia $U: I \rightarrow X$ una curva di massima pendenza in media per f . Sia $\gamma: J \rightarrow \mathbf{R}$ non decrescente definita nell'intervallo J aperto a sinistra contenente $f \circ U(I)$. Supponiamo che

$$(2.2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(D^- \gamma)(f \circ U(t))} \text{ sia integrabile su ogni } [a, b] \text{ contenuto in } I \\ (D^- \gamma)(f \circ U(t)) \text{ sia diversa da } +\infty \text{ per almeno un } t \text{ di } I. \end{array} \right.$$

Allora esiste $\phi: I_1 \rightarrow I$ crescente tale che $U_1 = U \circ \phi$ sia una curva di massima pendenza in media per $\gamma \circ f$. Inoltre U_1 e U hanno la stessa immagine. (Si è indicato con $(D^- \gamma)(x)$, la derivata superiore sinistra di γ in x di J).

Osserviamo che le ipotesi (2.2) sono verificate se vale uno dei seguenti fatti

- a) γ lipschitziana e $0 < c_1 \leq \gamma' \leq c_2$ per opportune costanti c_1 e c_2
- b) $\frac{1}{\gamma'}$ integrabile sui compatti di J e $|\nabla f| U(t) \geq c > 0$.

TEOREMA 2.3. (Criterio di continuità e monotonia di $f \circ V$).

Supponiamo che f soddisfi alla seguente ipotesi:

$$(2.4) \left\{ \begin{array}{l} \text{per ogni } u_0 \text{ di } X \text{ esiste un suo intorno } U \text{ ed esiste } R(\cdot, u_0): U \rightarrow \mathbf{R} \\ \text{tale che} \\ f(u_0) \geq f(u) - (|\nabla f| u) d(u, u_0) - R(u, u_0) \text{ se } u \in U \\ \text{con } f(u) < +\infty \\ \text{ed il } \lim_{u \rightarrow u_0} R(u, u_0) = 0 \end{array} \right.$$

Allora se (V, R) è di massima pendenza puntuale per $\mathcal{G}_f$ e se $R(s_0) = f \circ V(s_0)$ si ha che $R(s) = f \circ V(s)$ se $s \in J \cap [s_0, +\infty[$.

Notiamo che tutte le funzioni continue in X soddisfano la (2.4).

Se poi X è uno spazio di Hilbert ed f ad esempio è convessa la (2.4) è ancora verificata.

TEOREMA 2.5. (*Criterio di pendenza finita lungo la traiettoria*).

Supponiamo che f soddisfi alle seguenti ipotesi:

per ogni u_0 di X con $f(u_0) < +\infty$, esistono $\delta > 0$ e $\omega: [0, 2\delta] \rightarrow \mathbf{R}$ non decrescente, continua con le proprietà

$$(2.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(v) \geq f(u) - (|\nabla f| u) d(u, v) - \omega(d(u, v)) d(u, v) \\ \text{se } u, v \in B(u_0, \delta) \quad \text{e } f(u) < +\infty, \\ \frac{\omega(\sigma)}{\sigma} \text{ è integrabile in } [0, \delta]. \end{array} \right.$$

Allora, se $(V, R): [\alpha, \beta[\rightarrow X \times \mathbf{R}$ è di massima pendenza per $\mathcal{G}_f$ e se $R(\alpha) = f \circ V(\alpha)$, si ha:

a) $R = f \circ V$

b) $|\nabla f| V(s)$ è limitata su ogni $[a, b] \subset]\alpha, \beta[$

c) $\lim_{s \rightarrow s_0^+} |\nabla f| V(s) = |\nabla f| V(s_0)$ per ogni s_0 di $]\alpha, \beta[$

d) $\max_{\sigma \rightarrow 0^-} \lim_{\sigma \rightarrow 0^-} \frac{f \circ V(s_0 + \sigma) - f \circ V(s_0)}{\sigma} \leq (f \circ V)'_+(s_0)$ se $s_0 \in]\alpha, \beta[$.

