Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Aldo Maceri

La piastra incastrata in presenza di ostacoli

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **67** (1979), n.5, p. 308–314.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_67_5_308_0>

Meccanica. — *La piastra incastrata in presenza di ostacoli* (*). Nota di Aldo MACERI (**), presentata (***) dal Corrisp. E. GIANGRECO.

RÉSUMÉ. — Une plaque élastique encastrée au bord et transversalement chargée est forcée par des obstacles élastiques unilateraux. On donne les propriétés qualitatives de la solution du problème.

Si studia la piastra incastrata al contorno, trasversalmente caricata ed eventualmente forzata dai due lati da ostacoli elastici unilaterali.

Si fa per la piastra, che occupa nel suo piano medio $x_1 x_2$ la regione limitata e connessa Ω, l'ipotesi di elasticità lineare, non necessariamente isotropa; i carichi applicati q e gli spostamenti u sono positivi secondo x_3 (la terna $0\,x_1 x_2 x_3$ è destrorsa); positiva secondo x_3 è pure la reazione r esplicata dagli ostacoli, di equazioni $\Psi = \Psi(x_1, x_2)$ e $\Phi = \Phi(x_1, x_2)$, cui si assegna la forma:

$$r = -\mathrm{E}\,(u - \Psi)^+ + \boldsymbol{e}\,(\Phi - u)^+$$

nella quale E, $\boldsymbol{e}$ sono non negative.

Il problema dell'equilibrio elastico può essere convenientemente formulato per via energetica.

Siano pertanto: Ω un aperto limitato e connesso di R^2 di classe $\mathbf{R}^{(0)}$ [3], $\mathrm{A} = \sum_{\substack{|r|=2\\|s|=2}} \mathrm{D}^r (a_{rs}\mathrm{D}^s)$ $(a_{rs} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)\,,\ a_{rs} = a_{sr})$ un operatore differenziale del quarto ordine tale che

$$\sum_{\substack{|r|=2\\|s|=2}} \int_\Omega a_{rs}\,\mathrm{D}^s v\,\mathrm{D}^r v\,\mathrm{d}x \geq a_0 \sum_{|r|=2} \int_\Omega |\,\mathrm{D}^r v\,|^2\,\mathrm{d}x \qquad \forall v \in \mathrm{W}_0^2(\Omega) \quad (a_0 = \text{cost.} > 0),$$

$\mathrm{E} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ con $\mathrm{E} \geq 0$ q.o. su Ω, $\boldsymbol{e} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ con $\boldsymbol{e} \geq 0$ q.o. su Ω, $\Psi \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, $\Phi \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, $q \in \mathrm{W}^{-2}(\Omega)$.

Posto $\forall v \in \mathrm{W}_0^2(\Omega)$:

$$\mathrm{J}(v) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{|r|=2\\|s|=2}} \int_\Omega a_{rs}\,\mathrm{D}^s v\,\mathrm{D}^r v\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega \mathrm{E}\,((v - \Psi)^+)^2\,\mathrm{d}x + \\ + \frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{e}\,((\Phi - v)^+)^2\,\mathrm{d}x - \langle q\,, v\rangle\,,$$

(*) Lavoro eseguito con il contributo finanziario del Consiglio Nazionale delle Ricerche.
(**) Istituto di Scienza delle Costruzioni della Facoltà di Ingegneria di Napoli.
(***) Nella seduta del 27 novembre 1979.

consideriamo il problema di minimo per il funzionale dell'energia:

$$\text{(I)} \qquad \textit{Trovare} \quad u \in W_0^2(\Omega) \quad \textit{tale che}: \qquad J(u) \leq J(v) \qquad \forall v \in W_0^2(\Omega).$$

Nel successivo paragrafo 1 si stabiliscono le formulazioni equivalenti al problema (1), del quale si assicura poi l'esistenza e l'unicità della soluzione.

Nel paragrafo 2 si determinano infine le proprietà di regolarità della soluzione stessa.

