ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

MARCO BARLOTTI

Osservazioni sulla lunghezza π -separabile dei gruppi finiti

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 67 (1979), n.6, p. 387–394.

Accademia Nazionale dei Lincei

http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_67_6_387_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Algebra. — Osservazioni sulla lunghezza π -separabile dei gruppi finiti (*). Nota di MARCO BARLOTTI, presentata (**) dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — The author carries forward the study of characteristic series related to π -separable groups introduced in [3] by J. M. De Olazabal, and proves that the class of π -separable groups whose π -separable length is less or equal to k is subgroup closed but is not a formation.

I. NOTAZIONI E PRIME DEFINIZIONI

Tutti i gruppi che consideriamo sono supposti finiti, anche se ciò non sarà più esplicitamente ricordato.

Indicheremo con π un insieme fissato di numeri primi e con π' il suo complementare nell'insieme di tutti i numeri primi.

Le notazioni utilizzate sono tutte standard (per indicare il quoziente del gruppo G rispetto al sottogruppo normale N scriveremo G/N oppure $\frac{G}{N}$ cercando di conciliare le esigenze di spazio con quelle di chiarezza); in particolare, utilizzeremo le notazioni di [1] relative alle seguenti ben note operazioni di chiusura su classi di gruppi: S (chiusura rispetto ai sottogruppi), S_n (chiusura rispetto ai sottogruppi normali), Q (chiusura rispetto ai quozienti), N_0 (chiusura rispetto al prodotto normale), R_0 (chiusura rispetto al prodotto sottodiretto).

Ricordiamo che una classe di gruppi $\mathfrak{F}$ si dice una *formazione* se è Q -chiusa e R_0 -chiusa; in ogni gruppo G esiste allora un minimo sottogruppo normale $G^{\mathfrak{F}}$, detto $\mathfrak{F}$ -residuo, tale che $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Una classe di gruppi $\mathfrak{F}$ si dice di *Fitting* se è S_n -chiusa e N_0 -chiusa; in ogni gruppo G esiste allora un massimo sottogruppo normale $G_{\mathfrak{F}}$, detto $\mathfrak{F}$ -radicale, tale che $G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$.

Se G è un gruppo e $p \in \pi$, indicheremo con G^p e G_p (anziché $G^{\mathfrak{F}_{\pi' \cup \{p\}}}$ e $G_{\mathfrak{F}_{\pi' \cup \{p\}}}$) rispettivamente il residuo e il radicale di G rispetto alla formazione di Fitting $\mathfrak{F}_{\pi' \cup \{p\}}$ dei gruppi il cui ordine non è divisibile per alcun elemento di $\pi \setminus \{p\}$.

Seguendo [2, 1.15], un gruppo sarà detto π -separabile se per ogni suo fattore principale H/K esiste $p \in \pi$ tale che $H/K \in \mathfrak{F}_{\pi' \cup \{p\}}$.

La classe $\mathfrak{S}^{\pi}$ dei gruppi π -separabili è una formazione di Fitting S -chiusa ([3, 1.6]).

Ci sarà utile il seguente risultato:

1.1. Se $\mathfrak{F}$ è una formazione S_n -chiusa, da $A \triangleleft B$ segue $A^{\mathfrak{F}} \leq B^{\mathfrak{F}}$.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

(**) Nella seduta del 15 dicembre 1979.

2. SERIE π -SEPARANTI

Sia G un gruppo.

In corrispondenza di ogni n -pla $(p_1, \dots, p_n) \in \pi^n$ di elementi non necessariamente distinti di π , si definiscono ponendo

$$G^{p_1 \dots p_i} \stackrel{\text{df}}{=} (G^{p_1 \dots p_{i-1}})^{p_i} \quad i > 1$$

$$G_{p_1 \dots p_i} / G_{p_1 \dots p_{i-1}} \stackrel{\text{df}}{=} (G / G_{p_1 \dots p_{i-1}})^{p_i} \quad i > 1$$

la $(p_1, \dots, p_n)$ -serie π -separante discendente

$$(1) \quad G \geq G^{p_1} \geq \dots \geq G^{p_1 \dots p_n}$$

e la $(p_1, \dots, p_n)$ -serie π -separante ascendente

$$(2) \quad 1 \leq G_{p_1} \leq \dots \leq G_{p_1 \dots p_n}$$

di G ([3, 1.2]).

