
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

GIUSEPPE GRIOLI

**Sulla propagazione di onde termomeccaniche nei
continui**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 67 (1979), n.5, p. 332–339.*

Accademia Nazionale dei Lincei

[<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_67_5_332_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_67_5_332_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Fisica matematica. — *Sulla propagazione di onde termomeccaniche nei continui.* Nota I (*) del Socio GIUSEPPE GRIOLI.

SUMMARY. — It is proposed a theory of propagation of discontinuity waves which is not affected by the paradox of an infinite velocity of propagation of temperature. The theory is based on a constitutive equation of differential type for the heat flux, depending on the deformation of material.

Applications are made concerning the case of a non viscous fluid and that of an elastic body.

Il problema della propagazione del calore ha destato in questi ultimi tempi l'interesse di molti studiosi. Proposte varie sono state avanzate per dirimere il cosiddetto paradosso della propagazione del calore con velocità infinita, sia legando il fenomeno termico al comportamento meccanico del mezzo, sia considerandolo a se, come se il continuo fosse rigido.

Si sono stabilite a tal fine opportune generalizzazioni delle equazioni costitutive e delle funzioni termodinamiche di stato (a parer mio, a volte in modo discutibile) o si è modificata la classica legge (di Fourier) che lega il flusso termico alla temperatura o si sono considerate insieme le due procedure (1).

Una visione corretta del fenomeno di propagazione del calore non può prescindere dall'influenza dei fenomeni puramente meccanici, ad eccezione, se mai, dei casi ideali di temperatura ignorabile e dei corpi rigidi. Si riconosce facilmente che la scrittura corretta dell'equazione di propagazione del calore elimina l'inconveniente della propagazione con velocità infinita senza bisogno di modificare né le equazioni costitutive stress-strain né la legge che lega il flusso termico al gradiente della temperatura, ma rende la velocità di propagazione uguale a quella delle onde acustiche longitudinali.

Vari motivi possono far ritenere non accettabile tale risultato ma, a parer mio, un suo lato debole risiede nel fatto che mantenendo le ipotesi tradizionali di continuità attraverso il fronte d'onda della velocità e della temperatura e delle sue derivate e supponendo discontinue le derivate prime della velocità e le seconde della temperatura manca l'influenza della propagazione termica su quella meccanica, anche in casi né isotermici né adiabatici: infatti, il sistema di equazioni sulle discontinuità che proviene dalle equazioni della dinamica dei continui non dipende, in tal caso, dal para-

(*) Presentata nella seduta del 27 novembre 1979.

(1) La letteratura relativa alla termodinamica dei continui e alle equazioni costitutive è vastissima e ben nota. Lavori più propriamente attinenti alle questioni qui considerate sono in [1], ..., [12].

metro caratteristico delle discontinuità delle derivate seconde della temperatura e da solo determina la velocità di propagazione.

Inconvenienti di tale tipo non si presentano in una teoria proposta recentemente [12]. In essa vengono mantenute le ipotesi usuali per quanto riguarda le discontinuità delle onde puramente meccaniche ma si ammette che attraverso il fronte d'onda la temperatura sia continua ma siano discontinue sia le sue derivate prime sia le seconde. Ciò implica l'abbandono delle classiche semplici formule di compatibilità di Hugoniot-Hadamard ma richiede l'uso della teoria delle discontinuità iterate (secondo Thomas) e presenta problemi analitici del tutto nuovi.