1. – Procedendo come in [4], [5] si prova che il funzionale J è convesso, differenziabile secondo Gateaux in $W_0^2(\Omega)$ e risulta:

$$J'(u, v) = \sum_{\substack{|r|=2\\|s|=2}} \int_\Omega a_{rs} D^s u\, D^r v\, dx + \int_\Omega E(u - \Psi)^+ v\, dx - \int_\Omega e(\Phi - u)^+ v\, dx - \langle q, v\rangle \qquad \forall (u, v) \in (W_0^2(\Omega))^2;$$

nonché:

TEOREMA 1. – *Qualunque sia* $u \in W_0^2(\Omega)$, *le proposizioni seguenti sono equivalenti.*

a) u è soluzione del problema (1).

b) u è soluzione dell'equazione variazionale (dei lavori virtuali):

$$\text{(2)} \qquad u \in W_0^2(\Omega): \sum_{\substack{|r|=2\\|s|=2}} \int_\Omega a_{rs} D^s u\, D^r v\, dx + \int_\Omega E(u - \Psi)^+ v\, dx - \int_\Omega e(\Phi - u)^+ v\, dx = \langle q, v\rangle \qquad \forall v \in W_0^2(\Omega).$$

c) u è soluzione della disequazione variazionale di tipo misto:

$$u \in W_0^2(\Omega): \sum_{\substack{|r|=2\\|s|=2}} \int_\Omega a_{rs} D^s u\, D^r (v - u)\, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega E((v - \Psi)^+)^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega e((\Phi - v)^+)^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega E((u - \Psi)^+)^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega e((\Phi - u)^+)^2 dx \geq \langle q, v - u\rangle \qquad \forall v \in W_0^2(\Omega).$$

TEOREMA 2. – *Il problema* (1) *ammette soluzione unica.*

Supposto ora $\Omega \in \mathbf{R}^{(0),1}$, denotiamo con n la normale esterna a $\partial\Omega$ e, $\forall v \in W^2(\Omega)$, con dv/dn la derivata di v secondo la direzione ed il verso di n; indichiamo poi con s la misura curvilinea su $\partial\Omega$ [3].

TEOREMA 3. – *Nell'ulteriore ipotesi* $\Omega \in \mathbf{R}^{(0),1}$, *le proposizioni seguenti sono equivalenti*:

a) *u è soluzione del problema* (1).

b) *u è soluzione del problema ai limiti*:

$$(3)\qquad u \in W^2(\Omega): \begin{cases} \sum\limits_{\substack{|r|=2\\|s|=2}} D^r(a_{rs} D^s u) + E(u-\Psi)^+ - e(\Phi - u)^+ = q & su\ \Omega \\ u = \dfrac{du}{dn} = 0 \qquad s-\text{q.o. } su\ \ \partial\Omega . \end{cases}$$

Dimostrazione. – In virtù del Teorema 1, basta osservare che, risultando [3]:

$$W_0^2(\Omega) = \left\{ w \in W^2(\Omega) \mid w = \frac{dw}{dn} = 0 \qquad s-\text{q.o. su } \ \partial\Omega \right\},$$

il problema (3) equivale ovviamente al problema (2).

2. – Diamo ora qualche risultato di regolarità per la soluzione del problema (1).

Per ogni $\delta > 0$ poniamo:

$$S_\delta = \{y \in R^2 \mid |y| < \delta\}, \Sigma_\delta = \{y = (y_1, y_2) \in R^2 \mid |y| < \delta, y_2 > 0\},$$

$$W(\Sigma_\delta) = \{v \in L^2(\Sigma_\delta) \mid \exists \delta_v \in]0, \delta[\ni' v(y) = 0 \qquad \text{per} \quad |y| > \delta_v\},$$

e denotiamo con s_δ la misura curvilinea su $\partial\Sigma_\delta$ [3].

Poniamo ancora, per ogni $h \in R$:

$$h^1 = (h, 0) \quad , \quad \Sigma_\delta^h = \{y \in \Sigma_\delta \mid y + h^1 \in \Sigma_\delta\},$$

e, se $v \in L^2(\Sigma_\delta)$:

$$\rho_h v(y) = \frac{v(y+h^1) - v(y)}{h} \qquad \text{q.o. su} \quad \Sigma_\delta^h \qquad\qquad (h \neq 0);$$

consideriamo infine la forma bilineare integro-differenziale:

$$b(u, v) = \sum_{\substack{|r|\leq 2\\|s|\leq 2}} \int_{\Sigma_\delta} b_{rs} D^s u D^r v \, dy \qquad \forall (u, v) \in (W^2(\Sigma_\delta))^2,$$

con $b_{rs} \in L^\infty(\Sigma_\delta)$ e soddisfacente la condizione:

$$b(v, v) \geq b_0 \sum_{|r|=2} \int_{\Sigma_\delta} |D^r v|^2 \, dy \qquad \forall v \in W_0^2(\Sigma_\delta) \cap W(\Sigma_\delta) \qquad (b_0 = \text{cost.} > 0).$$

