Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Valter Roselli

Moduli fortemente quasi iniettivi e SISI anelli

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **68** (1980), n.2, p. 99–105.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1980_8_68_2_99_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1980.

Algebra. — *Moduli fortemente quasi iniettivi e SISI anelli.* Nota di VALTER ROSELLI, presentata (*) dal Corrisp. I. BARSOTTI.

SUMMARY. — We characterize all modules strongly quasi-injective with commutative endomorphism ring over a given commutative ring R and study in particular the case in which R is a SISI ring.

INTRODUZIONE

Sia R un anello commutativo. La nozione di R–modulo fortemente quasi iniettivo con anello degli endomorfismi commutativo (in breve f.q.i.c.) è stata introdotta da C. Menini e A. Orsatti in [2] in relazione allo studio di una dualità Δ_k di tipo Pontryagin tra le categorie degli **R**–moduli K–discreti e K–compatti, dove K è l'R–modulo che funge da codominio dei caratteri ed **R** è il completamento di Hausdorff di R nella K–topologia.

Nel presente lavoro si determinano tutti i moduli f.q.i.c. sopra un dato anello commutativo R seguendo un suggerimento di L. Fuchs. Il risultato principale è il seguente:

Il cogeneratore minimale U di Mod–R contiene un unico sottomodulo f.q.i.c. $\hat{K}$ tale che gli R–moduli f.q.i.c. sono tutti e soli i sottomoduli di $\hat{K}$. Inoltre $\hat{K} = U$ se e solo se R è un SISI anello. Si dimostra quindi che se K è un R–modulo f.q.i.c. la categoria $\mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(K)$ dei moduli K–discreti coincide con Mod–R se e solo se R è un SISI anello completo nella K–topologia e K è il cogeneratore minimale U di Mod–R. In tal caso R ha solo un numero finito di ideali massimali e possiede una dualità di Morita con se stesso subordinata dalla dualità Δ_k.

I risultati del § 2 sono stati ottenuti dall'autore nella tesi di laurea.

§ 1. PREMESSE

1.1. Siano R un anello commutativo con $1 \neq 0$ e K un R–modulo. Dotiamo R della *K–topologia* assumendo come base di intorni di zero gli annullatori in R dei sottoinsiemi finiti di K. Denotiamo con $\mathfrak{F}$ il filtro degli ideali aperti di R, con **R** il completamento di Hausdorff di R e con $\tilde{\mathfrak{F}}$ il filtro degli ideali aperti di **R**. K è in modo naturale un **R**–modulo fedele e la K–topologia di **R** coincide con la topologia del completamento ([2], Proposizione 1.1).

(*) Nella seduta del 9 febbraio 1980.

Se M è un R–modulo indichiamo con $t_{\mathfrak{F}}(\mathrm{M})$ il sottomodulo di $\mathfrak{F}$–torsione di M, cioè

$$t_{\mathfrak{F}}(\mathrm{M}) = \{x \in \mathrm{M} : \mathrm{Ann}_{\mathrm{R}}(x) \in \mathfrak{F}\} .$$

1.2. Indichiamo con LT**R** la categoria dei moduli linearmente topologizzati e di Hausdorff sopra l'anello **R** dotato della K–topologia. Sia $\mathrm{M} \in$ Mod–**R** ($\mathrm{M} \in$ LT**R**). Un carattere di M è un morfismo (morfismo continuo) di M in K (dove K ha la topologia discreta).

Denotiamo con $\mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathrm{K})$ la sottocategoria di Mod–**R** formata dai moduli *K–discreti*, cioè dai moduli algebricamente isomorfi a sottomoduli di prodotti diretti di copie di K e con $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(\mathrm{K})$ la sottocategoria di LT**R** formata dai moduli *K–compatti*, cioè dai moduli che sono topologicamente isomorfi a sottomoduli chiusi di prodotti topologici di copie discrete di K.

Sia $\mathrm{M} \in$ Mod–**R**. Il modulo dei caratteri di M è il modulo $\mathrm{M}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathrm{M}, \mathrm{K})$ munito della topologia della convergenza semplice. Evidentemente $\mathrm{M}^* \in \mathscr{C}_{\mathbf{R}}(\mathrm{K})$.