Ciascun termine della (1) è caratteristico nel precedente; ciascun termine della (2) è caratteristico nel successivo.

Una catena di sottogruppi di G si dirà una serie π -separante discendente [ascendente] di G se è la $(p_1, \dots, p_n)$ -serie π -separante discendente [ascendente] di G per una opportuna $(p_1, \dots, p_n) \in \pi^n$.

Nell'enunciato di 2.1, 2.3 e 2.4 supporremo fissata la n -pla $(p_1, \dots, p_n) \in \pi^n$.

2.1. ([3, 2.8]). - Se $N \triangleleft G$ e $i \leq n$,

$$(G/N)^{p_1 \dots p_i} = (G^{p_1 \dots p_i} N) / N.$$

2.2. Se $q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_i$ sono elementi non necessariamente distinti di π ,

$$(G^{q_1 \dots q_s})^{p_1 \dots p_i} = G^{q_1 \dots q_s p_1 \dots p_i}.$$

Dimostrazione. Possiamo procedere per induzione su i (infatti, se $i = 1$, è $G^{q_1 \dots q_s p_1} = (G^{q_1 \dots q_s})^{p_1}$ per definizione) e supporre

$$(G^{q_1 \dots q_s})^{p_1 \dots p_{i-1}} = G^{q_1 \dots q_s p_1 \dots p_{i-1}}.$$

Allora

$$G^{q_1 \dots q_s p_1 \dots p_i} = (G^{q_1 \dots q_s p_1 \dots p_{i-1}})^{p_i} = ((G^{q_1 \dots q_s})^{p_1 \dots p_{i-1}})^{p_i} = (G^{q_1 \dots q_s})^{p_1 \dots p_i}.$$

2.3. Se $S \leq G$ e $i \leq n$, si ha

$$S_{p_1 \dots p_i} \geq S \cap G_{p_1 \dots p_i}$$

(ma in generale $S_{p_1 \dots p_i} \neq S \cap G_{p_1 \dots p_i}$).

Dimostrazione. Possiamo procedere per induzione su i ; infatti, se $i = 1$, $S \cap G_{p_1} \in \mathfrak{F}_{\pi' \cup \{p_1\}}$ perché $\mathfrak{F}_{\pi' \cup \{p_1\}}$ è S -chiusa e $S \cap G_{p_1} \triangleleft S$ perché $G_{p_1} \triangleleft G$, cioè $S \cap G_{p_1} \leq S_{p_1}$. Sia allora $S_{p_1 \dots p_{i-1}} \geq S \cap G_{p_1 \dots p_{i-1}}$.

Osserviamo intanto che si ha

$$\begin{aligned} \frac{S \cap G_{p_1 \dots p_i}}{S \cap G_{p_1 \dots p_{i-1}}} &= \frac{S \cap G_{p_1 \dots p_i}}{(S \cap G_{p_1 \dots p_i}) \cap G_{p_1 \dots p_{i-1}}} \simeq \\ &\simeq \frac{(S \cap G_{p_1 \dots p_i}) G_{p_1 \dots p_{i-1}}}{G_{p_1 \dots p_{i-1}}} = \frac{S G_{p_1 \dots p_{i-1}} \cap G_{p_1 \dots p_i}}{G_{p_1 \dots p_{i-1}}} \leq \frac{G_{p_1 \dots p_i}}{G_{p_1 \dots p_{i-1}}} \in \mathfrak{F}_{\pi' \cup \{p_i\}}. \end{aligned}$$

