Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Antonio Claudio Grioli

## Sulla propagazione di onde di accelerazione in un fluido micropolare viscoso

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **67** (1979), n.3-4, p. 252–258.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_67_3-4_252_0>

**Fisica matematica.** — *Sulla propagazione di onde di accelerazione in un fluido micropolare viscoso* (*). Nota (**) di ANTONIO CLAUDIO GRIOLI, presentata dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — Propagation of acceleration waves is impossible in classical viscous fluids. One could suppose that the same could occur in case of viscous fluids with structure.

Speaking of adiabatic or isothermal cases I have found that propagation of acceleration waves is actually possible in a subclass of such continua. Only longitudinal waves carrying discontinuities in the first derivatives of the velocity are possible but not waves carrying discontinuities in the first derivatives of the angular velocity.

È noto come in un fluido viscoso classico sia impossibile la propagazione di onde di accelerazione. Ciò è dovuto alle limitazioni di carattere termodinamico cui debbono soddisfare i coefficienti di dissipatività.

Appare legittimo il dubbio che una circostanza analoga possa ripresentarsi nel caso di fluidi viscosi con struttura, a causa del maggior numero di coefficienti strutturali presenti.

Limitandomi a considerare casi adiabatici o isotermi, trovo che in una sottoclasse di tali continui la propagazione di onde di accelerazione è effettivamente possibile; tale sottoclasse è caratterizzata da certe relazioni cui debbono soddisfare i coefficienti di viscosità e che fanno sì che il fluido non presenti viscosità per certe classi di moti (ad esempio per un moto in cui è nulla la velocità angolare ed il campo delle velocità inerenti agli spostamenti è irrotazionale).

Soddisfatte tali relazioni, sono possibili soltanto onde longitudinali trasportanti discontinuità delle derivate prime della velocità, mentre non sono comunque possibili onde trasportanti discontinuità delle derivate prime delle velocità angolari.

La velocità di propagazione è costante se il fluido è in uno stato di equilibrio nella regione non perturbata, e coincide con quella che si ha nei fluidi classici non viscosi, e la propagazione avviene per raggi rettilinei e onde parallele.

## 1. – PREMESSE. CONTINUITÀ DEGLI SFORZI E DELLE COPPIE DI CONTATTO ATTRAVERSO IL FRONTE D'ONDA.

Riferito lo spazio ambiente ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali $(o\,x_i)$, indicherò con la virgola la derivazione parziale rispetto alle $x_i$ e col punto la derivazione lagrangiana rispetto al tempo. Sia C un fluido

(*) Lavoro eseguito nell'ambito di gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia l'8 ottobre 1979.

di Cosserat, omogeneo, linearmente viscoso e isotropo; dette $t_{kl}$ e $\psi_{kl}$ le matrici che caratterizzano lo stress e le coppie di contatto, le sue equazioni costitutive sono:

$$
(1.1)\qquad \begin{aligned} t_{kl} &= (-\Pi + \lambda v_{r,r})\,\delta_{kl} + \mu\,(v_{k,l} + v_{l,k}) + \chi\,(v_{l,k} - \varepsilon_{klr}\,\omega_r) \\ \psi_{kl} &= \alpha\omega_{r,r}\,\delta_{kl} + \beta\omega_{k,l} + \gamma\omega_{l,k} \end{aligned}
$$

dove $v_k$ indica la velocità, $\omega_k$ la velocità angolare e $\Pi$ la pressione, che, nei casi isotermo o adiabatico che nella presente nota mi limiterò a considerare, può essere espressa in funzione della densità $\rho$ mediante l'equazione:

$$
(1.2)\qquad \Pi = \Pi(\rho)\,.
$$

Infine $\varepsilon_{klr}$ rappresenta il tensore di Ricci.

I coefficienti di viscosità $\lambda$, $\mu$ ecc. sono generalmente funzioni delle variabili di stato, ma nella maggior parte dei casi le loro variazioni sono insignificanti (vedi ad esempio [5] p. 64) così che possono essere considerati come costanti. Essi debbono soddisfare alle seguenti condizioni, di natura termodinamica [1]:

$$
(1.3)\qquad \begin{array}{lll} 3\lambda + 2\mu + \chi \geq 0 & 2\mu + \chi \geq 0 & \chi \geq 0 \\ 3\alpha + \beta + \gamma \geq 0 & -\gamma \leq \beta \leq \gamma & \gamma \geq 0 \end{array}
$$

conseguenza della disequazione di Clausius Duhem.