Se $\mathrm{M} \in$ LT**R** il modulo dei caratteri M* di M è il modulo astratto formato dai morfismi continui di M in K. Evidentemente $\mathrm{M}^* \in \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathrm{K})$. In entrambi i casi M* è detto anche il duale di M.

1.3. Sia

$$\Delta : \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathrm{K}) \to \mathscr{C}_{\mathbf{R}}(\mathrm{K})$$

il funtore controvariante che associa ad ogni $\mathrm{M} \in \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(\mathrm{K})$ il suo duale e ad ogni morfismo il suo trasposto.

Si dice che Δ è una *buona dualità* se ogni modulo K–discreto oppure K–compatto è canonicamente isomorfo al proprio biduale e inoltre la categoria $\mathfrak{C}_{\mathbf{R}}(\mathrm{K})$ ha la proprietà di estensione dei caratteri, ossia ogni carattere di un sottomodulo topologico di un modulo M di $\mathfrak{C}_{\mathbf{R}}(\mathrm{K})$ si estende ad un carattere di M. C. Menini e A. Orsatti hanno provato ([2], Teorema 3.6) che Δ è una buona dualità se e solo se K è un R–modulo fortemente quasi iniettivo con anello degli endomorfismi commutativo (in breve K è un R–modulo f.q.i.c.).

Ricordiamo che K si dice f.q.i. se per ogni sottomodulo B di K e $x \in \mathrm{K} \setminus \mathrm{B}$, ogni morfismo di B in K si estende ad un endomorfismo di K diverso da zero in x.

§ 2. Costruzione di moduli f.q.i.c. e SISI anelli

2.1. Siano R un anello commutativo con $1 \neq 0$ e Ω l'insieme degli ideali massimali di R. Sia $\{\mathrm{S}_{\mathfrak{M}}\}_{\mathfrak{M} \in \Omega}$ un sistema di rappresentanti delle classi di isomorfismo degli R–moduli semplici, dove per ogni $\mathfrak{M} \in \Omega$ $\mathrm{S}_{\mathfrak{M}} \cong \mathrm{R}/\mathfrak{M}$, e posto

$$\mathrm{S} = \bigoplus_{\mathfrak{M} \in \Omega} \mathrm{S}_{\mathfrak{M}}$$

indichiamo con E (S) l'inviluppo iniettivo di S.

Sia ora $\mathfrak{K}$ la famiglia dei sottomoduli di E (S) contenenti S, pienamente invarianti in E (S) e il cui anello degli endomorfismi è commutativo. $\mathfrak{K}$ contiene S ed è filtrante crescente, cioè se $K_1, K_2 \in \mathfrak{K}$ allora anche $K_1 + K_2 \in \mathfrak{K}$. Ne segue che

$$\hat{K} = \bigcup_{K \in \mathfrak{K}} K$$

è un sottomodulo di E (S) che, come si verifica facilmente, è in $\mathfrak{K}$.

Si osservi inoltre che se $K \in \mathfrak{K}$, allora K è f.q.i.c. Infatti ogni ideale massimale di R è aperto nella K–topologia di R e K è quasi–iniettivo essendo pienamente invariante nel proprio inviluppo iniettivo E (S). Quindi K è f.q.i. per la Proposizione 3.2 di [2].

2.2. Ci proponiamo adesso di dimostrare che ogni R–modulo f.q.i.c. è isomorfo ad un sottomodulo di $\hat{K}$.

Sia dunque H un R–modulo f.q.i.c. Indichiamo con $\mathfrak{F}$ il filtro degli ideali aperti di R nella H–topologia, con $S_{\mathfrak{F}} = \bigoplus_{\mathfrak{M} \in \Omega_{\mathfrak{F}}} S_{\mathfrak{M}}$ dove $\Omega_{\mathfrak{F}}$ è l'insieme degli ideali massimali di $\mathfrak{F}$.

Osserviamo anzitutto che se $\mathfrak{M} \notin \Omega_{\mathfrak{F}}$ allora $t_{\mathfrak{F}}(E(S_{\mathfrak{M}})) = 0$ perchè altrimenti $S_{\mathfrak{M}} \leq t_{\mathfrak{F}}(E(S_{\mathfrak{M}}))$, e $\mathfrak{M} \in \Omega_{\mathfrak{F}}$.

PROPOSIZIONE. – *Sia* H *un* R*–modulo f.q.i.c. Allora* H *è isomorfo a* $t_{\mathfrak{F}}(\hat{K})$ *che a sua volta coincide con* $t_{\mathfrak{F}}(E(S))$.

