Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Antonio Claudio Grioli

Sul decadimento delle discontinuità di accelerazione in un fluido linearmente viscoso di Cosserat

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **67** (1979), n.5, p. 324–331.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_67_5_324_0>

Fisica matematica. — *Sul decadimento delle discontinuità di accelerazione in un fluido linearmente viscoso di Cosserat* (*). Nota (**) di ANTONIO CLAUDIO GRIOLI, presentata dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — In a previous paper I have proved that in a subclass of viscous fluids with structure some longitudinal acceleration waves are possible.

In this Note I state their law of decay when the fluid is at rest in its unperturbed region.

Waves carrying discontinuities in the third derivatives of the velocity are induced, whereas in some particular cases also waves carrying discontinuities in the second derivatives of the velocity are induced.

In una Nota precedente ho dimostrato che per una classe di fluidi di Cosserat, linearmente viscosi, omogenei e isotropi, in condizioni isoterme o adiabatiche, sono possibili soltanto onde di accelerazione longitudinali, trasportanti discontinuità di prima specie delle derivate prime delle sole velocità, ma non delle velocità angolari, e che queste si propagano con la medesima velocità che nei fluidi classici non viscosi.

Per lo studio dell'evoluzione di tali discontinuità, oggetto della presente nota, è sufficiente valutare le conseguenze della derivata temporale delle equazioni indefinite.

Si trova il risultato, che può sembrare strano, che i coefficienti di viscosità non influiscono sull'evoluzione di tali discontinuità, che è proprio quella del caso non viscoso.

La legge temporale di decadimento è stata stabilita nel caso in cui il fluido sia in quiete nella regione non perturbata. Si trova che l'ampiezza delle discontinuità decade tendendo a zero quando l'onda va all'infinito se la forza, che ho supposto costante, ha componente non positiva secondo i raggi di propagazione, mentre tende ad un limite finito se tale componente è positiva.

Si trova inoltre che in generale vengono indotte onde trasportanti discontinuità delle derivate terze della velocità angolare, mentre nel caso particolare che i coefficienti di viscosità soddisfino certe condizioni particolari sono indotte onde trasportanti discontinuità delle derivate seconde di tale velocità.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.
(**) Pervenuta all'Accademia l'8 ottobre 1979.

1. – PREMESSE. ALCUNE FORMULE DI ITERAZIONE.

In [1] ho dimostrato che affinché un fluido di Cosserat C linearmente viscoso omogeneo e isotropo, in condizioni isoterme o adiabatiche, possa essere sede di propagazione di onde di accelerazione, è necessario che i coefficienti di viscosità soddisfino alle relazioni:

$$\lambda = 0 \qquad \chi = -2\mu . \tag{1.1}$$

Denotando con la virgola derivazione parziale rispetto alle coordinate dello stato attuale, in base alle (1.1) le equazioni costitutive di C sono:

$$\begin{aligned} t_{kl} &= -\Pi\delta_{kl} + \mu(v_{k,l} - v_{l,k} + 2\varepsilon_{klr}\omega_r) \\ \psi_{kl} &= \alpha\omega_{r,r}\delta_{kl} + \beta\omega_{k,l} + \gamma\omega_{l,k} \end{aligned} \tag{1.2}$$

mentre le equazioni di campo sono:

$$\begin{aligned} &-\Pi_{,l} + \mu(v_{k,kl} - v_{l,kk}) - 2\mu\varepsilon_{lkm}\omega_{m,k} + \rho(F_l - \dot v_l) = 0 \\ &(\alpha + \beta)\omega_{k,kl} + \gamma\omega_{l,kk} - 2\mu\varepsilon_{lkm}v_{m,k} + 4\mu\omega_l + \rho(M_l - j\dot\omega_l) = 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

ove col punto si è indicata derivazione lagrangiana rispetto al tempo.