Tenuto conto delle (1.1), le equazioni di campo sono:

$$
(1.4)\qquad \begin{aligned} &-\Pi_{,l} + (\lambda + \mu)\,v_{k,kl} + (\mu + \chi)\,v_{l,kk} + \chi\varepsilon_{lkm}\,\omega_{m,k} + \rho\,(F_l - \dot{v}_l) = 0 \\ &(\alpha + \beta)\,\omega_{k,kl} + \gamma\omega_{l,kk} + \chi\varepsilon_{lkm}\,v_{m,k} - 2\,\chi\omega_l + \rho\,(M_l - j\dot{\omega}_l) = 0 \end{aligned}
$$

ove $j$ è il micromomento d'inerzia, costante, nel caso in esame di un fluido isotropo, lungo le linee di corrente, e $F_l$ e $M_l$ rappresentano rispettivamente le forze e le coppie di massa.

Infine vi è l'equazione di continuità:

$$
(1.5)\qquad \dot{\rho} + \rho v_{h,h} = 0\,.
$$

Suppongo che il fluido sia sede di onde di accelerazione, trasportanti discontinuità di prima specie delle derivate prime della velocità *e* (o) delle velocità angolari. Sia $\sigma_t$ la superficie, che supporrò dotata di tutte le proprietà di regolarità necessarie nel seguito, rappresentante il fronte d'onda di equazioni parametriche:

$$
x_i = x_i(\zeta_1\,, \zeta_2\,, t)\,.
$$

(1) La possibilità di considerare qualcuna delle (1.3) come uguaglianza discende dal considerare la nota relazione termodinamica dell'entropia come possibile uguaglianza anche nel caso di parziale irreversibilità. In tal caso gli effetti della viscosità si risentono però solo per certe classi di movimenti, e non per tutti come risulterà più chiaro nel seguito.

Detto $N_h$ il versore della normale a $\sigma_t$ (orientato nella direzione di propagazione) sussistono le relazioni:

$$N_h\, x_{h\Gamma} = 0 \qquad b_{\Gamma\Delta} = -x_{h\Gamma}\, N_{h/\Delta} \qquad N_{h/\Gamma} = -b_\Gamma^\Delta\, x_{h\Delta} \tag{1.6}$$

ove $b_{\Gamma\Delta}$ è il tensore della seconda forma fondamentale su $\sigma_t$ e con la sbarretta si è indicata derivazione covariante sulla superficie.

Gli indici greci variano da 1 a 2 e possono essere innalzati o abbassati mediante l'uso del tensore della metrica su $\sigma_t$:

$$a_{\Gamma\Delta} = x_{h\Gamma}\, x_{h\Delta}\,.$$

Indifferente è invece la posizione degli indici latini (che variano da 1 a 3) poiché essi si riferiscono a coordinate cartesiane ortogonali.

Data una funzione $\varphi(x\,,t)$ continua ovunque, ma le cui derivate parziali prime e seconde presentano delle discontinuità di prima specie nell'attraversamento di $\sigma_t$, indicando, com'è abituale, con una parentesi quadra tali discontinuità, si ha:

$$\begin{aligned}&[\varphi_{,r}] = \mathrm{T}N_r \qquad [\dot\varphi] = -\mathrm{VT} \qquad \mathrm{T} = [\varphi_{,i}\, N_i] \qquad \mathrm{T}' = [\varphi_{,rs}\, N_r\, N_s]\\ &[\varphi_{,rs}] = \mathrm{T}'\, N_r\, N_s + (x_r^\Gamma\, N_s + x_s^\Gamma\, N_r)\, \mathrm{T}_{/\Gamma} - x_{r\Gamma}\, x_{s\Delta}\, b^{\Gamma\Delta}\, \mathrm{T}\,.\end{aligned} \tag{1.7}$$