Dimostrazione. – Identifichiamo H con $\bigoplus_{\mathfrak{M} \in \Omega_{\mathfrak{F}}} t_{\mathfrak{F}}(E(R/\mathfrak{M}))$ ([2], Teorema 4.4) e quest'ultimo lo identifichiamo con il sottomodulo $\bigoplus_{\mathfrak{M} \in \Omega_{\mathfrak{F}}} t_{\mathfrak{F}}(E(S_{\mathfrak{M}}))$ di $\bigoplus_{\mathfrak{M} \in \Omega} E(S_{\mathfrak{M}})$, che a sua volta è un sottomodulo di E (S).

Consideriamo le inclusioni

$$S \leq \bigoplus_{\mathfrak{M} \in \Omega} E(S_{\mathfrak{M}}) \leq E(S) \leq \prod_{\mathfrak{M} \in \Omega} E(S_{\mathfrak{M}}) .$$

Sia $x \in t_{\mathfrak{F}}(E(S))$, $x = (x_{\mathfrak{M}})_{\mathfrak{M} \in \Omega}$, dove per ogni $\mathfrak{M} \in \Omega$, $x_{\mathfrak{M}} \in E(S_{\mathfrak{M}})$. $I = \mathrm{Ann}_R \cdot (x) \in \mathfrak{F}$ e $I x_{\mathfrak{M}} = 0$ per ogni $\mathfrak{M} \in \Omega$. Per quanto osservato se $\mathfrak{M} \notin \Omega_{\mathfrak{F}}$ è $x_{\mathfrak{M}} = 0$. Se invece $\mathfrak{M} \in \Omega_{\mathfrak{F}}$ allora $x_{\mathfrak{M}} \in t_{\mathfrak{F}}(E(S_{\mathfrak{M}}))$ e se $x_{\mathfrak{M}} \neq 0$ risulta

$$I \leq \mathrm{Ann}_R(x_{\mathfrak{M}}) \leq \mathfrak{M} .$$

Poichè I è contenuto solo in un numero finito di ideali massimali appartenenti a $\mathfrak{F}$ ([2], Teorema 4.4) $x_{\mathfrak{M}} = 0$ per quasi tutti gli $\mathfrak{M} \in \Omega_{\mathfrak{F}}$. Quindi $x \in \bigoplus_{\mathfrak{M} \in \Omega_{\mathfrak{F}}} t_{\mathfrak{F}}(E(S_{\mathfrak{M}}))$ e $t_{\mathfrak{F}}(E(S)) \leq H$.

Poniamo adesso $S' = \bigoplus_{\mathfrak{M} \notin \Omega_{\mathfrak{F}}} S_{\mathfrak{M}}$ e $H' = S' + H = S' \oplus H$. Risulta

$$\mathrm{End}_R(H') \cong \prod_{\mathfrak{M} \notin \Omega_{\mathfrak{F}}} \frac{R}{\mathfrak{M}} \oplus \mathrm{End}_R(H)$$

poichè

$$\mathrm{Hom}_R(S_{\mathfrak{M}_1}, t_{\mathfrak{F}}(E(S_{\mathfrak{M}_2}))) = 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{Hom}_R(t_{\mathfrak{F}}(E(S_{\mathfrak{M}_2})), S_{\mathfrak{M}_1}) = 0$$

se $\mathfrak{M}_1 \notin \Omega_{\mathfrak{F}}$ e $\mathfrak{M}_2 \in \Omega_{\mathfrak{F}}$.

Osserviamo poi che H è pienamente invariante in E (S) perchè se $f \in \mathrm{End}_R(E(S))$, $f(H) \leq t_{\mathfrak{F}}(E(S_{\mathfrak{F}})) = H$ ([2], Theorema 4.4).

Essendo anche S′ pienamente invariante in E (S), si ha che $H' \in \mathfrak{K}$ e quindi $H \leq H' \leq \hat{K}$ da cui $t_{\mathfrak{F}}(H) = H \leq t_{\mathfrak{F}}(\hat{K})$.