L'equazione di continuità è infine:

$$\dot\rho + \rho v_{k,k} = 0 . \tag{1.4}$$

Supposte le (1.1) soddisfatte, le uniche onde di accelerazione possibili in C sono onde longitudinali trasportanti discontinuità delle derivate prime delle velocità, ma non delle velocità angolari. Denotando con una parentesi quadra le discontinuità attraverso il fronte d'onda σ_t dovrà dunque essere:

$$\begin{aligned} &[v_r] = 0 \qquad [v_{r,s}] = U_r N_s \qquad [\dot v_r] = -VU_r \\ &[v_{r,sh}] = U'_r N_s N_h + (x^\Gamma_s N_h + x^\Gamma_h N_s) U_{r/\Gamma} - x_{s\Gamma} x_{h\Delta} b^{\Gamma\Delta} U_r \\ &[\omega_r] = [\omega_{r,s}] = [\dot\omega_r] = 0 \qquad [\omega_{r,sh}] = W'_r N_s N_h \\ &[\rho_{,s}] = \frac{\rho U}{V} N_s \qquad [\dot\rho] = -\rho U \\ &U_r = [v_{r,s} N_s] = UN_r \qquad U'_r = [v_{r,sh} N_s N_h] \qquad W'_r = [\omega_{r,sh} N_s N_h] \end{aligned} \tag{1.5}$$

ove $\mathbf{W}'$ può essere diverso da zero soltanto se i coefficienti di viscosità α, β e γ soddisfano alle

$$\alpha = 0 \qquad \gamma = -\beta \tag{1.6}$$

oppure alle:

$$\beta = \gamma = 0 \tag{1.6$'$}$$

Nel primo caso sarà

$$\mathbf{W}' = W' \mathbf{N}$$

mentre nel secondo:

$$\mathbf{W}' \cdot \mathbf{N} = 0$$

V indica la velocità di propagazione di σ_t rispetto al continuo, data da:

$$V = u_n - \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{N} = \sqrt{\Pi'} \qquad \Pi' = \frac{d\Pi}{d\rho}$$

mentre u_n è la velocità di avanzamento normale ed $\mathbf{N}$ la normale al fronte d'onda. Deve inoltre essere [1]:

$$U_{/r} = U'_h \, x_{h\Gamma} . \tag{1.7}$$

Nelle (1.5) e (1.7) con la sbarretta si è indicata derivazione covariante rispetto alle coordinate sulla superficie [2] mentre $b^{\Gamma\Delta}$ è il tensore della seconda forma fondamentale su σ_t, soddisfacente le:

$$b_{\Gamma\Delta} = -x_{h\Gamma} \, N_{h/\Delta} \qquad N_{h/\Gamma} = -b_{\Gamma}^{\Delta} \, x_{h\Delta} . \tag{1.8}$$

Data una funzione $\varphi(x, t)$ continua ovunque, ma le cui derivate parziali prime e seconde presentano discontinuità di prima specie nell'attraversamento di σ_t, valgono le:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right] = -u_n B \qquad [\dot{\varphi}] = -VB \qquad [\varphi_{,r}] = BN_r \\ &\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right] = u_n^2 C - 2\, u_n \frac{\delta B}{\delta t} - B \frac{\delta u_n}{\delta t} \\ &\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \, \partial x^r}\right] = -u_n C N_r + \frac{\delta B}{\delta t} N_r - u_n x_r^{\Gamma} B_{/\Gamma} - B x_r^{\Gamma} u_{n/\Gamma} \\ &B = [\varphi_{,h} N_h] \qquad C = [\varphi_{,hk} N_h N_k] \end{aligned} \tag{1.9}$$

ove $\delta/\delta t$ è l'operatore dato da:

$$\frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} + VN_i \frac{\partial}{\partial x_i} . \tag{1.10}$$

(1) Vedi [1].

(2) Qui e nel seguito si intenderà che gli indici greci si riferiscano alle coordinate su σ_t e vadano da 1 a 2, mentre quelli latini si riferiscono alle coordinate dello spazio ambiente e variano da 1 a 3.

Dalle [3]:

$$\ddot{\varphi} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \, \partial x^r} v_r + \varphi_{,rs} v_r v_s + \varphi_{,r} \dot{v}_r \qquad \dot{\overline{\varphi_{,r}}} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_r \, \partial t} + \varphi_{,rs} v_s$$

tenuto conto delle (1.5), (1.9) e della:

$$[\varphi_1 \varphi_2] = [\varphi_1] \varphi_2^+ + \varphi_1^+ [\varphi_2] - [\varphi_1][\varphi_2] \tag{1.11}$$

ove il segno $+$ sta ad indicare che le funzioni sono valutate sulla faccia positiva di σ_t (regione non perturbata), seguono le:

