Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giorgio Busetto

Una caratterizzazione reticolare dei gruppi iperabeliani

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **68** (1980), n.2, p. 95–98.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1980_8_68_2_95_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1980.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 9 febbraio 1980

Presiede il Presidente della Classe ANTONIO CARRELLI

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Algebra. — *Una caratterizzazione reticolare dei gruppi iperabeliani.* Nota [*], di GIORGIO BUSETTO presentata [*] dal Socio G. SCORZA DRAGONI.

SUMMARY. — A lattice-theoretical characterization of hyperabelian groups is given.

Nella presente Nota viene data una caratterizzazione puramente reticolare della classe dei gruppi iperabeliani [1]; essa generalizza quella fornita da R. Schmidt in [3], Satz 1, per i gruppi risolubili [1] finiti. Il risultato si raggiunge avvalendosi essenzialmente di risultati stabiliti da S. E. Stonehewer per i sottogruppi modulari [2] nei gruppi infiniti ([6], [7]).

Come nomenclatura e notazioni si seguirà principalmente [7]. In particolare $\mathfrak{X}$ denoterà la classe gruppale tale che $G \in \mathfrak{X}$ se e solo se ogni sottogruppo massimale e modulare in G ha ivi indice finito. Si chiamerà modulare un gruppo il cui reticolo dei sottogruppi sia modulare.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del GNSAGA del CNR.

(**) Nella seduta del 9 febbraio 1980.

(1) Un gruppo G si dice iperabeliano (iperciclico) se ogni sua immagine epimorfa non identica possiede un sottogruppo normale abeliano (ciclico) non identico, o equivalentemente G possiede una catena ascendente di sottogruppi normali $\{N_\alpha\}_{\alpha \leq \gamma}$, ove γ è un ordinale, $N_\gamma = G$, $N_0 = \langle 1 \rangle$, $N_{\alpha+1}/N_\alpha$ è abeliano (ciclico) e $N_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} N_\beta$ se α è ordinale limite. G si dice risolubile (supersolubile) se γ si può fissare finito.

(2) Un sottogruppo Q di un gruppo G si dice modulare in G se $(U \cup Q) \cap V = U \cup (Q \cap V)$ per ogni $U \leq V \leq G$ e $(U \cup Q) \cap V = (U \cap V) \cup Q$ per ogni $V \leq G$, $U \leq G$ con $Q \leq V$.

Una caratterizzazione reticolare dei gruppi iperciclici [1] verrà data, quale applicazione, in un mio lavoro di prossima pubblicazione sui Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, in cui vengono analizzate esaurientemente le proprietà di immersione delle chiusure normali dei sottogruppi ciclici modulari nei gruppi.

Ci serviranno i due lemmi seguenti:

1. LEMMA. – *Un gruppo* G *modulare e privo di fattori di Tarski* [3] *è risolubile.*

Dimostrazione. – Per noti teoremi sui gruppi modulari ([8], cap. 1), è sufficiente provare che in G elementi periodici generano un gruppo localmente finito. Sia $L = \langle g_1, \cdots, g_t \rangle$, con $g_i \in G$ e periodo $|g_i| > 0$ $(i = 1, \cdots, t)$. Poiché $|\langle g_t \rangle^L|$ [4] $< \infty$ ([7], Cor. 4.3) usando induzione su t sarà $|L/\langle g_t \rangle^L|$ [4] $< \infty$, e dunque pure $|L| < \infty$.

2. LEMMA. – *Sia* G *un gruppo privo di fattori di Tarski,* M *un sottogruppo modulare di* G *con* $M \in \mathfrak{X}$. *Allora, per ogni insieme finito* $\{g_1, \cdots, g_n\}$ *di elementi di* G, *posto* $H = M \cup M^{g_1} \cup \cdots \cup M^{g_n}$, *risulta* H/M_H *gruppo finito supersolubile.*

Dimostrazione. – Posto $L = \langle M, g_1, \cdots, g_n \rangle$, risulta $|M^L : M| < \infty$ ([7], cor. 4.3), quindi $|M^L/M_{M^L}| < \infty$. Da $M_{M^L} \leq M_H \leq H \leq M^L$, segue allora $|H/M_H| < \infty$. M^H/M_H è supersolubilmente immerso [5] in H ([4], Teorema 1.2) e inoltre, posto $H_i = M^H(M^{g_1} \cup \cdots \cup M^{g_i})$ $(i = 1, \cdots, n)$, H_i è modulare in G, e pertanto $[H_{i+1}/H_i]$ [6] $\lesssim [H_i \cup \langle g_{i+1} \rangle / H_i] \simeq [\langle g_{i+1} \rangle / \langle g_{i+1} \rangle \cap H_i]$, un reticolo distributivo. Da [3], Satz 2, (ii), segue che H/M_H è supersolubile.