In definitiva abbiamo provato le seguenti inclusioni

$$t_{\mathfrak{F}}(\hat{K}) \leq t_{\mathfrak{F}}(E(S)) \leq H \leq t_{\mathfrak{F}}(\hat{K}).$$

2.3. TEOREMA. *Sia* R *un anello commutativo con* $1 \neq 0$. *Indichiamo con* S *la somma diretta di un sistema di rappresentanti delle classi di isomorfismo degli* R*–moduli semplici, con* E (S) *l'inviluppo iniettivo di* S. *Allora* E (S) *contiene un sottomodulo* $\hat{K}$ *f.q.i.c. contenente* S *tale che se* H *è un* R*–modulo f.q.i.c. e* $\mathfrak{F}$ *è il filtro degli ideali aperti nella* H*–topologia di* R, H *è isomorfo a* $t_{\mathfrak{F}}(\hat{K})$. *Inoltre ogni sottomodulo di* $\hat{K}$ *è f.q.i.c.*

2.4. Sia R un anello commutativo con $1 \neq 0$. Per il teorema di struttura dei moduli f.q.i.c. ([2], Teorema 4.4] è $\hat{K} \leq \bigoplus_{\mathfrak{M} \in \Omega} E(S_{\mathfrak{M}})$. Ci proponiamo di determinare gli anelli R per i quali risulta $\hat{K} = \bigoplus_{\mathfrak{M} \in \Omega} E(S_{\mathfrak{M}})$.

A tal fine ricordiamo che un anello R si dice un *SISI anello* se per ogni $\mathfrak{M} \in \Omega$, ogni sottomodulo di $E(S_{\mathfrak{M}})$ è pienamente invariante, ossia se per ogni $x \in E(S_{\mathfrak{M}})$ e ogni $f \in \mathrm{End}_R(E(S_{\mathfrak{M}}))$ esiste $r \in R$ (dipendente da x e f) tale che $f(x) = rx$.

Di conseguenza $\mathrm{End}_R(E(S_{\mathfrak{M}}))$ è commutativo per ogni $\mathfrak{M} \in \Omega$. Ricordiamo inoltre che un SISI anello è un *H–anello* ([4], Lemma 2.3), cioè per ogni coppia S_1, S_2 di moduli semplici non isomorfi si ha

$$\mathrm{Hom}_R(E(S_1), E(S_2)) = 0.$$

Ne consegue che se R è un SISI anello

$$\mathrm{End}_R\left(\bigoplus_{\mathfrak{M} \in \Omega} E(S_{\mathfrak{M}})\right) \cong \prod_{\mathfrak{M} \in \Omega} \mathrm{End}_R(E(S_{\mathfrak{M}}))$$

è commutativo.

2.5. TEOREMA. – *Sia* R *un anello commutativo e si ponga*

$$U = \bigoplus_{\mathfrak{M} \in \Omega} E(S_{\mathfrak{M}}).$$

Le seguenti affermazioni sono equivalenti.

(a) R *è un SISI anello.*

(b) *L'anello degli endomorfismi di* U *è commutativo.*

(c) U *è f.q.i.c.*

(d) $U = \hat{K}$.

Dimostrazione:

(a) $\Rightarrow$ (b) Risulta dalle considerazioni precedenti.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sia $\mathfrak{F}$ il filtro degli ideali aperti di R nella U-topologia e $\Omega_{\mathfrak{F}}$ l'insieme degli ideali massimali di $\mathfrak{F}$. Evidentemente $\Omega_{\mathfrak{F}} = \Omega$ attesa la struttura di U e inoltre $t_{\mathfrak{F}}(E(S_{\mathfrak{M}})) = E(S_{\mathfrak{M}})$ per ogni $\mathfrak{M} \in \Omega$. Allora, essendo $\mathrm{End}_R(U)$ commutativo, U è f.q.i. per il Teorema 4.4 di [2].

(c) $\Rightarrow$ (a) Per ogni $\mathfrak{M} \in \Omega$, $E(S_{\mathfrak{M}})$ è f.q.i.c. ([2], Teorema 3.6) e quindi ogni sottomodulo di $E(S_{\mathfrak{M}})$ è pienamente invariante in $E(S_{\mathfrak{M}})$.

(c) $\Longleftrightarrow$ (d) Ovvio.

§ 3. SISI ANELLI COMPLETI

3.1. Siano R un anello commutativo con $1 \neq 0$ e K un R-modulo f.q.i.c. Per quali coppie (R, K) risulta $\mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(K) = \text{Mod-R}$?