Poiché $\mathfrak{F}_{\pi' \cup \{p_i\}}$ è S -chiusa, $(S \cap G_{p_1 \dots p_i}) / (S \cap G_{p_1 \dots p_{i-1}}) \in \mathfrak{F}_{\pi' \cup \{p_i\}}$ e poiché $\mathfrak{F}_{\pi' \cup \{p_i\}}$ è Q -chiusa appartiene a $\mathfrak{F}_{\pi' \cup \{p_i\}}$ anche la sua immagine nell'omomorfismo naturale di $S / (S \cap G_{p_1 \dots p_{i-1}})$ sul suo quoziente su $S_{p_1 \dots p_{i-1}} / (S \cap G_{p_1 \dots p_{i-1}})$ (notiamo che quest'ultimo gruppo esiste per l'ipotesi di induzione), cioè

$$\frac{\frac{S \cap G_{p_1 \dots p_i}}{S \cap G_{p_1 \dots p_{i-1}}} \cdot \frac{S_{p_1 \dots p_{i-1}}}{S \cap G_{p_1 \dots p_{i-1}}}}{\frac{S_{p_1 \dots p_{i-1}}}{S \cap G_{p_1 \dots p_{i-1}}}} \simeq \frac{(S \cap G_{p_1 \dots p_i}) S_{p_1 \dots p_{i-1}}}{S_{p_1 \dots p_{i-1}}}$$

Dunque, quest'ultimo è un sottogruppo normale di $S / S_{p_1 \dots p_{i-1}}$ che appartiene a $\mathfrak{F}_{\pi' \cup \{p_i\}}$, e ciò significa che

$$\frac{(S \cap G_{p_1 \dots p_i}) S_{p_1 \dots p_{i-1}}}{S_{p_1 \dots p_{i-1}}} \leq \left(\frac{S}{S_{p_1 \dots p_{i-1}}} \right)_{p_i} = \frac{S_{p_1 \dots p_i}}{S_{p_1 \dots p_{i-1}}}$$

da cui $(S \cap G_{p_1 \dots p_i}) S_{p_1 \dots p_{i-1}} \leq S_{p_1 \dots p_i}$ e a maggior ragione $S \cap G_{p_1 \dots p_i} \leq S_{p_1 \dots p_i}$, come si voleva.

Se S è un p_1 -sottogruppo di Sylow di G e non è contenuto in G_{p_1} , si ha $S_{p_1} = S > S \cap G_{p_1}$.

2.4. ([3, 2.7]). - Se $N \triangleleft G$ e $i \leq n$, si ha

$$N_{p_1 \dots p_i} = N \cap G_{p_1 \dots p_i}$$

2.5. Se $q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_i$ sono elementi non necessariamente distinti di π ,

$$(G / G_{q_1 \dots q_s})_{p_1 \dots p_i} = G_{q_1 \dots q_s, p_1 \dots p_i} / G_{q_1 \dots q_s}.$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione su i (infatti, se $i = 1$, l'asserto è la definizione stessa di $G_{q_1 \dots q_s, p_1}$) e supponiamo dunque

$$\left(\frac{G}{G_{q_1 \dots q_s}} \right)_{p_1 \dots p_{i-1}} = \frac{G_{q_1 \dots q_s, p_1 \dots p_{i-1}}}{G_{q_1 \dots q_s}}.$$

Per definizione, appartiene a $\mathfrak{F}_{\pi' \cup \{p_i\}}$ il quoziente $G_{q_1 \dots q_s p_1 \dots p_i} / G_{q_1 \dots q_s p_1 \dots p_{i-1}}$ e dunque anche

$$\frac{\frac{G_{q_1 \dots q_s p_1 \dots p_i}}{G_{q_1 \dots q_s}}}{\frac{G_{q_1 \dots q_s p_1 \dots p_{i-1}}}{G_{q_1 \dots q_s}}} = \frac{\frac{G_{q_1 \dots q_s p_1 \dots p_i}}{G_{q_1 \dots q_s}}}{\left(\frac{G}{G_{q_1 \dots q_s}}\right)_{p_1 \dots p_{i-1}}}$$

ad esso isomorfo.

