Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giulio Mattei

Sulle rotazioni rigide in Meccanica dei plasmi

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **67** (1979), n.6, p. 404–407.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_67_6_404_0>

Meccanica. — *Sulle rotazioni rigide in Meccanica dei plasmi.*
Nota di GIULIO MATTEI (*), presentata (**) dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — In this paper we study the uniform rigid rotations of a plasma described by the magnetofluiddynamic equations, with and without the Hall effect. Magnetic fields (and, in correspondence, the pressure field) that make such motions possible are determined.

1. FORMULAZIONE DEL PROBLEMA

Scopo di questa Nota è lo studio del seguente problema di *Meccanica dei plasmi*. Consideriamo un plasma descritto dalle equazioni della magnetofluidodinamica (MFD), omogeneo, incomprimibile, viscoso (stokesiano lineare), dotato di conducibilità elettrica finita e soggetto a forze di massa di origine non elettromagnetica conservative; in un primo tempo si supporrà trascurabile l'effetto Hall, in un secondo tempo se ne terrà conto. Nell'ambito delle equazioni indefinite *non linearizzate* descriventi tale plasma, ci si chiede se siano possibili moti MFD stazionari che siano rotazioni rigide d'assieme attorno ad un asse fisso e, in caso affermativo, ci si propone di determinare dei campi magnetici (ed, in corrispondenza, il campo delle pressioni) che rendono tali moti possibili.

2. EQUAZIONI DI BASE

Le equazioni non lineari di base sono (in unità di Gauss)

$$\boldsymbol{v} \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{v} - \operatorname{grad}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} - \mathrm{U}\right) + \frac{1}{4\,\pi\mu\rho}(\operatorname{rot} \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B} + \nu\nabla^2 \boldsymbol{v} = 0 \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \tag{2.2}$$

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \wedge \mathbf{B}) + \nu_m \nabla^2 \mathbf{B} = 0 \tag{2.3}$$

con la condizione

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0\,. \tag{2.4}$$

In esse $\boldsymbol{v}$ è il campo di velocità, p la pressione, ρ la densità (costante), U il potenziale delle forze di massa di origine non elettromagnetica riferito all'unità di massa, μ la permeabilità magnetica (costante), **B** il vettore

(*) Meccanica Razionale, Facoltà di Ingegneria dell'Università di Pisa.
(**) Nella seduta del 15 dicembre 1979.

induzione magnetica, ν il coefficiente di viscosità cinematica (costante), $\nu_m = c^2/4\,\pi\mu\sigma$ il coefficiente (costante) di viscosità magnetica (c velocità della luce nel vuoto, σ conducibilità elettrica, costante).

Le (2.1), (2.2), (2.3) costituiscono un sistema non lineare di 7 equazioni differenziali alle derivate parziali in 7 funzioni incognite scalari: le tre componenti di $\boldsymbol{v}$, le tre di $\mathbf{B}$ e p.

3. SOLUZIONE DEL PROBLEMA

Introdotta una terna di coordinate cilindriche ortogonali $T(0\,; r\,, \varphi\,, z)$ di versori $\boldsymbol{e}_r\,, \boldsymbol{e}_\varphi\,, \boldsymbol{e}_z$, con $0z$ asse fisso di rotazione, ci si chiede dunque se siano possibili moti per cui

$$\boldsymbol{v} = \Omega r \boldsymbol{e}_\varphi\,, \tag{3.1}$$

con Ω costante.

Per (3.1), la (2.2) è identicamente soddisfatta ed, essendo

$$\boldsymbol{v} \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \Omega^2 r^2 \quad , \quad \nabla^2 \boldsymbol{v} = 0\,,$$

la (2.1) assume la forma

$$\frac{1}{4\,\pi\mu\rho} (\operatorname{rot} \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B} = \operatorname{grad} \left(\frac{p}{\rho} - \frac{\Omega^2 r^2}{2} - \mathrm{U} \right). \tag{3.2}$$

Dunque la forza magnetica per unità di volume, $(\operatorname{rot} \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B}/4\,\pi\mu$, *deve essere conservativa per il realizzarsi dei moti in questione.*

La (3.2) può soddisfarsi prendendo un campo magnetico della forma

$$\mathbf{B} = \mathrm{B}_\varphi(r)\, \boldsymbol{e}_\varphi + \mathrm{B}_z(r)\, \boldsymbol{e}_z\,. \tag{3.3}$$

Infatti da (3.3) segue

$$(\operatorname{rot} \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B} = -\operatorname{grad} \left(\mathrm{B}^2/2 + \int \frac{\mathrm{B}_\varphi^2}{r}\, dr \right). \tag{3.4}$$