$$\begin{aligned}(1.12) \quad [\ddot{\varphi}] = {} & V^2 C - 2V \frac{\delta B}{\delta t} + VBU - B \frac{\delta V}{\delta t} - B \frac{\delta v_r}{\delta t} N_r - B v_r \frac{\delta N_r}{\delta t} - \\ & - 2 V x_r^\Gamma B_{/\Gamma} v_r + B x_{r\Gamma} x_{s\Delta} b^{\Gamma\Delta} v_r v_s - 2 B x_r^\Gamma V_{/\Gamma} v_r - \\ & - 2 B x_r^\Gamma v_r v_{s/\Gamma} N_s + B N_r \dot{v}_r^+ - VU \varphi_{,r}^+ N_r \\ [\dot{\overline{\varphi_{,r}}}] = {} & - VCN_r + \frac{\delta B}{\delta t} N_r - V x_r^\Gamma B_{/\Gamma} + x_s^\Gamma v_s B_{/\Gamma} N_r - \\ & - B x_r^\Gamma V_{/\Gamma} - B x_r^\Gamma v_{s/\Gamma} N_s .\end{aligned}$$

2. – EVOLUZIONE DELLE DISCONTINUITÀ DELLE DERIVATE PRIME DELLA VELOCITÀ.

Supposto che il fluido sia in uno stato di equilibrio nella regione non perturbata, la velocità di propagazione è costante e questa avviene per raggi rettilinei ed onde parallele; indicando con $s = Vt$ l'ascissa curvilinea lungo i raggi di propagazione, sarà dunque:

$$\frac{\delta}{\delta t} = V \frac{d}{ds} \qquad \frac{\delta N_r}{\delta t} = \frac{\delta V}{\delta t} = V_{/\Gamma} = 0 . \tag{2.1}$$

Derivando $(1.3)_1$ totalmente rispetto al tempo, supponendo la forza di massa costante e continua attraverso σ_t e prendendo le discontinuità attraverso la superficie d'onda, si ottiene:

$$- [\dot{\overline{\Pi_{,l}}}] + \mu [\dot{\overline{H_{kl,k}}}] - 2 \mu \varepsilon_{lkm} [\dot{\overline{\omega_{m,k}}}] + [\dot{\rho}] F_l - [\dot{\rho} \dot{v}_l] - \rho [\ddot{v}_l] = 0 \tag{2.2}$$

ove si è posto:

$$H_{kl} = v_{k,l} - v_{l,k} . \tag{2.3}$$

(3) Il segno $\dot{\overline{}}$ sta ad indicare che prima va eseguita la derivata parziale rispetto alle coordinate e poi quella totale rispetto al tempo.

Tenuto conto delle (1.5), (1.7), (1.8), (1.11), (1.12), (2.1) calcolo i vari termini che compaiono in (2.2).
Si ha:

$$\dot{\overline{\Pi}}_{,l} = \Pi'' \dot{\rho} \rho_{,l} + \Pi' \dot{\overline{\rho}}_{,l} . \tag{2.4}$$

Dall'equazione di continuità segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\rho_{,h} v_h - \rho v_{h,h} \\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^l \partial t} &= -\rho_{,hl} v_h - \rho_{,h} v_{h,l} - \rho_{,l} v_{h,h} - \rho v_{h,hl} . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Da:

$$\dot{\overline{\rho}}_{,l} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial t \, \partial x^l} + \rho_{,lh} v_h$$

tenuto conto di $(2.5)_2$ si ottiene allora:

$$\dot{\overline{\rho}}_{,l} = -\rho_{,h} v_{h,l} - \rho_{,l} v_{h,h} - \rho v_{h,hl} . \tag{2.6}$$