Tale gruppo è normale in $(G/G_{q_1 \dots q_s}) / (G/G_{q_1 \dots q_s})_{p_1 \dots p_{i-1}}$ (perché $G_{q_1 \dots q_s p_1 \dots p_i} \triangleleft G$ e dunque $G_{q_1 \dots q_s p_1 \dots p_i} / G_{q_1 \dots q_s} \triangleleft G/G_{q_1 \dots q_s}$) e poiché appartiene a $\mathfrak{F}_{\pi' \cup \{p_i\}}$ deve essere

$$\frac{\frac{G_{q_1 \dots q_s p_1 \dots p_i}}{G_{q_1 \dots q_s}}}{\left(\frac{G}{G_{q_1 \dots q_s}}\right)_{p_1 \dots p_{i-1}}} \leq \frac{\left(\frac{G}{G_{q_1 \dots q_s}}\right)_{p_1 \dots p_i}}{\left(\frac{G}{G_{q_1 \dots q_s}}\right)_{p_1 \dots p_{i-1}}}$$

D'altro lato,

$$\begin{aligned} \frac{\frac{G_{q_1 \dots q_s p_1 \dots p_i}}{G_{q_1 \dots q_s}}}{\left(\frac{G}{G_{q_1 \dots q_s}}\right)_{p_1 \dots p_{i-1}}} &= \frac{\frac{G_{q_1 \dots q_s p_1 \dots p_i}}{G_{q_1 \dots q_s}}}{\frac{G_{q_1 \dots q_s p_1 \dots p_{i-1}}}{G_{q_1 \dots q_s}}} \simeq \frac{G_{q_1 \dots q_s p_1 \dots p_i}}{G_{q_1 \dots q_s p_1 \dots p_{i-1}}} = \\ &= \left(\frac{G}{G_{q_1 \dots q_s p_1 \dots p_{i-1}}}\right)_{p_i} \simeq \left(\frac{\frac{G}{G_{q_1 \dots q_s}}}{\frac{G_{q_1 \dots q_s p_1 \dots p_{i-1}}}{G_{q_1 \dots q_s}}}\right)_{p_i} = \\ &= \left(\frac{\frac{G}{G_{q_1 \dots q_s}}}{\left(\frac{G}{G_{q_1 \dots q_s}}\right)_{p_1 \dots p_{i-1}}}\right)_{p_i} = \frac{\left(\frac{G}{G_{q_1 \dots q_s}}\right)_{p_1 \dots p_i}}{\left(\frac{G}{G_{q_1 \dots q_s}}\right)_{p_1 \dots p_{i-1}}} \end{aligned}$$

e in definitiva si può affermare che

$$\frac{\frac{G_{q_1 \dots q_s p_1 \dots p_i}}{G_{q_1 \dots q_s}}}{\left(\frac{G}{G_{q_1 \dots q_s}}\right)_{p_1 \dots p_{i-1}}} = \frac{\left(\frac{G}{G_{q_1 \dots q_s}}\right)_{p_1 \dots p_i}}{\left(\frac{G}{G_{q_1 \dots q_s}}\right)_{p_1 \dots p_{i-1}}}$$

da cui l'asserto.

2.6. ([3, 1.4]). - Per un gruppo G , sono fatti equivalenti:

- (i) G è π -separabile;
- (ii) esiste una serie π -separante discendente di G che termina con 1 ;
- (iii) esiste una serie π -separante ascendente di G che termina con G .

Sia $(p_1, \dots, p_n) \in \pi^n$.

La $(p_1, \dots, p_n)$ -serie π -separante discendente [ascendente] di G si dice *massimale* se per ogni $p \in \pi$ è $G^{p_1 \dots p_n p} = G^{p_1 \dots p_n} [G_{p_1 \dots p_n p} = G_{p_1 \dots p_n}]$.