Dalle (1.7) con le posizioni:

$$\begin{aligned}&\mathrm{U}_r = [\nu_{r,s}\, N_s] \qquad \mathrm{U}'_r = [\nu_{r,sh}\, N_s\, N_h] \qquad \mathrm{W}_r = [\omega_{r,s}\, N_s]\\ &\mathrm{W}'_r = [\omega_{r,sh}\, N_s\, N_h] \qquad \mathrm{A} = [\Pi_{,s}\, N_s] \qquad \mathrm{B} = [\rho_{,s}\, N_s]\end{aligned} \tag{1.8}$$

si ottengono le relazioni:

$$\begin{aligned}&[\nu_r] = 0 \qquad [\nu_{r,s}] = \mathrm{U}_r\, N_s \qquad [\dot\nu_r] = -\mathrm{VU}_r\\ &[\nu_{r,sh}] = \mathrm{U}'_r\, N_s\, N_h + (x_s^\Gamma\, N_h + x_h^\Gamma\, N_s)\, \mathrm{U}_{r/\Gamma} - x_{s\Gamma}\, x_{h\Delta}\, b^{\Gamma\Delta}\, \mathrm{U}_r\\ &[\omega_r] = 0 \qquad [\omega_{r,s}] = \mathrm{W}_r\, N_s \qquad [\dot\omega_r] = -\mathrm{VW}_r\\ &[\omega_{r,sh}] = \mathrm{W}'_r\, N_s\, N_h + (x_s^\Gamma\, N_h + x_h^\Gamma\, N_s)\, \mathrm{W}_{r/\Gamma} - x_{s\Gamma}\, x_{h\Delta}\, b^{\Gamma\Delta}\, \mathrm{W}_r\\ &[\Pi] = 0 \qquad [\Pi_{,s}] = \mathrm{A}N_s \qquad [\dot\Pi] = -\mathrm{VA}\\ &[\rho] = 0 \qquad [\rho_{,s}] = \mathrm{B}N_s \qquad [\dot\rho] = -\mathrm{VB}\end{aligned} \tag{1.9}$$

ove V indica la velocità di propagazione di $\sigma_t$ rispetto al continuo, data da:

$$\mathrm{V} = u_n - \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{N}$$

e $u_n$ la velocità di avanzamento normale.

Dalle equazioni cardinali di C, segue la continuità degli sforzi e delle coppie attraverso $\sigma_t$ nel caso di onde di accelerazione [2].

(2) Vedi ad esempio [2] p. 545 sgg.

Deve dunque essere:

$$[t_{kl}\, N_k] = [\psi_{kl}\, N_k] = 0\,. \tag{1.10}$$

Da (1.10), facendo uso delle (1.9), si ottiene:

$$\begin{aligned} &(\lambda + \mu)\, \mathbf{U}\cdot\mathbf{N} N_l + (\mu + \chi)\, U_l = 0 \\ &(\alpha + \beta)\, \mathbf{W}\cdot\mathbf{N} N_l + \gamma W_l = 0\,. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Da $(1.11)_1$ si traggono le due alternative (3):

*a*) **U** è perpendicolare ad **N**; si ha allora:

$$\mathbf{U}\cdot\mathbf{N} = 0 \qquad \mu + \chi = 0 \tag{1.12}$$

$(1.12)_2$, tenuto conto delle (1.3) implica:

$$\mu = \chi = 0 \qquad t_{kl} = (-\Pi + \lambda \nu_{r,r})\, \delta_{kl} \tag{1.13}$$

*b*) **U** è parallelo ad **N**; si ha allora;

$$\mathbf{U} = U\mathbf{N} \qquad \lambda + 2\mu + \chi = 0 \tag{1.14}$$

$(1.14)_2$, tenuto conto delle (1.3), implica:

$$\lambda = 0 \qquad \chi = -2\mu \qquad t_{kl} = -\Pi\delta_{kl} + \mu\,(\nu_{k,l} - \nu_{l,k} + 2\,\varepsilon_{klr}\,\omega_r)\,. \tag{1.15}$$

Analogamente da $(1.11)_2$ si traggono le due alternative:

*a'*) **W** è perpendicolare ad **N**; si ha allora:

$$\mathbf{W}\cdot\mathbf{N} = 0 \qquad \gamma = 0 \tag{1.16}$$

$(1.16)_2$, tenuto conto delle (1.3), implica:

$$\beta = \gamma = 0 \qquad \psi_{kl} = \alpha\omega_{r,r}\, \delta_{kl} \tag{1.17}$$