Da (2.3) e (1.5) segue:

$$[H_{kl}] = 0 .$$

La continuità di H_{hl} permette di applicare $(1.12)_2$ e si ottiene:

$$\begin{aligned} [\dot{\overline{H_{kl,k}}}] = &- VC_{kl} N_k - V x_k^\Gamma B_{kl/\Gamma} + x_h^\Gamma v_h B_{kl/\Gamma} N_k - \\ &- B_{kl} x_k^\Gamma v_{h/\Gamma} N_h + \frac{\delta B_{kl}}{\delta t} N_k \end{aligned} \tag{2.7}$$

con:

$$C_{kl} = [H_{kl,ij} N_i N_j] \qquad B_{kl} = [H_{kl,i} N_i] . \tag{2.8}$$

Poiché da (2.3), facendo uso delle (1.5), si trova:

$$B_{kl} = 0$$

(la 2.7) diviene:

$$[\dot{\overline{H_{kl,k}}}] = - VC_{kl} N_k . \tag{2.9}$$

Avendo supposto che il fluido sia in quiete nella regione non perturbata tenuto conto di (2.4), (2.6), (2.9) e delle (1.5), (1.7), (1.8) e (1.11), da (2.2) con qualche calcolo si trova:

$$(2.10) \qquad \frac{dU}{ds} N_l - \frac{\Pi'' \rho + 2 V^2}{2 V^3} U^2 N_l - \left(K + \frac{F_l}{2 V^2}\right) U -$$

$$- \frac{\mu}{2 \rho V} C_{kl} N_k + \frac{\mu}{\rho V} \varepsilon_{lkm} W'_m N_k = 0$$

ove K indica la curvatura media che, avvenendo la propagazione per onde parallele, è data da:

$$K = \frac{K_0 - H_0 s}{1 - 2 K_0 s + H_0 s^2}$$

essendo K_0 ed H_0 i valori iniziali della curvatura media e di quella gaussiana. Tenuto conto della emisimmetria di C_{kl}, per saturazione con N_l (2.10) porge:

$$(2.11) \qquad \frac{dU}{ds} - \frac{\Pi'' \rho + 2 V^2}{2 V^3} - U^2 - \left(K + \frac{F_l N_l}{2 V^2}\right) U = 0 .$$

La (2.11) si integra facilmente e si ottiene:

$$(2.12) \qquad U = \frac{U_0 \, e^{\int_0^s \left(K + \frac{F_l N_l}{2 V^2}\right) ds}}{1 - \frac{\Pi'' \rho - 2 V^2}{2 V^3} U_0 \int_0^s e^{\int_0^s \left(k + \frac{F_l N_l}{2 V^2}\right) ds} ds} .$$

Si vede che se la forza di massa ha componente non positiva secondo la direzione di propagazione l'ampiezza delle discontinuità generalmente decade tendendo a zero al tendere dell'onda all'infinito, mentre se tale componente risulta positiva l'ampiezza delle discontinuità tende asintoticamente al valore:

$$U^* = \frac{V F_l N_l}{\Pi'' \rho + 2 V^2} .$$

3. – DISCONTINUITÀ INDOTTE.

Derivando $(1.3)_2$ e supponendo costanti e continue attraverso σ_t le coppie di massa si ottiene:

$$(3.1) \qquad (\alpha + \beta) [\dot{\omega}_{k,kl}] + \gamma [\dot{\omega}_{l,kk}] - 2 \mu \varepsilon_{lkm} [\dot{v}_{m,k}] + 4 \mu [\dot{\omega}_l] + [\dot{\rho}] M_l -$$

$$- [\dot{\rho} j \dot{\omega}_l] - \rho j [\ddot{\omega}_l] = 0 .$$

Data una funzione $\varphi(x, t)$ continua ovunque con le sue derivate prime, ma le cui derivate seconde e terze presentino discontinuità di prima specie nell'attraversamento di σ_t, si ha:

$$(3.2)\qquad [\dot{\varphi}_{,rs}] = -\mathrm{VDN}_r \mathrm{N}_s - \mathrm{V}(x_r^{\Gamma} \mathrm{N}_s + x_s^{\Gamma} \mathrm{N}_r) \mathrm{C}_{/\Gamma} + \mathrm{VC} x_{r\Gamma} x_{s\Delta} b^{\Gamma\Delta} +$$

$$+ \frac{\delta}{\delta t} (\mathrm{CN}_r \mathrm{N}_s) + \mathrm{C}_{/\Gamma} x_i^{\Gamma} \nu_i \mathrm{N}_r \mathrm{N}_s - \mathrm{C}(x_s^{\Gamma} \mathrm{N}_r + x_r^{\Gamma} \mathrm{N}_s) x_i^{\Delta} \nu_i b_{\Gamma\Delta} .$$

$$\mathrm{D} = [\varphi_{,rsh} \mathrm{N}_r \mathrm{N}_s \mathrm{N}_h] \qquad \mathrm{C} = [\varphi_{,rs} \mathrm{N}_r \mathrm{N}_s] .$$