Mediante 2.2 [2.5] si vede facilmente che tutte le serie π -separanti discendenti [ascendenti] di G terminano con $G^{\infty} [G_{\infty \pi}]$.

Si dice *altezza [lunghezza]* di una serie π -separante discendente [ascendente] il numero dei suoi fattori non triviali. Una serie π -separante discendente [ascendente] di altezza [lunghezza] n può sempre essere pensata come una $(p_1, \dots, p_n)$ -serie π -separante discendente [ascendente] per un'opportuna $(p_1, \dots, p_n) \in \pi^n$.

Si dice *altezza [lunghezza] π -separabile* di G la minima altezza [lunghezza] delle serie π -separanti discendenti [ascendenti] massimali di G .

Osserviamo che serie π -separanti discendenti [ascendenti] massimali distinte di un gruppo G possono avere altezze [lunghezze] diverse. Siano infatti A il prodotto diretto del gruppo ciclico di ordine 2 per il gruppo alterno su 4 oggetti e B il prodotto diretto del gruppo ciclico di ordine 4 per il gruppo simmetrico su 3 oggetti; la $(2, 3, 2)$ -serie e la $(3, 2)$ -serie π -separante discendente [ascendente] di A [di B] sono massimali ma hanno altezze [lunghezze] diverse.

2.7. Sia G un gruppo e sia $(p_1, \dots, p_n) \in \pi^n$.

Sono fatti equivalenti:

- (i) la $(p_1, \dots, p_n)$ -serie π -separante discendente di G termina con 1 ;
- (ii) $G^{p_1 \dots p_{n-i}} \leq G_{p_n \dots p_{n-i+1}}$ per $1 \leq i < n$;
- (iii) la $(p_n, \dots, p_1)$ -serie π -separante ascendente di G termina con G .

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii).

Per $i = 1$, la (ii) è ovvia perché essendo $(G^{p_1 \dots p_{n-1}})^{p_n} = 1$ deve essere $G^{p_1 \dots p_{n-1}} \in \mathfrak{F}_{\pi \cup \{p_n\}}$, ossia appunto (essendo $G^{p_1 \dots p_{n-1}} \triangleleft G$) $G^{p_1 \dots p_{n-1}} \leq G_{p_n}$.

Procedendo per induzione su i , sia allora

$$(G^{p_1 \dots p_{n-i}})^{p_{n-i+1}} = G^{p_1 \dots p_{n-i+1}} \leq G_{p_n \dots p_{n-i+2}}.$$

Ciò significa $G^{p_1 \dots p_{n-i}} / G_{p_n \dots p_{n-i+2}} \in \mathfrak{F}_{\pi \cup \{p_{n-i+1}\}}$, cioè

$$G^{p_1 \dots p_{n-i}} / G_{p_n \dots p_{n-i+2}} \leq (G / G_{p_n \dots p_{n-i+2}})^{p_{n-i+1}} = G_{p_n \dots p_{n-i+1}} / G_{p_n \dots p_{n-i+2}}$$

da cui $G^{p_1 \dots p_{n-i}} \leq G_{p_n \dots p_{n-i+1}}$, come si voleva.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Per $i = 1$, la (ii) diventa $G^{p_1 \dots p_{n-1}} \leq G_{p_n}$, cioè $G^{p_1 \dots p_{n-1}} \in \mathfrak{F}_{\pi \cup \{p_n\}}$ e dunque $G^{p_1 \dots p_n} = (G^{p_1 \dots p_{n-1}})^{p_n} = 1$ ossia la (i).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Per $i = n - 1$, la (ii) diventa $G^{p_1} \leq G_{p_n \dots p_2}$, cioè $G / G_{p_n \dots p_2} \in \mathfrak{F}_{\pi \cup \{p_1\}}$ e dunque $G_{p_n \dots p_1} = G$, ossia la (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Per $i = n - 1$ (cioè $n - 1 = 1$), la (ii) è ovvia perché essendo $G_{p_n \dots p_1} = G$ deve essere $G/G_{p_n \dots p_2} \in \mathfrak{F}_{\pi' \cup \{p_1\}}$, ossia appunto $G^{p_1} \leq G_{p_n \dots p_2}$.