Ha destato interesse in questi ultimi tempi un'ipotesi costitutiva per il flusso termico già considerata ma non del tutto accolta da Maxwell [1]. Essa ammette un legame lineare tra il flusso termico, la sua derivata prima temporale e il gradiente della temperatura, introducendo un coefficiente di rilassamento corrispondente a inerzia termica. L'uso di tale relazione di cui esiste già qualche generalizzazione [10] è stato approfondito da vari Autori ⁽²⁾. Associando ad essa la nota relazione dell'entropia, discendente dal secondo principio della termodinamica (che in realtà è una disuguaglianza) ed eliminando il vettore che definisce il flusso di calore si giunge a un'equazione non più parabolica che dà velocità di propagazione finita. È da osservarsi, tuttavia, che il procedimento di eliminazione, ove si tenga conto dell'interazione meccanica, porta alla presenza di derivate terze delle componenti di spostamento, causando delle complicazioni in quanto attraverso il fronte d'onda sono discontinue anche le sue derivate seconde e ciò richiede l'uso della teoria delle discontinuità iterate ⁽³⁾. L'inconveniente non si presenta nel caso dei corpi rigidi ma in ogni caso manca una completa interazione tra fenomeni termici e fenomeni meccanici.

Una teoria che consideri i fenomeni termomeccanici come inscindibili, modificando il meno possibile le vedute tradizionali e senza bisogno di ricorrere alla teoria delle discontinuità iterate, si può stabilire sulla base dell'ipotesi costitutiva prima richiamata per il vettore di flusso termico, ipotesi che sembra molto interessante, soltanto presentandola in forma più generale e adatta alla meccanica dei continui, con l'avvertenza di evitare procedimenti di eliminazione che implicino la crescita dell'ordine differenziale delle equazioni onde evitare complicazioni per le condizioni di compatibilità delle discontinuità. D'altronde è ben noto che la forma differenziale dei principi della termodinamica è espressa da relazioni differenziali del primo ordine: solo artifici di eliminazione portano alle note equazioni differenziali di ordine superiore (come, in particolare, accade per l'equazione del calore).

(2) In particolare, vedi [2], ..., [6].

(3) Naturalmente, ci si riferisce al solo problema della determinazione delle possibili velocità di propagazione, mentre è ben noto che quando si voglia stabilire la legge di evoluzione temporale delle discontinuità non si può prescindere dall'uso della teoria delle discontinuità iterate.

Le ipotesi fondamentali che saranno ammesse in tale teoria sono: la continuità delle componenti di spostamento e delle loro derivate prime attraverso il fronte d'onda, quella del vettore flusso di calore e della temperatura, l'ammissione di discontinuità di prima specie per le derivate seconde dello spostamento e delle prime della temperatura e del vettore che caratterizza il flusso termico. Precisate le equazioni risolventi, a titolo applicativo ho considerato in modo esplicito il caso dei fluidi non viscosi e quello dei corpi iperelastici isotropi e poco deformabili.

In ognuno dei casi considerati, la velocità di propagazione dell'onda termomeccanica dipende, in ultima analisi, da un'equazione di quarto grado nella velocità di propagazione che ammette in generale due sole radici reali positive, una maggiore e una minore di quella ben nota che esprime la velocità di propagazione delle onde acustiche longitudinali. È da osservarsi che l'interazione tra propagazione termica e propagazione meccanica fa sì che nel caso dei solidi iperelastici le due onde possibili siano né trasversali né longitudinali, come invece accade nella trattazione tradizionale. Nel caso dei fluidi non viscosi si trova che la propagazione è possibile solo per onde longitudinali come nella teoria corrente ma è interessante osservare che, come nel caso dei solidi elastici, sono possibili due distinte velocità di propagazione le quali, in un certo senso, si può dire che provengano da una diramazione di quella solitamente ammessa, in quanto, essendo esse una maggiore e una minore di essa, ad essa, unica, si riducono quando si fa tendere a zero il coefficiente di rilassamento. L'esistenza di due possibili onde termomeccaniche (due suoni) anche per i fluidi accosta tale tipo di continuo ai solidi elastici anche dal punto di vista della propagazione ondosa ⁽⁴⁾.