Supposto che i coefficienti di viscosità soddisfino alle (1.6) nonchè ancora nell'ipotesi che il fluido sia in quiete nella sua regione non perturbata, da (3.1), facendo uso di (3.2), (1.5), (1.2) e (2.1), si ottiene:

$$(3.3)\qquad \beta(\mathrm{W}_l'' - \mathrm{W}_k'' \mathrm{N}_k \mathrm{N}_l - x_l^{\Gamma} \mathrm{W}_{l\Gamma}') - \frac{\rho \mathrm{UM}_l}{\mathrm{V}} - \rho j \mathrm{VW}' \mathrm{N}_l = 0$$

ove si è posto

$$\mathrm{W}_l'' = [\omega_{l,rsh} \mathrm{N}_r \mathrm{N}_s \mathrm{N}_h] .$$

Saturando con N_l si ricava:

$$(3.4)\qquad \mathrm{W}'' = -\frac{\mathrm{M}_l \mathrm{N}_l \mathrm{U}}{\rho \mathrm{V}^2}$$

Se valgono invece le (1.6)$'$ si ottiene:

$$(3.5)\qquad \alpha(\mathrm{W}_k'' \mathrm{N}_k + \mathrm{W}_{k/\Gamma}' x_k^{\Gamma}) \mathrm{N}_l + \frac{\rho \mathrm{U}}{\mathrm{V}} \mathrm{M}_l + \rho j \mathrm{VW}_l' = 0$$

da cui segue, per saturazione con $x_{l\Delta}$

$$(3.6)\qquad \mathrm{W}_l' x_{l\Delta} = -\frac{\mathrm{U}}{j \mathrm{V}^2} \mathrm{M}_l x_{l\Delta} .$$

Se i coefficienti di viscosità non soddisfano nè le (1.6), nè le (1.6)$'$, $\mathbf{W}'$ deve essere nullo e dalle (3.1), facendo uso di (3.2) in cui si sia posto $\mathrm{C} = 0$, si ottiene:

$$(3.7)\qquad (\alpha + \beta) \mathrm{W}_k'' \mathrm{N}_k \mathrm{N}_l + \gamma \mathrm{W}_l'' + \frac{\rho \mathrm{U}}{\mathrm{V}} \mathrm{M}_l = 0$$

saturando (3.7) con N_l e con $x_{l\Gamma}$ si ottengono le:

$$(3.8)\qquad \mathrm{W}_l'' \mathrm{N}_l = -\frac{\rho \mathrm{UM}_l \mathrm{N}_l}{\mathrm{V}(\alpha + \beta + \gamma)} \qquad \mathrm{W}_l'' x_{l\Gamma} = -\frac{\rho \mathrm{U}}{\mathrm{V}\gamma} \mathrm{M}_l x_{l\Gamma}$$

che danno i componenti longitudinale e trasversale di $\mathbf{W}''$.

Le (3.4), (3.6) e (3.8) mostrano come un'onda di accelerazione trasportante discontinuità delle derivate prime delle velocità induca in generale onde trasportanti discontinuità delle derivate terze delle velocità angolari, mentre induce onde trasportanti discontinuità delle derivate seconde della velocità angolare se i coefficienti di viscosità del fluido soddisfano le (1.6) o le (1.6)'.

BIBLIOGRAFIA

[1] ANTONIO C. GRIOLI – *Sulla propagazione di onde di accelerazione in un fluido micropolare viscoso*. In corso di stampa su «Atti Acc. Naz. dei Lincei», Roma.

[2] A. CEMAL ERINGEN (1970) – *Mechanics of Micropolar Continua – Contributions to Mechanics*, Pergamon Press.

[3] C. TRUESDELL and R. A. TOUPIN – *The Classical Field Theories*, «Handbuch der Physik» Band III/1.

[4] J. L. ERICKSEN – *Tensor Fields*, «Handbuch der Physik» Band III/1.

[5] T. Y. THOMAS (1957) – *Extended compatibility conditions for the study of surfaces of discontinuity in continuum mechanics*, «Journal of Mathematics and Mechanics», Vol. 6.