La (2.4) resta identicamente soddisfatta dalla (3.3) e la (2.3), avendosi per (3.1) e (3.3) $\operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \wedge \mathbf{B}) = 0$, assume la forma

$$\nabla^2 \mathbf{B} = 0\,. \tag{3.5}$$

La (3.5) proiettata su $\boldsymbol{e}_r$ dà un'identità; proiettata su $\boldsymbol{e}_\varphi$ dà

$$\frac{d^2 \mathrm{B}_\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\mathrm{B}_\varphi}{dr} - \frac{\mathrm{B}_\varphi}{r^2} = 0\,, \tag{3.6}$$

il cui integrale generale è

$$\mathrm{B}_\varphi = c_1 r + c_2/r\,, \tag{3.7}$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie; proiettata su $\boldsymbol{e}_z$ dà

$$\frac{d^2 B_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dB_z}{dr} = 0, \tag{3.8}$$

il cui integrale generale è

$$B_z = c_3 \log r + c_4, \tag{3.9}$$

con c_3 e c_4 costanti arbitrarie.

Le costanti $\Omega, c_1, \cdots, c_4$ saranno determinate dalle condizioni al contorno.

In definitiva possiamo concludere che per il plasma in esame sono possibili rotazioni uniformi rigide con un campo magnetico caratterizzato dalle (3.3), (3.7) *e* (3.9).

Calcoliamo ora la pressione. Da (3.2) per (3.4) segue

$$\frac{p}{\rho} - \frac{\Omega^2 r^2}{2} - U + \frac{B^2}{8\pi\mu\rho} + \frac{1}{4\pi\mu\rho}\int \frac{B_\varphi^2}{r}\,dr = \text{cost},$$

da cui, introdotta la pressione magnetica $p_m = B^2/8\pi\mu$ (da considerarsi nota in base a (3.3), (3.7) e (3.9)) e detta $P = p + p_m$ la pressione totale, si ha

$$\frac{P}{\rho} - \frac{\Omega^2 r^2}{2} - U + \frac{1}{4\pi\mu\rho}\left(c_1^2\frac{r^2}{2} - \frac{c_2^2}{2r^2} + 2c_1c_2\log r\right) = \text{cost}. \tag{3.10}$$

La (3.10) *determina la pressione.*

Notiamo infine che, se si richiedono per $\mathbf{B}$ soluzioni regolari sull'asse di rotazione, basta porre nella (3.7) $c_2 = 0$ e nella (3.9) $c_3 = 0$. In tal caso $\mathbf{B}$ assume la forma

$$\mathbf{B} = B_0\boldsymbol{e}_z + kr\boldsymbol{e}_\varphi, \tag{3.11}$$

con $B_0\boldsymbol{e}_z$ interpretabile come campo magnetico primario costante e $kr\boldsymbol{e}_\varphi$, con k costante dimensionata, interpretabile come campo magnetico indotto. In corrispondenza per la pressione segue da (3.10) la

$$\frac{p}{\rho} + \frac{k^2 r^2}{4\pi\mu\rho} - \frac{\Omega^2 r^2}{2} - U = \text{cost}. \tag{3.12}$$

Dalla (3.12), il cui significato fisico è palese, si può ricavare la descrizione dell'effetto «pinch» relativo ad un plasma in rotazione rigida uniforme, seguendo la ben nota descrizione dell'effetto «pinch» statico (che si basa sulla (3.12) con $\Omega = 0$), per il quale si rimanda per esempio a [1], Cap. IV).

4. CASO IN CUI NON È TRASCURABILE L'EFFETTO HALL

Nel caso in cui non è trascurabile l'effetto Hall le (2.1), (2.2) e (2.4) restano inalterate, mentre la (2.3) è sostituita dalla

$$\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{v} \wedge \mathbf{B}) + \nu_m \nabla^2 \mathbf{B} + \beta\,\mathrm{rot}\,(\mathbf{B} \wedge \mathrm{rot}\,\mathbf{B}) = 0\,, \tag{4.1}$$

dove si è posto $\beta = c^2 \beta_H / 4\pi\mu$, con β_H coefficiente di Hall (cfr. per esempio [2] n. 9, dove è anche indicata un'ampia bibliografia relativa all'effetto Hall nei plasmi).

Osservando che la (4.1) differisce dalla (2.3) per il solo termine contenente β e tenuto conto della (3.4), è immediato riconoscere che i risultati del n. 3 restano validi anche in presenza dell'effetto Hall.

BIBLIOGRAFIA

[1] N. G. VAN KAMPEN and B. U. FELDERHOF (1967) - *Theoretical methods in Plasma Physics*, North-Holland Pub. Co., Amsterdam.

[2] G. MATTEI (1930) - *Una introduzione allo studio dei modelli di tipo idrodinamico nella Fisica Matematica dei plasmi*, « Boll. Un. Mat. Ital. », (5) *17-A*, 1-24.