I. - PREMESSA

Sia C la configurazione attuale (all'istante t) di un continuo che subisce un processo evolutivo termomeccanico caratterizzato dai valori attuali dello stress, della temperatura assoluta, T , della densità e dai valori di taluni potenziali termodinamici, quali energia interna, entropia, energia libera, ecc. Dette x_r le coordinate della posizione attuale del generico elemento del continuo rispetto a un presupposto riferimento cartesiano, trirettangolo levogiro, denoterò con E ed I le densità spaziali dell'entropia e dell'energia libera da pensarsi quali funzioni delle x_r e di t . Denoterò, inoltre, con $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x_r, t)$ il vettore che caratterizza il flusso di calore.

È ben nota la relazione locale, conseguenza della disuguaglianza di Clausius-Duhem,

$$(1.1) \quad \dot{E} + \frac{I}{T} \operatorname{div}_P \mathbf{q} \geq 0,$$

(4) La segnalazione della possibilità di un secondo suono in un fluido non è nuova (ved. ad esempio [11]).

ove il punto denota derivazione materiale (totale) rispetto al tempo e si è supposta assente un'eventuale sorgente la cui presenza non avrebbe significato essenziale per il seguito.

Tradizionalmente, alla (1.1) si associa la relazione costitutiva

$$(1.2) \quad \mathbf{q} = -L \operatorname{grad}_P T,$$

ove L rappresenta un'operatore matriciale lineare (che si riduce a un semplice coefficiente nel caso di isotropia) soddisfacente alla relazione

$$(1.3) \quad L_{r_s z_r z_s} \geq 0.$$

Le funzioni di stato E ed I oltre che da T dipenderanno anche dal complesso delle variabili che caratterizzano la deformazione del continuo. Le indicherò con a_1, a_2, \dots, a_n .

Denotando con c il calore specifico sotto configurazione costante, risulta

$$(1.4) \quad E = -\frac{\partial I}{\partial T}, \quad c = -T \frac{\partial^2 I}{\partial T^2}.$$

Da (1.1), (1.4) segue

$$(1.5) \quad c\dot{T} - T \frac{\partial^2 I}{\partial T \partial a_s} \dot{a}_s + \operatorname{div}_P \mathbf{q} \geq 0.$$

Nel caso di trasformazioni reversibili nella (1.5) si assume il segno di uguaglianza, ma anche nel caso di irreversibilità si ritiene generalmente che la (1.5) priva del termine nelle \dot{a}_s e tenuto conto di (1.2), pensata come uguaglianza rappresenti l'equazione di propagazione del calore.

In tal caso, ammettendo, com'è abituale, che la propagazione avvenga per onde che trasportano discontinuità di prima specie delle derivate seconde della temperatura (con T e le sue derivate prime continue) si cade nel paradosso detto (a parer mio erroneamente) della velocità infinita di propagazione. Meglio sarebbe interpretare il risultato come indizio di propagazione di una discontinuità di ampiezza nulla.

2. - QUALCHE CONSEGUENZA DELL'EQUAZIONE ASSOCIATA ALLA (1.5)

Si consideri la (1.5) come uguaglianza e, associata alla (1.2), la si interpreti come equazione del calore. Si supponga che lo stress dipenda dalla temperatura, ma non dalle sue derivate (come accade in casi concreti di interesse fisico: fluidi non viscosi, di Navier-Stokes, solidi iperelastici) e che la temperatura e le sue derivate prime siano continue anche attraverso il fronte d'onda mentre le sue derivate seconde presentano nel suo attraversamento delle discontinuità di prima specie. In tale situazione non c'è interazione tra propagazione di onde acustiche di accelerazione e propagazione

del calore. Denotando con $[w]$ il valore della discontinuità di una qualunque funzione w attraverso il fronte d'onda, da (1.5), tenuto conto di (1.2), si deduce

$$(2.1) \quad -T \frac{\partial^2 I}{\partial T \partial a_s} [\dot{a}_s] + \frac{\partial L_{is}}{\partial a_r} [a_{r/i}] T_{/s} + L_{ir} [T_{/ir}] = 0,$$

ove la sbarretta, $(/)$, denota derivazione rispetto alle coordinate x_i .