Procedendo per induzione su $n - i$, sia allora $G^{p_1 \dots p_{n-i-1}} \leq G_{p_n \dots p_{n-i}}$, cioè (poiché $G^{p_1 \dots p_{n-i-1}} \triangleleft G$) $G^{p_1 \dots p_{n-i-1}} \triangleleft G_{p_n \dots p_{n-i}}$. Ciò significa, per 1.1,

$$G^{p_1 \dots p_{n-i}} = (G^{p_1 \dots p_{n-i-1}})^{p_{n-i}} \leq (G_{p_n \dots p_{n-i}})^{p_{n-i}}.$$

Per definizione di $G_{p_n \dots p_{n-i}}$, si ha $G_{p_n \dots p_{n-i}}/G_{p_n \dots p_{n-i+1}} \in \mathfrak{F}_{\pi' \cup \{p_{n-i}\}}$ e dunque $(G_{p_n \dots p_{n-i}})^{p_{n-i}} \leq G_{p_n \dots p_{n-i+1}}$ da cui infine

$$G^{p_1 \dots p_{n-i}} \leq (G_{p_n \dots p_{n-i}})^{p_{n-i}} \leq G_{p_n \dots p_{n-i+1}},$$

come si voleva.

2.8. Sia G un gruppo π -separabile e sia $(p_1, \dots, p_n) \in \pi^n$.

Sono fatti equivalenti:

(i) la $(p_1, \dots, p_n)$ -serie π -separante discendente di G è massimale (cioè termina con 1) ed ha altezza minima n fra le serie π -separanti discendenti massimali di G ;

(ii) la $(p_n, \dots, p_1)$ -serie π -separante ascendente di G è massimale (cioè termina con G) ed ha lunghezza minima n fra le serie π -separanti ascendenti massimali di G .

Dimostrazione. Proviamo che (i) $\Rightarrow$ (ii); in modo del tutto analogo si vede che (ii) $\Rightarrow$ (i).

Per 2.7 ((i) $\Rightarrow$ (iii)), la $(p_n, \dots, p_1)$ -serie π -separante ascendente di G è massimale. Sia per assurdo $(q_1, \dots, q_m) \in \pi^m$ con $m < n$ tale che la $(q_1, \dots, q_m)$ -serie π -separante ascendente di G termina con G ; per 2.7 ((iii) $\Rightarrow$ (i)), la $(q_m, \dots, q_1)$ -serie π -separante discendente di G termina con 1, ma ciò è assurdo perché $m < n$: dunque la $(p_n, \dots, p_1)$ -serie π -separante ascendente di G ha lunghezza n e tale lunghezza è minima fra le lunghezze delle serie π -separanti ascendenti massimali di G .

Da 2.8 segue immediatamente

2.9. ([3, 2.6]). - Se G è un gruppo π -separabile, l'altezza π -separabile e la lunghezza π -separabile di G sono uguali.

3. GRUPPI π -SEPARABILI DI LUNGHEZZA π -SEPARABILE LIMITATA

Per ogni numero naturale k , indichiamo con $\mathfrak{S}_k^\pi$ la classe dei gruppi π -separabili la cui lunghezza π -separabile è minore o uguale a k .

3.1. Per ogni numero naturale k , la classe $\mathfrak{S}_k^\pi$ è S -chiusa.

Dimostrazione. Siano $G \in \mathfrak{S}_k^\pi$ e $S \leq G$.