Osserviamo che le ipotesi (2.6) sono certamente verificate se X ad esempio è di Hilbert ed f è la somma di una funzione convessa e di una funzione di classe $\mathcal{C}^{1,\alpha}(X)$ ($\alpha > 0$).

§ 3. Teoremi di esistenza.

Consideriamo ora alcune condizioni sufficienti ad assicurare l'esistenza di una curva di massima pendenza in media per $\mathcal{G}_f$ o per f .

TEOREMA 3.1. (*Esistenza*).

Supponiamo che:

a) la restrizione di f a $\{u \mid f(u) < +\infty\}$ sia continua

b) f sia «localmente coerciva» cioè:

per ogni $\rho > 0$, per ogni c reale e per ogni u di X con $f(u) < +\infty$, $B(u, \rho) \cap \{v \mid f(v) \leq c, v \in X\}$ sia compatto.

c) per ogni u di X con $f(u) < +\infty$, il

$$\min_{\substack{v \rightarrow u \\ f(v) \leq f(u)}} |\nabla f| v \geq |\nabla f| u.$$

Allora per ogni u_0 di X con $f(u_0) < +\infty$ esiste $U: [0, T[\rightarrow X$ di massima pendenza in media per f tale che $U(0) = u_0$.

Diamo ora un teorema di esistenza applicabile ad una larga categoria di funzioni non necessariamente continue e contenente ad esempio la somma di funzioni convesse e di funzioni di classe $\mathcal{C}^1$.

TEOREMA 3.2. (*Esistenza*).

Supponiamo che f abbia le seguenti proprietà

a) f sia localmente coerciva

b) per ogni u_0 di X con $f(u_0) < +\infty$, esistono un intorno U di u_0 ed $\omega: U \times U \rightarrow \mathbf{R}$ continua tali che $f(v) \geq f(u) - (|\nabla f| u + \omega(u, v)) d(u, v)$ se $u, v \in U$ e $f(u) < +\infty$ $\omega(u, u) = 0$.

Allora per ogni u_0 di X con $f(u_0) < +\infty$ esiste una curva $U: [0, T[\rightarrow X$ di massima pendenza puntuale per f , assolutamente continua tale che $U(0) = u_0$ ed $f \circ U$ sia continua.

§ 4. Equazioni di evoluzione in spazi di Banach.

Diamo ora alcuni teoremi relativi alle curve di massima pendenza in media in spazi di Banach.

Nella nozione di curva di massima pendenza rientrano le curve considerate da vari autori come soluzioni di alcuni tipi di equazioni di evoluzione (ad esempio cfr [5]) e la definizione di sottodifferenziale e di gradiente di cui ci serviamo comprendono quelle da essi usate.

Sia X uno spazio di Banach sul corpo reale uniformemente convesso con norma differenziabile e tale che la norma duale di X' sia strettamente convessa.

Ricordiamo, infine, che consideriamo funzioni $f: X \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ semicontinue inferiormente.

DEFINIZIONE 4.1. Sia u in X con $f(u) < +\infty$. Diciamo che f è sottodifferenziabile in u se esiste un α in X' tale che

$$\min_{v \rightarrow u} \lim \frac{f(v) - f(u) - \langle \alpha, v - u \rangle}{\|v - u\|} \geq 0.$$

Diciamo sottodifferenziabile di f in u , l'insieme di tali α e lo denominiamo con $\partial^- f(u)$.

Se $\partial_0^- f(u)$ è l'elemento di minima norma di $\partial^- f(u)$, diciamo gradiente di f in u il vettore $\text{grad} f(u)$ definito dalle proprietà

$$\langle \partial_0^- f, \text{grad} f(u) \rangle = \|\partial_0^- f(u)\|^2, \quad \|\text{grad} f(u)\| = \|\partial_0^- f(u)\|$$

inoltre conveniamo che $\|\text{grad} f(u)\| = +\infty$ se $\partial^- f(u) = \emptyset$.