Note che siano le discontinuità delle derivate delle a_s in seguito alla risoluzione del problema puramente meccanico di propagazione (che ha portato alla determinazione delle possibili velocità di propagazione), la (2.1) determina le $[T_{/ir}]$.

Si deduce così che la velocità di propagazione del calore coincide con quella di un certo tipo di onde acustiche (ad esempio, nel caso di corpi elastici poco deformabili da (2.1) segue che il trasporto di una discontinuità termica può aver luogo soltanto se associata a onde acustiche longitudinali). Tale circostanza, se anche da un punto di vista fisico può non essere a priori scartata, dal punto di vista analitico dà luogo a un grosso inconveniente in quanto non consente di assegnare a piacere il valore iniziale della discontinuità termica, il che fa ritenere che il problema sia mal posto.

Poiché le (1.5), (2.1) sono conseguenze necessarie dei principi generali della meccanica e della termodinamica, l'unico modo che permette di modificare le cose è quello di riconsiderare l'equazione costitutiva (1.2) e l'ordine delle derivate che sono discontinue attraverso il fronte d'onda. È altresì desiderabile che vi sia una completa interazione tra propagazione termica e propagazione meccanica e che il problema non si scinda in problemi separati come nel caso ora esaminato.

3. - PROPOSTA DI UNA TEORIA DELLA PROPAGAZIONE DI ONDE TERMOMECCANICHE

Vari Autori [1], [2], hanno proposto una generalizzazione della relazione costitutiva (1.2) sostituendola con quella più generale:

$$(3.1) \quad \dot{\mathbf{q}} + h(\mathbf{q} + L \operatorname{grad}_p T) = 0,$$

ove h ed L sono dei coefficienti non negativi. Lo stesso Maxwell [1] considerò un'ipotesi del tipo (3.1) ma ritenne poi opportuno sopprimere il termine con la derivata temporale, ricadendo nella (1.2) [a cui si giunge dalla (3.1) facendo tendere ad infinito h].

Associando la (1.5) alla (3.1) senza il termine nelle \dot{a}_s e operando con un procedimento di eliminazione dei vettori \mathbf{q} e $\dot{\mathbf{q}}$ si ottiene un'equazione più generale di quella di Fourier per la propagazione del calore, la quale oltre i soliti termini contiene la derivata seconda temporale della temperatura. Il corrispondente problema analitico non è più parabolico ma iperbolico e ammette onde con velocità di propagazione finita [2].

Una giustificazione della (3.1), fatta con considerazioni di meccanica statistica, trovasi in [2] e in [10] ove si giunge a un'espressione ancora più generale della (3.1) in cui sono presenti derivate della temperatura di ordine superiore al primo.

L'applicazione della (3.1) ai fenomeni termomeccanici fondata su un procedimento di eliminazione dei vettori \mathbf{q} , $\dot{\mathbf{q}}$ (procedimento che può presentare delle difficoltà algoritmiche di attuazione, ad eccezione del caso unidimensionale) in generale dà luogo a due inconvenienti. Il primo consiste, come si è già osservato, nel fatto che il mantenimento dell'ipotesi di continuità delle derivate prime della temperatura impedisce una desiderabile interazione tra fenomeni termici e fenomeni meccanici di propagazione. Il secondo è dovuto al fatto che detta eliminazione (se i termini nelle a_s vanno conservati, come deve essere) introduce derivate delle \dot{a}_s , il che rappresenta una non lieve complicazione e in un certo senso stravolge il classico problema delle onde di accelerazione. Ad esempio, nel caso dei corpi elastici le a_s coincidono con le derivate prime delle x_i rispetto alle coordinate del generico punto di un presupposto stato di riferimento e il sistema differenziale risolvibile, effettuata l'eliminazione di \mathbf{q} e $\dot{\mathbf{q}}$, contiene le derivate terze delle componenti di spostamento. Volendo mantenere l'ipotesi tradizionale di onde di accelerazione non sarà più possibile usare le semplici formule di compatibilità di Hugoniot-Hadamard ma bisognerà fare ricorso a quelle relative alle discontinuità iterate (Thomas) e il problema analitico che si presenta ha un aspetto del tutto nuovo. Come ho già accennato, una teoria fondata sulla teoria delle discontinuità iterate è stata proposta recentemente da A. Bressan [12]. In essa si ammette che le derivate prime della temperatura siano discontinue nell'attraversamento del fronte d'onda ma si mantiene valida l'ipotesi costitutiva (1.2).

