Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Francesco Lacava

Sulla classe delle Ł-algebre esistenzialmente chiuse

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **68** (1980), n.3, p. 169–172.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1980_8_68_3_169_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1980.

Logica matematica. — *Sulla classe delle Ł–algebre esistenzialmente chiuse.* Nota di FRANCESCO LACAVA (*), presentata (**) dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — In this paper some properties of the class of existentially closed Ł-algebras are studied.

In [3] è stato dimostrato che la classe delle Ł–algebre esistenzialmente chiuse non è assiomatizzabile. Nel presente lavoro vengono studiate alcune sottoclassi della classe delle Ł–algebre esistenzialmente chiuse. In particolare si dimostra che le classe delle Ł–algebre infinitamente generiche (F–generiche) e delle Ł–algebre finitamente generiche (f–generiche) sono disgiunte.

Per le proprietà elementari delle Ł–algebre e per le notazioni qui usate rinviamo il lettore a [4]; per le questioni generali di teoria dei modelli può invece consultare [1] o [2].

DEFINIZIONE 1. Una Ł–algebra $\mathcal{A}$ si dice *completamente archimedea* se, per ogni $x \in \mathrm{B} \supseteq \mathrm{A}$ tale che la Ł–algebra generata da x è una Ł–catena archimedea, $\mathcal{A}(x)$, cioè l'estensione di A mediante x, è ancora archimedea.

PROPOSIZIONE 1. *Sia* $x \in \mathrm{A}$ *e sia* $\mathcal{A} \hookrightarrow \Pi \mathrm{C}_i$ *con* C_i *Ł–catene. Allora* x *genera una Ł–catena se e solo se* x *o* x' *appartiene a* $\cap \mathcal{I}_{\mathrm{A}}$ *oppure* $x(i) = t$ *con* $t \in \mathbf{R}_1$ *per ogni* i.

Dimostrazione. Vedi [4] e [6].

PROPOSIZIONE 2. *Sia* $\mathcal{A} \hookrightarrow \Pi \mathrm{C}_i$ *una Ł–algebra.* $\mathcal{A}$ *è completamente archimedea se e solo se* $\mathcal{A}$ *è archimedea e per ogni* $x \in \mathcal{A}$ $|\mathrm{R}(x)| < \aleph_0$ (1).

Indichiamo con $\mathrm{A}_{Ł}$ la classe delle Ł–algebre completamente archimedee.

Sia T la teoria nel linguaggio delle Ł–algebre generata dai seguenti assiomi:

1) $\exists x\,((n - 1)\,x = x')$

2) $\forall x\ \exists y\,(ny = x)$ per ogni $n > 1$

3) $\forall x\,(x > 0 \wedge 2\,x = x \rightarrow \exists y\,(2\,y = y \wedge 0 < y < x))$.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1980.

(1) Indichiamo con $\mathrm{R}(x)$ il codominio di x.

LEMMA 1. *Sia* $\mathscr{A} \in A_Ł \cap \mathrm{Mod}(T)$ *e sia* $\mathscr{A} \hookrightarrow \Pi C_i$. *Fissato* $c \in C_i$ *per ogni* $x \in A$ *esiste* $y_x^c \in B_A$ *tale che*:

$$y_x^c(i) = \begin{cases} 0 & se \quad x(i) \neq c \\ 1 & altrimenti\,. \end{cases}$$

Dimostrazione. Possiamo supporre, senza perdere di generalità, $C_i = \mathbf{R}_1$ per ogni i (vedi [6]). Sia $x \in A$. Poiché $|R(x)| < \aleph_0$ possiamo considerare $z = \min\{t \in R(x) : t > c\}$. Sia $c < m/n < z$ cioè $(m/n)' + z = 1$ e $(m/n)' + c \neq 1$. Sia s un intero positivo tale che $s[x + (\bar{m}/n)']' \in B_A$. Posto $a_x^c = [s(x + (\bar{m}/n)')']'$ si ha:

$$a_x^c(i) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x(i) > c \\ 0 & \text{se} \quad x(i) \leq c\,. \end{cases}$$

Allora $(a_x^c + a_{x'}^c)'$ è l'elemento cercato.

LEMMA 2. *Sia* $\mathscr{A} \in A_Ł \cap \mathrm{Mod}(T)$, *sia* $b \in B_A$ *e sia* $C_b = \{c \in \mathbf{R}_1 :$ *esiste* $x \in A$ *tale che* $y_x^c \geq b\}$. *Allora* C_b *è una Ł–catena esistenzialmente chiusa nella classe delle Ł–catene.*

Dimostrazione. Immediata dalla assiomatizzazione della teoria delle Ł–catene esistenzialmente chiuse fornita in [5].

LEMMA 3. *Sia* $\mathscr{A} \in A_Ł \cap \mathrm{Mod}(T)$. *Sia* $x \in A$ *e* $b \in B_A$ *con* $b \leq y_x^c$, $c \in \mathbf{R}_1$. *Allora esiste* $z \in A$ *tale che* $y_z^c = b$ *e* $y_z^c = b'$.