Osserviamo anzitutto che se $\mathfrak{D}_{\mathbf{R}}(K) = \text{Mod-R}$ allora essendo Δ una dualità

$$R \cong \mathrm{Chom}_{\mathbf{R}}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(R, K), K) = \mathrm{Chom}_{\mathbf{R}}(\mathrm{Hom}_R(R, K), K) \cong$$

$$\cong \mathrm{Chom}_{\mathbf{R}}(K, K) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(K, K) = \mathrm{Hom}_R(K, K) \cong \mathbf{R}$$

gli isomorfismi essendo canonici, per cui R è completo nella K-topologia.

Se allora R è su SISI anello e K è il cogeneratore minimale di Mod-R è chiaro che $\mathfrak{D}_R(K) = \text{Mod-R}$.

Viceversa se $\mathfrak{D}_R(K) = \text{Mod-R}$, K è un cogeneratore di Mod-R e quindi contiene l'inviluppo iniettivo di ogni modulo semplice. Allora ogni ideale massimale di R è aperto nella K-topologia e per ogni $\mathfrak{M} \in \Omega$ risulta $t_{\mathfrak{F}}(E(S_{\mathfrak{M}})) = E(S_{\mathfrak{M}})$. Ma essendo K f.q.i.c. si ha ([2], Teorema 4.4)

$$K \cong \bigoplus_{\mathfrak{M} \in \Omega} t_{\mathfrak{F}}(E(R/\mathfrak{M})) = \bigoplus_{\mathfrak{M} \in \Omega} E(S_{\mathfrak{M}})$$

perciò K è il cogeneratore minimale di Mod-R e per il Teorema 2.5 R è un SISI anello.

3.2. Il Lemma che segue è stato dimostrato da C. Menini in [1] e poi generalizzato da C. Menini e A. Orsatti in [2]. Per completezza ne diamo qui una dimostrazione a parte.

LEMMA. – *Sia* R *un SISI anello e sia* $U = \bigoplus_{\mathfrak{M} \in \Omega} E(S_{\mathfrak{M}})$ *il cogeneratore minimale di Mod*-R. *Allora*:

1) *Per ogni* $\mathfrak{M} \in \Omega$, $A_{\mathfrak{M}} = \mathrm{End}_{R_{\mathfrak{M}}}(E(S_{\mathfrak{M}}))$ *con la* $E(S_{\mathfrak{M}})$ *topologica è il completamento di Hausdorff di* R *nella* $E(S_{\mathfrak{M}})$*-topologia*.

2) $\mathbf{R} \cong \prod_{\mathfrak{M} \in \Omega} A_{\mathfrak{M}}$

3) *Per ogni* $\mathfrak{M} \in \Omega$ $A_{\mathfrak{M}}$ *è isomorfo alla localizzazione* $\mathbf{R}_{\tilde{\mathfrak{M}}}$ *di* $\mathbf{R}$ *in* $\tilde{\mathfrak{M}}$ *dove* $\tilde{\mathfrak{M}}$ *è la chiusura di* $\mathfrak{M}$ *in* $\mathbf{R}$.

Dimostrazione:

1) Poichè $E(S_{\mathfrak{M}})$ è f.q.i.c. $\mathrm{End}_R(E(S_{\mathfrak{M}}))$ è isomorfo al completamento di Hausdorff di R nella $E(S_{\mathfrak{M}})$–topologia ([2], Lemma 3.5). Ma $\mathrm{End}_R(E(S_{\mathfrak{M}})) = \mathrm{End}_{R_{\mathfrak{M}}}(E(S_{\mathfrak{M}}))$.

2) Poichè R è un H–anello si ha

$$\mathbf{R} \cong \mathrm{End}_R(U) \cong \prod_{\mathfrak{M}\in\Omega} \mathrm{End}_R(E(S_{\mathfrak{M}})) = \prod_{\mathfrak{M}\in\Omega} A_{\mathfrak{M}} .$$

3) Abbiamo

$$\mathbf{R} = A_{\mathfrak{M}} \oplus \left(\prod_{\mathfrak{M}'\neq\mathfrak{M}} A_{\mathfrak{M}'}\right)$$

Localizzando in $\tilde{\mathfrak{M}}$ si ottiene $\mathbf{R}_{\tilde{\mathfrak{M}}} = A_{\mathfrak{M}}$, poichè $\mathbf{R}_{\tilde{\mathfrak{M}}}$ è un anello locale e quindi indecomponibile in somma diretta.