DEFINIZIONE 4.2. Diciamo che f appartiene alla classe $\mathcal{K}(X)$ se per ogni u_0 di X con $f(u_0) < +\infty$, esistono un intorno U di u_0 ed una funzione continua $\omega: U \times U \rightarrow \mathbf{R}$ tali che

$$f(v) \geq f(u) + \langle \alpha, v - u \rangle - \omega(u, v) \|v - u\|$$

se $u, v \in U$ con $f(u) < +\infty$ e se $\alpha \in \partial^- f(u)$ ed $\omega(u, u) = 0$.

OSSERVAZIONE 4.3. Sia f debolmente semicontinua inferiormente. Considerate le seguenti proposizioni:

- $\alpha)$ $f \in \mathcal{K}(X)$
- $\beta)$ $\|\text{grad } f(u)\|$ è semicontinua inferiormente in $\{u \mid f(u) < +\infty\}$
- $\gamma)$ $|\nabla f| u = \|\text{grad } f(u)\|$ per ogni u con $f(u) < +\infty$

allora $\alpha) \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma)$.

OSSERVAZIONE 4.4. Se $U: I \rightarrow X$ è di massima pendenza puntuale od in media per f e se vale la $\gamma)$ allora si ha che:

$$(4.5) \quad U'_+(t) = -\text{grad } f(U(t)) \quad , \quad (f \circ U(t))'_+ = -\|\text{grad } f(U(t))\|^2$$

per quasi ogni t di I .

TEOREMA 4.6. (Esistenza).

Supponiamo che:

- $a)$ f sia localmente coerciva
- $b)$ $f \in \mathcal{K}(X)$

Allora per ogni u_0 di X con $f(u_0) < +\infty$, esiste $U: [0, T[\rightarrow X$ ($T > 0$) di massima pendenza puntuale per f , assolutamente continua con $U(0) = u_0$ e tale che per quasi ogni t esistono $U'_+(t)$, $\text{grad } f(U(t))$ e per tali t valgono le (4.5).

Infine nel caso in cui X abbia dimensione finita le (4.5) valgono in tutto $[0, T[$.

TEOREMA 4.7. (Composizione con funzioni monotone).

Supponiamo che f soddisfi alle $a)$ e $b)$ di (4.6). Se $u_0 \in X$ e $f(u_0) < +\infty$, sia J un intervallo aperto a sinistra contenente $f(u_0)$ e sia $\gamma: J \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione non decrescente con $\frac{1}{\gamma'}$ integrabile su J . Inoltre 0 non appartenga a $\partial^- f(u_0)$.

Allora esiste una $U: [0, T[\rightarrow X$ ($T > 0$) assolutamente continua tale che per quasi ogni t esistono $U'_+(t)$ e $\text{grad } (\gamma \circ f)(U(t))$ e si ha:

$$U'_+(t) = -\text{grad } (\gamma \circ f)(U(t)) \quad \text{per quasi ogni } t \text{ di } [0, T[$$

$$U(0) = u_0$$

$$(\gamma \circ f \circ U)'_+(t) = -\|\text{grad } (\gamma \circ f)(U(t))\|^2 \quad \text{per quasi ogni } t \text{ di } [0, T[.$$

In particolare U è di massima pendenza in media per $\gamma \circ f$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. SPAGNOLO (1968) - *Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche*. « Ann. Scu. Norm. », Pisa, 22, 577-597.
- [2] L. MODICA e S. MORTOLA (1977) - *Il limite nella Γ -convergenza di una famiglia di funzionali ellittici*. « Boll. Un. Mat. Ital. », (5) 14-A, 526-529.
- [3] G. BUTTAZZO e G. DAL MASO (1978) - *Γ -limit of a sequence of non-convex and non-equi-Lipschitz integral functionals*. « Ricerche di Matematica », 27, 235-251.
- [4] A. AMBROSETTI e C. SBORDONE (1976) - *Γ -convergenza e G -convergenza per problemi non lineari di tipo ellittico*. « Boll. Un. Mat. Ital. », (5) 15-A, 352-362.
- [5] H. BREZIS - *"Opérateurs Maximaux Monotones"*. « Notes de Matematica », (50), North-Holland.