Il risultato centrale della presente nota è il seguente teorema:

3. TEOREMA. – *Sia* G *un gruppo privo di fattori di Tarski, e sia* M *un sottogruppo modulare di* G *con* M *gruppo modulare. Allora* M^G *contiene un sottogruppo abeliano non identico* N, *normale in* G.

Dimostrazione. – Sia $\{g_1, \cdots, g_n\}$ un insieme finito di elementi di G, e si ponga $H = M \cup M^{g_1} \cup \cdots \cup M^{g_n}$. H è risolubile per i Lemmi 1 e 2. Se allora $H_G \neq \langle 1 \rangle$, per N basta prendere il penultimo termine della serie derivata di H_G. Per concludere siamo così ricondotti ad esaminare la situazione in cui un qualunque sottogruppo di G generato da M e un numero finito di suoi coniugati sia di nocciolo identico in G. Distinguiamo all'uopo due casi:

(3) Un gruppo T si dice di Tarski se è un gruppo infinito in cui tutti i sottogruppi propri non identici hanno ordine primo. Un gruppo G si dice privo di fattori di Tarski se non compaiono gruppi di Tarski come quozienti di sottogruppi di G.

(4) Se $H \leq G$, $H_G = \bigcap_{g \in G} H^g$, il nocciolo di H in G e $H^G = \bigcup_{g \in G} H^g$, la chiusura normale di H in G.

(5) Se $K \leq H$ sono sottogruppi normali di un gruppo G, H/K si dice supersolubilmente immerso in G se esiste una catena finita di sottogruppi normali di G, $K = K_0 \leq K_1 \leq \cdots \leq K_n = H$, dove K_{i+1}/K_i è un gruppo ciclico, $(i = 1, \cdots, n-1)$.

(6) Se $K \leq H$ con $[H/K]$ si denota il reticolo dei sottogruppi di H contenenti K.

a) M^G *contiene elementi di ordine primo* p.

Scelti a caso due tali elementi $x_1, x_2 \in M^G$, $\langle x_1, x_2\rangle$ è contenuto in un sottogruppo L di G generato da M e da un numero finito di suoi coniugati. L è dunque risolubile (Lemmi 1 e 2) per cui $L \in \mathfrak{X}^S$ (7) ([6], Teorema 1); inoltre L è modulare in G e $L_G = \langle 1\rangle$. Da [7], Teorema 3.9 segue che $\langle x_1, x_2\rangle$ è abeliano. Pertanto il gruppo generato dagli elementi di ordine p di M^G è abeliano non identico ed è caratteristico in M^G. Quindi N è di nuovo trovato.

b) M^G *è senza torsione.*

Allora M e tutti i suoi coniugati sono abeliani ([8], cap. 1, Prop. 1.12). Usando [7], cor. 4.3, è facile concludere che, per ogni coppia di elementi g_1, g_2 di G, risulta $|M^{g_1} \cup M^{g_2} : M^{g_1} \cap M^{g_2}| < \infty$. Dalla commutatività di M^{g_1} e M^{g_2}, segue che $M^{g_1} \cap M^{g_2} \leq Z(M^{g_1} \cup M^{g_2})$, il centro di $M^{g_1} \cup M^{g_2}$, e ciò implica che il derivato $(M^{g_1} \cup M^{g_2})'$ ha ordine finito ([2], Teorema 4.12, vol. 1), ed è quindi identico, essendo M^G senza torsione. Perciò $M^{g_1} \cup M^{g_2}$ è abeliano. In conclusione M^G stesso risulta essere abeliano. N è dunque in ogni caso trovato.

Sarà utile a questo punto, per pervenire alla preannunciata caratterizzazione reticolare dei gruppi iperabeliani, introdurre la classe gruppale $\mathfrak{F}$, definita nel seguente modo.

4. DEFINIZIONE. – *Un gruppo* G *è un* $\mathfrak{F}$*-gruppo se e solo se ogni intervallo* [H/K] *di lunghezza* (8) 2 *con* $K \leq H \leq G$ *e* K *modulare in* H, *è un reticolo finito.*

OSSERVAZIONE 1. – Notiamo esplicitamente che la classe $\mathfrak{F}$ è proiettivamente invariante (9), in quanto è stata definita in termini puramente reticolari; ancora che da $G \in \mathfrak{F}$ segue che G è privo di fattori di Tarski; infine che se $G \in \mathfrak{X}^S_{|}$, allora $G \in \mathfrak{F}$: siano infatti $H \leq G$ e K un sottogruppo modulare di H con [H/K] di lunghezza 2. Da $K \lneqq M \lneqq H$ segue che M è massimale e modulare in H ([7], Prop. 1.5) e K è massimale in M. Inoltre $\{H, M\} \subseteq \mathfrak{X}^S$ e pertanto $|H:K| = |H:M|\,|M:K| < \infty$. Quindi [H/K] è finito.