LEMMA 1. – *Supponiamo* $b_{rs} \in C^{0,1}(\overline{\Sigma}_\delta)$. *Se* $u \in W^2(\Sigma_\delta)$ *è tale che*:

$$u = \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \qquad s_\delta - \text{q.o.} \qquad \text{su} \quad \{(x_1, x_2) \in \partial\Sigma_\delta \mid x_2 = 0\}$$

$$|b(u, v)| \leq b' \|v\|_{W^1(\Sigma_\delta)} \qquad \forall v \in W_0^2(\Sigma_\delta) \cap W(\Sigma_\delta) \qquad (b' = \text{cost.} > 0),$$

allora qualunque sia $\delta' \in]0, \delta[$:

$$u \in W^3(\Sigma_{\delta'}), \; \|u\|_{W^3(\Sigma_{\delta'})} \leq \gamma(b' + \|u\|_{W^2(\Sigma_\delta)})$$

dove $\gamma = \gamma(\delta', b_{rs})$.

Dimostrazione. – Siano $\delta' < \delta_2 < \delta_3 < \delta_4 < \delta$, $\eta \in C_0^\infty(S_{\delta_3})$ con $\eta = 1$ su $\overline{S}_{\delta_2}$, $\tilde{u} = \eta u$, $h_0 = \min\{\delta - \delta_4, \delta_4 - \delta_3, \delta_3 - \delta_\eta\}$. Mostriamo che:

$$\text{(4)} \qquad \text{per} \quad |r| = 2 \quad \frac{\partial}{\partial y_1} D^r \tilde{u} \in L^2(\Sigma_\delta), \left\| \frac{\partial}{\partial y_1} D^r \tilde{u} \right\|_{L^2(\Sigma_\delta)} \leq \text{cost.}\,(b' + \|u\|_{W^2(\Sigma_\delta)}).$$

Anzitutto, se $0 < |h| < h_0$ si ha:

$$\Sigma_{\delta_4} \subseteq \Sigma_\delta^h \quad , \quad \rho_h \tilde{u} = 0 \qquad \text{su} \quad \Sigma_\delta^h - \Sigma_{\delta_3},$$

$$\rho_h \tilde{u} = \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho_h \tilde{u}) = 0 \qquad s_\delta - \text{q.o. su} \quad \{(x_1, x_2) \in \partial\Sigma_{\delta_3} \mid x_2 = 0\};$$

dunque, posto $\rho_h \tilde{u} = 0$ su $\Sigma_\delta - \Sigma_\delta^h$, è ovvio che $\rho_h \tilde{u} \in W_0^2(\Sigma_\delta) \cap W(\Sigma_\delta)$. Siano ora $v \in W_0^2(\Sigma_\delta)$, con $v = 0$ su $\Sigma_\delta - \Sigma_{\delta_3}$, e $0 < |h| < h_0$. Risulta $\eta \rho_{-h} v \in W_0^2(\Sigma_\delta) \cap W(\Sigma_\delta)$; pertanto [5]:

$$|b(\rho_h \tilde{u}, v)| \leq \text{cost.}\,(b' + \|u\|_{W^2(\Sigma_\delta)}) \left(\sum_{|r|=2} \int_{\Sigma_\delta} |D^r v|^2 \, dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Da questa relazione, per $v = \rho_h \tilde{u}$, si ha:

$$b_0 \left(\sum_{|r|=2} \int_{\Sigma_\delta} |D^r \rho_h \tilde{u}|^2 \, dy \right)^{\frac{1}{2}} \leq \text{cost.}\,(b' + \|u\|_{W^2(\Sigma_\delta)}) \qquad \text{per} \quad 0 < |h| < h_0;$$

se ne trae la (4), e da essa [5] la tesi.

Il Lemma 1 consente di provare il seguente risultato di regolarità:

TEOREMA 4. – *Se*:

$$\Omega \in \mathbf{R}^{(2),1} \quad , \quad a_{rs} \in C^{0,1}(\overline{\Omega}) \quad , \quad q \in W^{-1}(\Omega),$$

allora la soluzione u *del problema* (1) *appartiene a* $W^3(\Omega)$ *e si ha*:

$$\|u\|_{W^3(\Omega)} \leq \gamma(\|q\|_{W^{-1}(\Omega)} + \|E\|_{L^\infty(\Omega)} \|(u - \Psi)^+\|_{L^2(\Omega)} +$$
$$+ \|e\|_{L^\infty(\Omega)} \|(\Phi - u)^+\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{W^2(\Omega)})$$

dove $\gamma = \gamma(a_{rs}, \Omega)$.