Dimostrazione. Basta porre $z = (x' + b')'$.

Indichiamo con $\mathscr{E}_Ł$ la classe delle Ł–algebre esistenzialmente chiuse.

TEOREMA 1. $\mathscr{A} \in A_Ł \cap \mathscr{E}_Ł$ *se e solo se* $\mathscr{A} \in A_Ł \cap \mathrm{Mod}(T)$.

Dimostrazione. Sia $\exists\bar{x}\,\varphi(\bar{x}; a_1, \cdots, a_n)$ una formula esistenziale a parametri in $\mathscr{A}$ soddisfatta in una estensione di $\mathscr{A}$. Possiamo supporre, senza perdere di generalità, che $\varphi(\bar{x}; a_1, \cdots, a_n)$ sia della forma:

$$t_0(\bar{x}; a_1, \cdots a_n) = 0 \wedge t_1(\bar{x}; a_1, \cdots, a_n) \neq 0 \wedge \cdots \wedge t_k(\bar{x}; a_1, \cdots, a_n) \neq 0\,.$$

Poichè $\mathscr{A} \in A_Ł$ allora $\mathscr{A} \hookrightarrow \mathbf{R}_1^I$. Definiamo in I la seguente relazione di equivalenza:

$$i \sim j \qquad \text{se e solo se} \quad (a_1(i), \cdots, a_n(i)) = (a_1(j), \cdots, a_n(j))$$

e indichiamo con $I_1, \cdots, I_s$ le classi di equivalenza.

Sia C_h la Ł–catena divisibile (vedi [5]) generata da $\{a_1(i), \cdots, a_n(i)\}$ con $i \in I_h$, $h = 1, \cdots, s$.

Sia α la seguente formula a parametri in $\mathbf{R}_1$:

$$\exists \bar{x}_{11} \cdots \exists \bar{x}_{ks} \bigwedge_{j=1}^{k} \left(\bigwedge_{i=1}^{s} t_0 (\bar{x}_{ji} ; a_1 (i) , \cdots , a_n (i)) = 0 \wedge \right.$$

$$\left. \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{s} t_j (\bar{x}_{ji} ; a_1 (i) , \cdots , a_n (i)) \neq 0 \right) \right) .$$

Per le ipotesi fatte α è vera in $\mathbf{R}_1$, quindi per ogni j, $1 \leq j \leq k$, esiste un $r = r(j)$, $1 \leq r(j) \leq s$ tale che la formula:

$$\exists \bar{x} \, (t_0 (\bar{x} ; a_1 (r (j)) , \cdots , a_n (r (j))) = 0 \wedge t_j (\bar{x} ; a_1 (r (j)) , \cdots , a_n (r (j))) \neq 0)$$

è vera in $\mathbf{R}_1$ e quindi in $C_{r(j)}$. Indichiamo con $\bar{b}_{r(j)}$ l'elemento di $C_{r(j)}$ che soddisfa la formula. Per ogni altro i diverso da $\{r(j)\}_{j=1,\cdots,k}$ la formula $\exists \bar{x} \, (t_0 (\bar{x} ; a_1 (i) , \cdots , a_n (i) = 0)$ è vera in $\mathbf{R}_1$ e quindi in C_i; indichiamo con $\bar{b}_i$ tale soluzione in C_i.

Consideriamo ora l'elemento $\bar{c} \in \mathbf{R}_1^{\mathrm{I}}$ tale che:

$$\bar{c} (\mathrm{I}_n) = \begin{cases} \bar{b}_{r(j)} & \text{se} \quad r(j) = h \\ \bar{b}_i & \text{con} \quad i \in \mathrm{I}_h \quad \text{altrimenti} . \end{cases}$$

Per i lemmi precedenti $\bar{c} \in \mathrm{A}$ e chiaramente soddisfa $\exists \bar{x} \, \varphi (\bar{x} ; a_1 , \cdots , a_n)$.

Il viceversa è immediato.

2. Indichiamo adesso con $\mathscr{G}_{Ł}$ e $\mathscr{F}_{Ł}$ rispettivamente le sottoclassi di $\mathscr{E}_{Ł}$ delle Ł–algebre F–generiche e delle Ł–algebre f–generiche. Sia ψ la seguente formula:

$$\forall x \, \exists y \, (y = 2 y \wedge y \leq x \wedge \forall z \, ((z = 2 z \wedge z \leq x) \rightarrow z \leq y)) .$$

Allora si ha il seguente:

LEMMA 4. *Se $\mathscr{A}$ è una Ł–algebra archimedea allora $\mathscr{A} \models \psi$.*

Dimostrazione. Sia $x \in \mathrm{A}$. Poichè $\mathscr{A}$ è archimedea esiste $n > 0$ tale che $nx' \in \mathrm{B_A}$. Posto $y = (nx')'$ si ha che $(nx')' \leq x$ e preso $z \in \mathrm{B_A}$ con $z \leq x$ si ha $z' \geq x'$, quindi $z' \geq nx'$, cioè $z \leq (nx')'$.