Sia $(p_1, \dots, p_n) \in \pi^n$ ($n \leq k$) tale che la $(p_1, \dots, p_n)$ -serie π -separante ascendente di G termina con G . Allora per 2.3 si ha $S_{p_1 \dots p_n} \geq S \cap G_{p_1 \dots p_n} = S \cap G = S$ da cui $S_{p_1 \dots p_n} = S$, cioè la $(p_1, \dots, p_n)$ -serie π -separante ascendente di S (la cui lunghezza π -separabile è al più n e quindi è minore o uguale a k) termina con S e dunque $S \in \mathfrak{S}_k^\pi$.

3.2. Siano k_1, k_2 numeri naturali. Sia G un gruppo, e siano $N_1, N_2 \triangleleft G$ con $G = N_1 N_2$.

Se $N_1 \in \mathfrak{S}_{k_1}^\pi, N_2 \in \mathfrak{S}_{k_2}^\pi$, si ha $G \in \mathfrak{S}_{k_1+k_2}^\pi$.

Dimostrazione. Poiché $N_1 \in \mathfrak{S}_{k_1}^\pi$, esiste $(p_1, \dots, p_n) \in \pi^n$ ($n \leq k_1$) tale che $(N_1)_{p_1 \dots p_n} = N_1$. Per 2.4, $N_1 \leq G_{p_1 \dots p_n}$. Allora, $G/G_{p_1 \dots p_n}$ è immagine epimorfa di $G/N_1 = (N_1 N_2)/N_1$ che è isomorfo a $N_2/(N_1 \cap N_2)$ che è immagine epimorfa di N_2 ; poiché $N_2 \in \mathfrak{S}_{k_2}^\pi$ e $\mathfrak{S}_{k_2}^\pi$ è Q -chiusa, $G/G_{p_1 \dots p_n} \in \mathfrak{S}_{k_2}^\pi$ e dunque esiste $(q_1, \dots, q_m) \in \pi^m$ ($m \leq k_2$) tale che $(G/G_{p_1 \dots p_n})_{q_1 \dots q_m} = G/G_{p_1 \dots p_n}$. Ricordando 2.5 si ha allora $G_{p_1 \dots p_n q_1 \dots q_m} / G_{p_1 \dots p_n} = G/G_{p_1 \dots p_n}$, ossia $G_{p_1 \dots p_n q_1 \dots q_m} = G$ da cui $G \in \mathfrak{S}_{n+m}^\pi \leq \mathfrak{S}_{k_1+k_2}^\pi$ come si voleva.

3.3. Per ogni numero naturale k , la classe $\mathfrak{S}_k^\pi$ è Q -chiusa (ma non è, in generale, una formazione).

Dimostrazione. Che la classe $\mathfrak{S}_k^\pi$ sia Q -chiusa è conseguenza di 2.1.

In [3, 2.9] si afferma che $\mathfrak{S}_k^\pi$ è anche R_0 -chiusa e dunque è una formazione; questo è in generale falso, come mostra il seguente esempio per $k = 1$: siano p e q due elementi distinti di π (se a π appartiene un solo elemento, ogni gruppo è π -separabile di lunghezza π -separabile 1) e sia G il prodotto diretto di un gruppo P di ordine p per un gruppo Q di ordine q ; allora $G/P \in \mathfrak{S}_1^\pi, G/Q \in \mathfrak{S}_1^\pi$ ma $G/(P \cap Q) \simeq G \in \mathfrak{S}_2^\pi \setminus \mathfrak{S}_1^\pi$.

Si potrebbe provare un analogo di 3.2 per il prodotto sottodiretto.

4. LA φ -ALTEZZA E LA φ -LUNGHEZZA π -SEPARABILE DI UN GRUPPO π -SEPARABILE

Sia φ un'applicazione suriettiva dell'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali su π .