Dimostrazione. – Risulta [1]:

a) Qualunque sia l'aperto Ω' avente chiusura contenuta in Ω si ha:

$$u \in W^3(\Omega')\,,\ \|u\|_{W^3(\Omega')} \leq \gamma\,(\|g\|_{W^{-1}(\Omega)} + \|E\|_{L^\infty(\Omega)}\,\|(u-\Psi)^+\|_{L^2(\Omega)} + \\ + \|e\|_{L^\infty(\Omega)}\,\|(\Phi-u)^+\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{W^2(\Omega)})$$

dove $\gamma = \gamma\,(a_{rs}\,, \Omega')$.

Sia ora $\bar{x}$ un arbitrario punto di $\partial\Omega$. L'ipotesi $\Omega \in \mathbf{R}^{(2),1}$ comporta l'esistenza di un intorno aperto U di $\bar{x}$, di un $\delta > 0$ e di un'applicazione invertibile $T = (T_1\,, T_2)$ di S_δ su U tali che:

$$T \in C^{2,1}(S_\delta)\,,\ T^{-1} \in C^{2,1}(U)\,,\ \left|\frac{\partial(T_1\,,T_2)}{\partial(y_1\,,y_2)}(y)\right| = 1 \qquad \forall y \in S_\delta\,,$$

$$T(\Sigma_\delta) = U^+ \qquad \text{essendo} \quad U^+ = \Omega \cap U\,.$$

Posto, per ogni $(\tilde{v}\,,\tilde{w}) \in (W_0^2(\Sigma_\delta))^2$, $v = \tilde{v} \circ T^{-1}$ e $w = \tilde{w} \circ T^{-1}$, consideriamo la somma:

$$\sum_{\substack{|r|=2\\|s|=2}} \int_{U^+} a_{rs}(x)\,D^s v(x)\,D^r w(x)\,dx\,. \tag{5}$$

Effettuando il cambiamento di variabile $x = T(y)$ ed esprimendo $(D^s v)(T(y))$ e $(D^r w)(T(y))$ in funzione delle derivate rispettivamente di $\tilde{v}$ e $\tilde{w}$, la (5) assume la veste:

$$\sum_{\substack{|r|\leq 2\\|s|\leq 2}} \int_{\Sigma_\delta} b_{rs}(y)\,D^s \tilde{v}(y)\,D^r \tilde{w}(y)\,dy\,,$$

dove $b_{rs} \in C^{0,1}(\bar{\Sigma}_\delta)$ e dipende soltanto da a_{rs} e T.

Circa la forma bilineare integro-differenziale:

$$b(\tilde{v}\,,\tilde{w}) = \sum_{\substack{|r|\leq 2\\|s|\leq 2}} \int_{\Sigma_\delta} b_{rs}\,D^s \tilde{v}\,D^r \tilde{w}\,dy \qquad \forall\,(\tilde{v}\,,\tilde{w}) \in (W_0^2(\Sigma_\delta))^2$$

osserviamo che, se $\tilde{v} \in W_0^2(\Sigma_\delta) \cap W(\Sigma_\delta)$ e:

$$v = \begin{cases} \tilde{v} \circ T^{-1} & \text{su} \quad U^+ \\ 0 & \text{su} \quad \Omega - U^+, \end{cases}$$

risultando:

$$v \in W_0^2(\Omega) \quad , \quad \sum_{|r|=2} \int_{\Sigma_\delta} |D^r \tilde{v}|^2\,dy \leq \text{cost.} \sum_{|r|=2} \int_{U^+} |D^r v|^2\,dx\,,$$

si ha [5]:

$$\sum_{\substack{|r|\leq 2\\|s|\leq 2}} \int_{\Sigma_\delta} b_{rs}(y)\,D^s \tilde{v}(y)\,D^r \tilde{v}(y)\,dy \geq \text{cost.} \sum_{|r|=2} \int_{\Sigma_\delta} |D^r \tilde{v}|^2\,dy\,.$$

Ciò premesso, sia $\tilde{v}$ un arbitrario elemento di $W_0^2(\Sigma_\delta) \cap W(\Sigma_\delta)$.

Posto:

$$\tilde{u} = u \circ \mathrm{T} \quad , \quad v = \begin{cases} \tilde{v} \circ \mathrm{T}^{-1} & \text{su} \quad \mathrm{U}^{+} \\ 0 & \text{su} \quad \Omega - \mathrm{U}^{+}, \end{cases}$$

dalla relazione:

$$\sum_{\substack{|r|=2 \\ |s|=2}} \int_{\Omega} a_{rs}(x) \mathrm{D}^s u(x) \mathrm{D}^r v(x) \, \mathrm{d}x = \langle q , v \rangle - \int_{\Omega} \mathrm{E}(u - \Psi)^{+} v \, \mathrm{d}x + \int_{\Omega} e(\Phi - u)^{+} v \, \mathrm{d}x$$

si trae:

$$| b(\tilde{u}, \tilde{v}) | \leq (\| q \|_{\mathrm{W}^{-1}(\Omega)} + \| \mathrm{E} \|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \| (u - \Psi)^{+} \|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} +$$

$$+ \| e \|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \| (\Phi - u)^{+} \|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}) \| \tilde{v} \|_{\mathrm{W}^1(\Sigma_\delta)} .$$