3.3. D'ora in poi «SISI anello completo» vorrà dire «SISI anello completo nella U–topologia» dove $U = \bigoplus_{\mathfrak{M}\in\Omega} E(S_{\mathfrak{M}})$ è il cogeneratore minimale di Mod–R.

PROPOSIZIONE. – *Sia* R *un SISI anello completo. Allora* R *ha solo un numero finito di ideali massimali.*

Dimostrazione. – Per il Lemma 3.2

$$R = \mathbf{R} = \prod_{\mathfrak{M}\in\Omega} A_{\mathfrak{M}}$$

dove gli $A_{\mathfrak{M}}$ sono anelli locali. Per ogni $\mathfrak{M}\in\Omega$ sia $\bar{\mathfrak{M}}$ l'estensione di $\mathfrak{M}$ ad $A_{\mathfrak{M}}$. Si scriva ogni elemento $a \in R$ nella forma $a = (a_{\mathfrak{M}})_{\mathfrak{M}\in\Omega}$ dove per ogni $\mathfrak{M}\in\Omega$ $a_{\mathfrak{M}} \in A_{\mathfrak{M}}$. Fissato $\mathfrak{M}'\in\Omega$ si ha

$$\mathfrak{M}' = \{a \in R : a_{\mathfrak{M}'} \in \bar{\mathfrak{M}}'\} .$$

Se Ω è infinito $\bigoplus_{\mathfrak{M}\in\Omega} A_{\mathfrak{M}}$ è un ideale proprio di R che però non è contenuto in nessuno degli ideali massimali di R. Perciò Ω è finito.

3.4. Sia R un SISI anello completo. Per quanto visto R ha solo un numero finito di ideali massimali quindi U è cogeneratore iniettivo di Mod–R. Ne consegue che U è linearmente compatto nella topologia discreta ([3]. Lemma 4) e l'anello R possiede una dualità di Morita con se stesso indotta da U ([3], Teoremi 1 e 3).

Ci proponiamo di determinare i moduli U–riflessivi nella dualità di Morita (cioè i moduli M tali che $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, U), U)$ è canonicamente isomorfo a M) mostrando nel contempo che essa è subordinata dalla dualità Δ.

Ricordiamo che la topologia cofinita di un R–modulo M è definita prendendo come prebase di intorni di zero tutti i sottomoduli L di M tali che M/L è isomorfo ad un sottomodulo di $E(S_{\mathfrak{M}})$ per qualche $\mathfrak{M} \in \Omega$.

3.5. TEOREMA. – *Sia* R *un SISI anello completo. La categoria* $\mathscr{R}$ *dei moduli* U–*riflessivi nella dualità di Morita posseduta da* R *si identifica mediante il funtore che «dimentica» la topologia con la sottocategoria di* $\mathscr{C}_R(U)$ *formata dai moduli completi nella topologia cofinita.*

Dimostrazione. – Osserviamo in primo luogo che la topologia cofinita di un modulo M coincide con la topologia debole di $\mathrm{Hom}_R(M, U)$ cosicchè un modulo completo nella topologia cofinita è U–compatto ed inoltre

$$\mathrm{Chom}_R(M, U) = \mathrm{Hom}_R(M, U).$$

Attese le proprietà della dualità Δ M è U–riflessivo.

Viceversa sia M U–riflessivo. Allora M è linearmente compatto nella topologia discreta ([3], Teorema 2). Quindi M è linearmente compatto nella topologia cofinita e quindi completo in tale topologia. Poichè una verifica diretta mostra che M con la topologia cofinita è in LTR ne consegue che $M \in \mathscr{C}_R(U)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. MENINI (1977) – *On* E–*compact modules over* SISI–*rings*, «Ann. dell'Univ. di Ferrara, Sez. VII – Sc. Mat.», *23*, 195–207.

[2] C. MENINI e A. ORSATTI (1979) – *Duality over a quasi–injective module and commutative* $\mathfrak{F}$–*reflexive rings*, «Symposia Mathematica», *23*, 145–179.

[3] B. J. MÜLLER (1970) – *Linear Compactness and Morita Duality*, «Journal of Algebra», *16*, 60–66.

[4] P. VAMOS (1975) – *Classical Rings*, «Journal of Algebra», *34*, 114–129.