Usando 3 è immediato provare la seguente caratterizzazione reticolare e quindi proiettivamente invariante dei gruppi iperabeliani:

5. TEOREMA. – *Un gruppo* G *è iperabeliano se e solo se* $G \in \mathfrak{F}$ *e* G *possiede una catena ascendente di sottogruppi* $\{M_\alpha\}_{\alpha \leq \gamma}$, *ove* γ *è un ordinale,*

(7) $\mathfrak{X}^S$ è la massima sottoclasse di $\mathfrak{X}$ chiusa rispetto ai sottogruppi.

(8) Un reticolo L si dice di lunghezza n se e solo se $n = \max\{|C| - 1 \mid C$ varia nell'insieme delle catene di L.$\}$.

(9) Una classe gruppale $\mathfrak{K}$ si dice proiettivamente invariante, se per ogni gruppo $G \in \mathfrak{K}$ e per ogni isomorfismo reticolare $\varphi : L(G) \to L(G_1)$, risulta $G_1 \in \mathfrak{K}$, ove con $L(G)$ e $L(G_1)$ si indicano rispettivamente il reticolo dei sottogruppi di G e di G_1.

$M_\gamma = G$, $M_0 = \langle 1 \rangle$, M_α *è modulare in* G, $M_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$ *se* α *è ordinale limite, e* $[M_{\alpha+1}/M_\alpha]$ *è un reticolo modulare.*

Dimostrazione. – Sia G iperabeliano. Allora ogni $H \leq G$ possiede una $\mathfrak{X}$–serie normale ascendente che soddisfa le ipotesi richieste. Pertanto (10) $G \in \mathfrak{X}^S$, in particolare $G \in \mathfrak{F}$ in accordo con l'osservazione 1.

Viceversa sia $N \lneqq G$ e sia $\delta = \min \{\alpha \leq \gamma \mid M_\alpha \nleq N\}$. Allora δ è un ordinale non limite e quindi $M_\delta N/N$ è un gruppo modulare non identico e G/N è privo di fattori di Tarski in virtù dell'osservazione 1; ma allora per il teorema 3 G/N possiede un sottogruppo normale abeliano non identico.

OSSERVAZIONE 2. – Negli enunciati di 2., 3., 5., non si può tralasciare l'ipotesi che G sia privo di fattori di Tarski, i gruppi di Tarski fornendo dei controesempi. 3. è però vero senza alcuna ipotesi su G se si suppone che il gruppo modulare M sia quasinormale (11) in G.

OSSERVAZIONE 3. – In generale non è vero che un gruppo G soddisfacente le ipotesi di 5. è risolubile se l'ordinale γ è finito. Infatti Stonehewer ([5] Teorema B) realizza un esempio di un gruppo G non risolubile, iperabeliano, dotato di una catena $\langle 1 \rangle \leq M \leq G$ con M modulare in G e $[M/\langle 1 \rangle]$ e [G/M] reticoli modulari. È però vero se G è finitamente generato ([1], Teorema 3). È altresì noto che la classe dei gruppi risolubili è proiettivamente invariante ([9]).

BIBLIOGRAFIA

[1] E. PREVIATO (1977–78) – *Una caratterizzazione reticolare dei gruppi risolubili finitamente generati*, «Atti Ist. Veneto di Scienze, Lettere ed Arti», *Tomo CXXVI*, 7–11.

[2] D. J. S. ROBINSON – *Finiteness conditions and generalized soluble groups*; «Erg. der Mathematik», *Band 62*, Springer Verlag, Berlin.

[3] R. SCHMIDT (1968) – *Eine verbandstheoretische Characterisierung der auflösbaren und der überauflösbaren endlichen Gruppen*, «Arch. der Mathematik», *19*, 449–452.

[4] R. SCHMIDT (1975) – *Normal subgroups and lattice isomorphism of finite groups*, «Proc. London Math. Soc.», (3), *30*, 287–300.

[5] S. E. STONEHEWER (1973) – *Permutable subgroups of some finite p-groups*, «J. Australian Math. Soc.», *16*, 90–97.

[6] S. E. STONEHEWER (1976) – *Modular subgroups of infinite groups*, Symposia Mathematica XVII, Academic press.

[7] S. E. STONEHEWER (1976) – *Modular subgroups structure in infinite groups*, «Proc. London Math. Soc.», (3), *52* 63–100.

[8] M. SUZUKI, *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*, «Erg. der Mathematik», *Heft 10*, Springer Verlag, Berlin.

[9] B. V. YAKOVLEV (1970) – *Lattice isomorphism of soluble groups*, «Algebra i Logika», *9*, 349–369.

(10) Ogni gruppo H dotato di una $\mathfrak{X}$–serie normale ascendente è $\mathfrak{X}$–gruppo. Per provarlo si usi induzione transfinita e si tenga conto che $\mathfrak{X} = L(\mathfrak{X})$ ([6], Th. 1), ove $L(\mathfrak{X})$ è la classe dei gruppi che sono localmente $\mathfrak{X}$–gruppi.

(11) Un sottogruppo Q di un gruppo G si dice quasinormale in G se QH = HQ per ogni $H \leq G$.