Ne segue, per il Lemma 1:

$$\tilde{u} \in \mathrm{W}^3(\Sigma_{\delta'}) , \| \tilde{u} \|_{\mathrm{W}^3(\Sigma_{\delta'})} \leq \gamma(\mathrm{T}, a_{rs}, \delta') (\| q \|_{\mathrm{W}^{-1}(\Omega)} +$$

$$+ \| \mathrm{E} \|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \| (u - \Psi)^{+} \|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \| e \|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \| (\Phi - u)^{+} \|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \| u \|_{\mathrm{W}^2(\Omega)})$$

qualunque sia $\delta' \in]0, \delta[$. Pertanto, posto $\mathrm{U}' = \mathrm{T}(\mathrm{S}_{\delta'})$ ed $\mathrm{U}'^{+} = \mathrm{U}' \cap \Omega$, sia ha:

$$u \in \mathrm{W}^3(\mathrm{U}'^{+}) , \| u \|_{\mathrm{W}^3(\mathrm{U}'^{+})} \leq \gamma(\mathrm{T}, a_{rs}, \delta') (\| q \|_{\mathrm{W}^{-1}(\Omega)} +$$

$$+ \| \mathrm{E} \|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \| (u - \Psi)^{+} \|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \| e \|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \| (\Phi - u)^{+} \|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \| u \|_{\mathrm{W}^2(\Omega)}) .$$

La regolarità al bordo è cosi acquisita; ne segue, tenuto conto della *a)*, la tesi.

Con procedimenti analoghi a quelli utilizzati per il Lemma 1 e per il Teorema 4, si prova infine:

LEMMA 2. – *Supponiamo* $b_{rs} \in \mathrm{C}^{1,1}(\overline{\Sigma}_\delta)$. *Se* $u \in \mathrm{W}^2(\Sigma_\delta)$ *è tale che*:

$$u = \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \qquad s_\delta - \text{q.o. } su \quad \{x_1, x_2\} \in \partial\Sigma_\delta \mid x_2 = 0\}$$

$$| b(u, v) | \leq b'' \| v \|_{\mathrm{L}^2(\Sigma_\delta)} \qquad \forall v \in \mathrm{W}_0^2(\Sigma_\delta) \cap \mathrm{W}(\Sigma_\delta) \qquad (b'' = \text{cost.} > 0) ,$$

allora qualunque sia $\delta' \in]0, \delta[$:

$$u \in \mathrm{W}^4(\Sigma_{\delta'}) , \| u \|_{\mathrm{W}^4(\Sigma_{\delta'})} \leq \gamma(b'' + \| u \|_{\mathrm{W}^2(\Sigma_\delta)})$$

dove $\gamma = \gamma(\delta', b_{rs})$.

TEOREMA 5. – *Se*

$$\Omega \in \mathbf{R}^{(3),1} \quad , \quad a_{rs} \in C^{1,1}(\bar{\Omega}) \quad , \quad q \in L^2(\Omega) ,$$

la soluzione u del problema (1) *appartiene a* $W^4(\Omega)$ *e si ha*:

$$\| u \|_{W^4(\Omega)} \leq \gamma \left(\| q \|_{L^2(\Omega)} + \| E \|_{L^\infty(\Omega)} \| (u - \Psi)^+ \|_{L^2(\Omega)} + \right.$$
$$\left. + \| e \|_{L^\infty(\Omega)} \| (\Phi - u)^+ \|_{L^2(\Omega)} + \| u \|_{W^2(\Omega)}\right)$$

dove $\gamma = \gamma(a_{rs}, \Omega)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. AGMON (1965) – *Lectures on elliptic boundary value problems*, Van Nostrand.

[2] F. E. BROWDER (1966) – *On the unification of the calculus of the variations and the theory of monotone nonlinear operators in Banach spaces*, « Proc. N.A.S. », 56, 419–425.

[3] J. NECAS (1967) – *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson.

[4] R. TOSCANO e A. MACERI (1979) – *Un problema di vincolo unilaterale per la trave incastrata*, « La Ricerca », 2.

[5] R. TOSCANO e A. MACERI (1979) – *Sul problema della piastra unilateralmente appoggiata al suolo*, « C. S. C. I. », 25, Napoli.