Mostrerò come sia possibile stabilire una teoria priva dei vari inconvenienti segnalati, modificando il meno possibile le vedute tradizionali, sulla base di un'equazione costitutiva un po' più generale della (3.1). A tal fine è fondamentale l'osservazione che la (3.1) si può dedurre dalla relazione costitutiva

$$(3.2) \quad \mathbf{q} = -hL \int_0^{\infty} e^{-hs} \mathbf{g}(t-s) ds,$$

ove si è indicato con \mathbf{g} il gradiente della temperatura e dalla quale essa deriva nell'ipotesi di h e L costanti. La (3.2) fa dipendere il vettore flusso termico dalla storia del gradiente di temperatura. Tuttavia, si deve osservare che l'auspicabile interazione tra fenomeni termici e fenomeni meccanici non consente di ritenere L indipendente dalla deformazione del continuo, né dalla sua temperatura. Ammettendo valida una relazione costitutiva del tipo (3.2) che ritengo molto interessante, supporrò, pertanto che h sia una costante di rilassamento positiva ma che L sia un'operatore matriciale funzione delle a_s e di T , che si riduce a un semplice coefficiente nel caso di isotropia. In tale

ipotesi, conseguenza differenziale della (3.2) è non più la (3.1) ma la relazione costitutiva

$$(3.3) \quad z\dot{\mathbf{q}} + (1 - z\dot{\mathbf{L}}\mathbf{L}^{-1})\mathbf{q} + \mathbf{L}\text{grad}_P T = 0,$$

ove la costante z corrisponde a $1/h$ ($z = 1/h$). La (3.3) più generale della (3.1), si riduce alla (1.2) per $z = 0$.

Il sistema delle equazioni (1.5), (3.3) rappresenta il contributo propriamente termodinamico al fenomeno di propagazione e va associato alle equazioni indefinite della meccanica dei continui. Alle (1.5), (3.3) vanno associate le ipotesi: *a*) \mathbf{q} e T sono ovunque continue nella regione di loro definizione; *b*) le loro derivate prime sono in essa continue ad eccezione che nell'attraversamento del fronte d'onda ove presentano delle discontinuità di prima specie.

Si denoti con V la velocità di propagazione, con $\boldsymbol{\tau}$ e α i parametri caratteristici delle discontinuità di \mathbf{q} e T , con \mathbf{n} il versore della normale al fronte d'onda che si suppone dotato di normale orientata (nel verso di avanzamento). Da (1.5), (3.3), tenuto conto delle note condizioni di compatibilità di Hugoniot-Hadamard, segue

$$(3.4) \quad \begin{cases} cV\alpha - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} + T \frac{\partial^2 I}{\partial T \partial a_s} [\dot{a}_s] = 0, \\ -zV\boldsymbol{\tau} + \alpha \left(\mathbf{L}\mathbf{n} + zV \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial T} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{q} \right) - z \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial a_s} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{q} [\dot{a}_s] = 0. \end{cases}$$