PROPOSIZIONE 3. *Sia $\mathscr{A}$ una Ł–algebra esistenzialmente chiusa non archimedea. Allora $\mathscr{A} \not\models \psi$.*

Dimostrazione. Sia x un elemento di A non archimedeo e supponiamo per assurdo che esista $b \in \mathrm{B_A}$ con $b < x'$ e massimo rispetto a tale condizione. Sia I_x l'Ł–ideale generato da x e sia $f : \mathscr{A} \rightarrow \mathscr{A}/\mathrm{I}_x$ l'omomorfismo naturale. Consideriamo ora la Ł–algebra $\mathrm{B} = \mathscr{A} \times \mathscr{A}/\mathrm{I}_x$ e sia $j : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ definita da $j(y) = (y , f(y))$. j è chiaramente una immersione di $\mathscr{A}$ in $\mathscr{B}$. Sia ora γ la formula esistenziale a parametri in A:

$$\exists y \, (y \leq x' \wedge y = 2 y \wedge y > b) .$$

Tale formula non è soddisfatta in $\mathscr{A}$ per la definizione stessa di b. Mostriamo che l'elemento $(b, 1) \in B$ soddisfa γ. Infatti: $(b, 1) \leq j(x') = (x', f(x')) = (x', 1)$; ovviamente $2(b, 1) = (b, 1)$. Facciamo vedere che $(b, 1) > j(b) = (b, f(b))$. A tale scopo basta far vedere che $f(b) < 1$. Supponiamo $f(b) = 1$. Allora $b' \in I_x$ cioè $b' < nx$. D'altra parte $b < x'$ cioè $b' > x$ quindi $b' > nx$, assurdo. Quindi γ è soddisfatta in $\mathscr{B}$ da $(b, 1)$ e quindi $\mathscr{A}$ non è esistenzialmente chiusa contro l'ipotesi.

LEMMA 5. *Sia* $\mathscr{A} \in \mathscr{G}_Ł$. *Allora* $\mathscr{A}$ *è non archimedea.*

Dimostrazione. Sia $\mathscr{A}$ archimedea e sia $\mathscr{B}$ una estensione di $\mathscr{A}$ non archimedea. Sia $C \in \mathscr{G}_Ł$ e $\mathscr{B} \rightarrowtail C$. Allora $\mathscr{A} \prec C$, ma ciò è assurdo perchè, per il Lemma 4, $\mathscr{A} \models \psi$ mentre, per la Proposizione 3, $C \not\models \psi$.

LEMMA 6. *Sia* $\mathscr{A} \in \mathscr{F}_Ł$. *Allora* $\mathscr{A}$ *è archimedea.*

Dimostrazione. Sia C una condizione che forza $\neg\psi(a) = \neg\exists y (y = 2y \wedge y \leq a \wedge \forall z((z = 2z \wedge z \leq a) \rightarrow z \leq y))$. Mostriamo che $C \cup \{(n+1)a = na\}$ per n opportuno è ancora una condizione.

Sia $\varphi(a_1, \cdots, a_m)$ la congiunzione delle formule che compaiono in C, con $a_1, \cdots, a_m \in A$. Consideriamo la formula $\exists x_1 \cdots, \exists x_m \varphi(a_1, \cdots, x_m)$. Chiaramente $\mathscr{A} \models \exists x_1, \cdots, \exists x_m \varphi(x_1, \cdots, x_m)$ e quindi (vedi [3]) $Ł_\omega \models \exists x_1 \cdots \cdots \exists x_m \varphi(x_1, \cdots, x_m)$, cioè esiste un intero positivo n tale che $C \cup \{(n+1) a = na\}$ è ancora una condizione e quindi $\mathscr{A}$ forza ψ. Allora $\mathscr{A}$ è archimedea per la Proposizione 3.

TEOREMA 2. $\mathscr{F}_Ł \cap \mathscr{G}_Ł = \varnothing$.

Dimostrazione. Immediata dai Lemmi 5 e 6.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. CHERLIN (1976) - *Model theoretic algebra. Selected topics*, « Springer Verlag », New York.

[2] J. HIRSCHFELD e W. WHEELER (1975) - *Forcing, arithmetic, division rings*, « Springer Verlag », New York.

[3] F. LACAVA (1979) - *Alcune proprietà delle Ł-algebre e delle Ł-algebre esistenzialmente chiuse*, « B.U.M.I. », (5) *16-A*, 360-366.

[4] F. LACAVA - *Sulla struttura delle Ł-algebre*, in corso di stampa su « Atti della Accademia Nazionale dei Lincei ».

[5] F. LACAVA e D. SAELI (1977) - *Sul model-completamento della teoria delle Ł-catene*, « B.U.M.I. », (5) *14-A*, 107-110.

[6] P. MANGANI (1973) - *Su certe algebre connesse con logiche a più valori*, « B.U.M.I. », (4) *8*, 68-78.