*b'*) **W** è parallelo ad **N**; si ha allora:

$$\mathbf{W} = W\mathbf{N} \qquad \alpha + \beta + \gamma = 0 \tag{1.18}$$

$(1.18)_2$, tenuto conto delle (1.3) implica:

$$\alpha = 0\,, \qquad \gamma = -\beta \qquad \psi_{kl} = \beta\,(\omega_{k,l} - \omega_{l,k})\,. \tag{1.19}$$

## 2. – VELOCITÀ DI PROPAGAZIONE; CASI DI ESCLUSIONE.

Le (1.13), (1.15), (1.17), (1.19) rappresentano delle condizioni necessarie per la propagazione in C di onde di accelerazione.

(3) Evidentemente supponendo $U \neq 0$ visto che si cercano onde di accelerazione.

L'approfondimento delle questioni poste implica la considerazione delle equazioni sulle discontinuità che si ottengono dalle equazioni di campo. Supposte continue attraverso $\sigma_t$ le forze e le coppie di massa, esse sono:

$$
(2.1)\qquad \begin{aligned}
&-[\Pi_{,l}] + (\lambda+\mu)[\nu_{k,kl}] + (\mu+\chi)[\nu_{l,kk}] + \chi\varepsilon_{lkm}[\omega_{m,k}] - [\rho\dot{\nu}_l] = 0\\
&(\alpha+\beta)[\omega_{k,kl}] + \gamma[\omega_{l,kk}] + \chi\varepsilon_{lkm}[\nu_{m,k}] - 2\chi[\omega_l'] - [\rho j\dot{\omega}_l] = 0\,.
\end{aligned}
$$

Dall'equazione di continuità (1.5), facendo uso delle (1.8), (1.9), si trae:

$$
(2.2)\qquad [\dot{\rho}] = -\rho U_h N_h \qquad B = \frac{\rho U_h N_h}{V}\,.
$$

Facendo uso delle (1.2), (1.8), (1.9) e $(2.2)_2$ si ottiene:

$$
(2.3)\qquad [\Pi_{,r}] = \Pi'\rho\,\frac{U_h N_h}{V}\,N_r \qquad A = \Pi'\rho\,\frac{U_h N_h}{V} \qquad \Pi' = \frac{d\Pi}{d\rho}\,.
$$

Sviluppo l'alternativa *a*). Tenuto conto delle (1.9), (1.12), (1.13), (2.3) da $(2.1)_1$ si trae:

$$
(2.4)\qquad \lambda(\mathbf{U}'\cdot\mathbf{N} + x_r^{\Gamma} U_{r/\Gamma})N_l + \rho V U_l = 0\,.
$$

La (2.4) consta di due termini fra loro ortogonali, che devono quindi annullarsi entrambi. In particolare deve essere:

$$
VU_l = 0
$$

che mostra come non possano propagarsi onde corrispondenti all'alternativa *a*). Sviluppo l'alternativa *b*). Tenuto conto delle (1.9), (1.14), (1.15), (2.3), da $(2.1)_1$ si trae:

$$
(2.5)\qquad \left(-\frac{\Pi'\rho U}{V} + \mu\mathbf{U}'\cdot\mathbf{N} + \rho VU\right)N_l + \mu U_{/\Gamma}\,x_l^{\Gamma} - \\
- \mu U_l' - 2\mu\varepsilon_{klm} W_m N_k = 0\,.
$$

Da (2.5), per saturazione con $N_l$, si ottiene:

$$
(2.6)\qquad V = \sqrt{\Pi'}
$$

ove con $\Pi'$ si è indicata la derivata di $\Pi$ rispetto a $\rho$.

Per saturazione con $x_{l\Delta}$ si ottiene poi:

$$
(2.7)\qquad U_{/\Gamma} = U_l'\,x_{l\Gamma} + 2\,\varepsilon_{klm} W_m N_k\,.
$$

Considero ora l'alternativa *a'*). Tenuto conto delle (1.9), (1.16), (1.17), e del fatto che le uniche discontinuità delle derivate prime di $\boldsymbol{v}$ che possono propagarsi sono longitudinali (da $\mathbf{U} = U\mathbf{N}$ segue $\varepsilon_{klm} U_m N_k = 0$), da $(2.1)_2$ si trae:

$$
(2.8)\qquad \alpha(\mathbf{W}'\cdot\mathbf{N} + W_{k/\Gamma}\,x_k^{\Gamma})N_l + \rho j V W_l = 0
$$

(2.8) consta di due termini ortogonali fra loro e implica dunque:

$$\rho j \mathrm{VW}_l = 0$$

da cui segue l'impossibilità di propagazione di un'onda corrispondente alla alternativa *a'*).