Posto $p_i = \varphi(i)$ per $i \in \mathbf{N}$, possiamo definire la φ -altezza π -separabile $h_\varphi(G)$ di un gruppo G π -separabile ponendo

$$\begin{aligned} h_\varphi(G) &= 1 && \text{se } G^{p_1} = 1; \\ h_\varphi(G) &= n && \text{se } G^{p_1 \dots p_n} = 1 \quad \text{e } G^{p_1 \dots p_{n-1}} \neq 1; \\ h_\varphi(G) &= \infty && \text{se } G^{p_1 \dots p_n} \neq 1 \quad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Notiamo che un gruppo π -separabile può avere φ -altezza π -separabile infinita; ad esempio, se π è l'insieme di tutti i numeri primi e, per ogni

$n \in \mathbf{N}$, $\varphi(n)$ è l' n -simo numero primo nell'ordinamento naturale, il gruppo A già considerato nel paragrafo 2 è π -separabile ma ha φ -altezza π -separabile infinita.

Analogamente, si può definire una φ -lunghezza π -separabile $l_\varphi(G)$ di un gruppo G π -separabile ponendo

$$\begin{aligned} l_\varphi(G) &= 1 && \text{se } G_{p_1} = G; \\ l_\varphi(G) &= n && \text{se } G_{p_1 \dots p_n} = G \quad \text{e } G_{p_1 \dots p_{n-1}} \neq G; \\ l_\varphi(G) &= \infty && \text{se } G_{p_1 \dots p_n} \neq G \quad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Valgono per la φ -lunghezza π -separabile le stesse osservazioni fatte per la φ -altezza π -separabile; inoltre, naturalmente, φ -altezza π -separabile e φ -lunghezza π -separabile di un gruppo π -separabile non coincidono in generale.

Per ogni numero naturale k e per ogni $\varphi: \mathbf{N} \rightarrow \pi$ suriettiva, indichiamo con $\mathfrak{S}_{\varphi, k}^\pi$ [$\mathfrak{L}_{\varphi, k}^\pi$] la classe dei gruppi π -separabili la cui φ -altezza [φ -lunghezza] π -separabile è minore o uguale a k .

4.1. Per ogni numero naturale k e per ogni $\varphi: \mathbf{N} \rightarrow \pi$ suriettiva, la classe $\mathfrak{S}_{\varphi, k}^\pi$ è una formazione.

Dimostrazione. Vale la dimostrazione di [3, 2.9].

4.2. Per ogni numero naturale k e per ogni $\varphi: \mathbf{N} \rightarrow \pi$ suriettiva, la classe $\mathfrak{L}_{\varphi, k}^\pi$ è una classe di Fitting S -chiusa.

Dimostrazione. Come in 3.1 si prova che $\mathfrak{L}_{\varphi, k}^\pi$ è S -chiusa.

Siano poi $N_1, N_2 \in \mathfrak{L}_{\varphi, k}^\pi$ con $N_1, N_2 \triangleleft G$ e $N_1 N_2 = G$. Allora $(N_i)_{p_1 \dots p_k} = N_i$ per $i = 1, 2$ e poiché $N_i \triangleleft G$ ($i = 1, 2$) si ha per 2.4 $(N_i)_{p_1 \dots p_k} = N_i \cap G_{p_1 \dots p_k}$ cosicché $N_i = N_i \cap G_{p_1 \dots p_k}$ ossia $N_i \leq G_{p_1 \dots p_k}$ per $i = 1, 2$.

Dunque $G = N_1 N_2 \leq G_{p_1 \dots p_k} \leq G$ e quindi $G = G_{p_1 \dots p_k}$, ossia $G \in \mathfrak{L}_{\varphi, k}^\pi$ come si voleva.

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. A. BRYCE and J. COSSEY (1974) - *Metanilpotent Fitting classes*, « J. Austral. Math. Soc. », Ser. A, 17, 285-304.
- [2] S. A. CHUNIKHIN (1969) - *Subgroups of finite groups*, Wolters-Noordhoff publishing, Groningen.
- [3] J. M. DE OLAZABAL (1976) - *Series características de un grupo finito π -separable* (Chunikhin), « Rev. Acad. Ci. Zaragoza » (2) 31, n. 3-4, 137-146.