Da (3.4,2) si deduce

$$(3.5) \quad -zV\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} + \alpha \left(\mathbf{L}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} + zV \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial T} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \right) - z \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial a_s} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} [\dot{a}_s] = 0,$$

la quale, confrontata con (3.4,1) dà luogo all'equazione

$$(3.6) \quad \begin{aligned} & \left(zcV^2 - z \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial T} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} V - \mathbf{L}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \right) \alpha + \\ & + \left(T \frac{\partial^2 I}{\partial T \partial a_s} zV + z \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial a_s} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} [\dot{a}_s] \right) = 0. \end{aligned}$$

La (3.6) va associata alle equazioni sulle discontinuità che provengono dalle equazioni della dinamica dei continui. Nell'ipotesi che lo stress dipenda dalle a_s e dalle derivate prime di T , esse si presentano nella forma

$$(3.7) \quad b_{rs} [\dot{a}_s] + b_r \alpha = \rho \ddot{u}_r,$$

ove ρ denota la densità euleriana e u_r le componenti dello spostamento.

OSSERVAZIONE I. Nello stabilire la (3.6) si è supposto $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, in quanto se $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0$ quella relazione cade in difetto. In tal caso vanno riconsiderate le (3.4) e, in particolare, la (3.5), loro conseguenza. In generale si

trova incompatibilità per la presenza di una condizione aggiuntiva che porta a un numero di equazioni algebriche di un'unità superiore a quello dei parametri di discontinuità disponibili. La questione va esaminata e approfondita in relazione ai vari casi concreti che si presentano.

OSSERVAZIONE II. Se il continuo è assimilabile a un corpo rigido le (3.7) non vanno considerate e L si riduce a un coefficiente generalmente dipendente dalla sola temperatura. La (3.6) si riduce al solo termine dipendente da α e la condizione che determina la velocità di propagazione diviene

$$(3.8) \quad zcV^2 - z \frac{\partial L}{\partial T} \mathbf{q} \cdot \mathbf{nV} - L = 0,$$

la quale per ogni valore positivo di z ammette una sola radice reale positiva.

* * *

Se nelle varie relazioni stabilite si pone $z = 0$ esse si identificano con quelle tradizionali rette dalla (1.2) e danno luogo agli inconvenienti segnalati. In particolare esse sono incompatibili con la presenza di discontinuità delle derivate prime della temperatura, data l'ammessa continuità per il vettore \mathbf{q} (a meno che non si ammetta propagazione con velocità infinita). In realtà, se si riflette che \mathbf{q} esprime una velocità di flusso termico sembra naturale attribuire a z il significato di coefficiente di inerzia termica e assimilare il calore a un fluido dotato di massa, in modo che l'annullarsi di z non ha plausibilità fisica.

BIBLIOGRAFIA

- [1] J. C. MAXWELL (1867) - « Phil. Trans. Roy. Soc. », 157 A 49.
- [2] C. CATTANEO (1948) - « Atti del Seminario matematico e fisico dell'Università di Modena », 3.
- [3] P. VERNOTTE (1958) - « Compt. Rend. Acad. sci. », 246.
- [4] C. CATTANEO (1958) - « Compt. Rend. Acad. sci. », 247.
- [5] R. F. NETTLETON (1960) - « Phys. Fluids », 3.
- [6] M. CHESTER (1963) - « Phys. Rev. », 131.
- [7] M. GURTIN and A. PIPKIN (1968) - « Arch. Rat. Mech. and Anal. », 31.
- [8] MEIXNER (1970) - « Arch. Rat. Mech. and Anal. », 39.
- [9] M. CARRASSI and A. MORRO (1972) - « Nuovo Cimento », 9 B.
- [10] M. CARRASSI (1978) - « Nuovo Cimento », 46 B.
- [11] K. A. LINDSAY and B. STRAUGHAN, (1978) - « Arch. Rat. Mech. and Anal. », 68.
- [12] A. BRESSAN (1979) - In corso di stampa nelle « Memorie dell'Accademia Naz. dei Lincei » (presentata nel giugno).