Considero infine l'alternativa *b'*). Tenuto conto delle (1.9), (1.18), (1.19) e dell'annullarsi di $\varepsilon_{klm} \mathrm{U}_m \mathrm{N}_k$, da $(2.1)_2$ si trae:

$$\beta (\mathbf{W}' \cdot \mathbf{N} + \rho j \mathrm{VW}) \mathrm{N}_l + \beta \mathrm{W}_{/\Gamma} x_l^{\Gamma} - \beta \mathrm{W}_l' = 0 . \tag{2.9}$$

Saturando (2.9) con $\mathrm{N}_l$ si trova:

$$\rho j \mathrm{VW} = 0$$

da cui si vede l'impossibilità di propagazione anche di un'onda corrispondente all'alternativa *b'*).

OSSERVAZIONE. – Poiché, a causa dell'impossibilità di esistenza di onde di accelerazione trasportanti discontinuità delle derivate prima di $\boldsymbol{w}$, nelle (1.9) deve pensarsi $\mathbf{W} = 0$, tenuto conto di (1.14), dalla seconda delle (1.4) si trae:

$$(\alpha + \beta)\, \mathbf{W}' \cdot \mathbf{N} \mathrm{N}_l + \gamma \mathrm{W}_l' = 0 \tag{2.10}$$

dalla quale, ripetendo i ragionamenti fatti su $(1.11)_2$, si deduce in generale l'annullarsi di $\mathbf{W}'$, a meno che i coefficienti di viscosità $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ non soddisfino alle $(1.17)_1$ o alle (1.19) nei quali casi sarà

$$\mathbf{W}' \cdot \mathbf{N} = 0 \qquad \text{oppure} \qquad \mathbf{W}' = \mathrm{W}' \mathbf{N} . \tag{2.11}$$

## 3. CONCLUSIONE

Si può quindi concludere che in generale non sono possibili onde di accelerazione in un fluido viscoso di Cosserat. Soltanto in casi particolari, cioè quando i coefficienti di viscosità soddisfano alle (1.15), sono possibili solo onde di accelerazione longitudinali, trasportanti soltanto discontinuità delle derivate prime delle velocità, ma non delle velocità angolari.

Fluidi soddisfacenti alle (1.15) sono però soltanto parzialmente viscosi. Infatti essi presentano viscosità solo per particolari classi di moti (ad esempio per un moto in cui sono nulle le velocità angolari e il campo delle velocità inerenti agli spostamenti è irrotazionale) come si vede da $(1.15)_3$.

In ogni caso, soddisfatte le (1.15), si ha propagazione con la stessa velocità che nei fluidi classici non viscosi. Inoltre tale velocità è costante e la propagazione avviene per raggi rettilinei ed onde parallele se il fluido è in uno stato di equilibrio nella regione non perturbata poiché la costanza di $\rho$ implica quella di $\Pi'$. Da osservare infine che un'onda di accelerazione, nell'unico caso in cui essa è possibile, induce in generale anche discontinuità delle derivate seconde di $\boldsymbol{v}$, come si vede da (2.7) per $W_m = 0$.

## BIBLIOGRAFIA

[1] A. C. ERINGEN (1970) – *Mechanics of Micropolar Continua*, Contributions to Mechanics, Pergamon Press.

[2] C. TRUESDELL and R. A. TOUPIN – *The Classical Field Theories*, «Handbuch der Physik», Band III/1.

[3] J. L. ERICKSEN – *Tensor Fields*, «Handbuch der Physik», Band III/1.

[4] T. Y. THOMAS (1957) – *Extended compatibility conditions for the study of surfaces of discontinuity in continuum mechanics*, «Journal of Mathematics and Mechanics», Vol. 6.

[5] L. LANDAU et E. LIFCHITZ (1971) – *Mecanique des Fluides*, Editions Mir Moscou.