Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mauro Beltrametti, Marino Palleschi

Sull'annullamento di certi gruppi di coomologia di una varietà normale

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **67** (1979), n.3-4, p. 239–247.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_67_3-4_239_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1979.

Geometria algebrica. — *Sull'annullamento di certi gruppi di coomologia di una varietà normale* (*). Nota (**) di MAURO BELTRAMETTI e MARINO PALLESCHI, presentata dal Corrisp. E. MARCHIONNA.

SUMMARY. — In the first part of this work (sects. 1-3) we consider an irreducible normal variety V_3 of dimension 3 in a complex projective space. Let $p_a(V_3)$ and $P_a(V_3)$ be the virtual arithmetic genus and the second arithmetic genus of V_3 respectively. We prove that *the equality* $p_a(V_3) = P_a(V_3)$ *holds if and only if* V_3 *is Cohen-Macaulay*. As previously remarked in [11], we obtain the relation $P_a(V_3) \geq p_a(V_3)$ for any normal V_3. We also give an example of V_3's on which the inequality $P_a(V_3) > p_a(V_3)$ holds. The problems we treat here are strictly close to some arguments geometrically developed by Marchionna in [11].

In the second part (sec. 4) we consider a normal algebraic variety V_d of dimension $d \geq 2$, in a complex projective space. Suppose V_d has multiple subvarieties of dimension at most k ($k \leq d-2$). By employing a theorem due to Grauert-Riemenschneider, we prove that $H^i(V_d, \omega_{V_d} \otimes \mathscr{L}) = 0$, ($i > k$), where ω_{V_d} denotes the dualizing sheaf, and $\mathscr{L}$ is an ample (invertible) sheaf on V_d. This fact implies the *strong theorem on the regularity of the adjoint* on a normal variety V_d with isolated singularities.

1. - Nello spazio proiettivo complesso S_r si consideri una varietà algebrica V_d (irriducibile) *normale*, di dimensione d. Nel seguito si denoterà con $H^q(V_d, \mathscr{F})$ il q-esimo spazio della coomologia di V_d a coefficienti in un fascio algebrico coerente $\mathscr{F}$, con $h^q(\mathscr{F})$ la sua dimensione, con

$$\chi(V_d, \mathscr{F}) = \sum_{q=0}^{d} (-1)^q h^q(\mathscr{F})$$

la caratteristica di Eulero-Poincaré di V_d a coefficienti in $\mathscr{F}$. Come è noto, ad ogni divisore D di V_d è possibile associare il fascio algebrico coerente $\mathcal{O}(D)$ dei germi delle funzioni razionali multiple del divisore -D; per brevità si porrà anche $h^q(D) = h^q(\mathcal{O}(D))$.

Tornerà utile ricordare che *per una varietà normale* V_d *le seguenti proprietà sono equivalenti*:

(a) V_d *è una varietà di Cohen-Macaulay* (1);

(b) *per ogni fascio* $\mathscr{F}$ *localmente libero su* V_d, *risulta* $H^q(V_d, \mathscr{F}(-n)) = 0$ *con* n *intero abbastanza elevato e* $q \leq d-1$;

(c) $H^q(V_d, \mathcal{O}(-n)) = 0$ *per* n *intero abbastanza elevato e* $q \leq d-1$.

L'equivalenza delle proprietà (*a*) e (*b*) segue dal teorema 7.6, III, p. 243 di [6] ed è ovvia l'implicazione (*b*) ⇒ (*c*). L'implicazione (*c*) ⇒ (*a*) discende

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 26 settembre 1979.

(1) Ciò significa che per ogni punto x di V_d la spiga in x del fascio strutturale $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{V_d}$ è un anello di Cohen-Macaulay.

dal teorema 6.1 contenuto in [14] ma può anche essere conseguita con lo stesso ragionamento che figura in [6] nella dimostrazione *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)* del teorema 7.6, III.

Denotata con E la generica sezione iperpiana di una varietà normale V_d, poiché sussiste l'isomorfismo $\mathcal{O}(s) \simeq \mathcal{O}(sE)$, per ogni intero relativo s, si ha che *una varietà normale* V_d *è di Cohen–Macaulay se e solo se risulta* $h^i(-nE) = 0$ *con* n *intero abbastanza elevato e per* $i = 1, 2, \cdots, d-1$ (si noti che in ogni caso è $h^0(-nE) = \dim|-nE| + 1 = 0$ per $n > 0$).

Ciò posto, si considerino sopra un'arbitraria varietà normale V_d: un divisore canonico K; il divisore Z zero dell'equivalenza lineare; la dimensione virtuale $\delta[D]$ di un divisore D di V_d. Com'è noto (cfr. ad esempio [11], p. 352), vale la relazione

$$\delta[D] + 1 = \chi(V_d, \mathcal{O}(D)). \tag{1.1}$$

Ricordiamo infine che i due *generi aritmetici* $p_a(V_d)$ e $P_a(V_d)$ della varietà normale V_d sono definiti ponendo

$$p_a(V_d) = (-1)^d \delta[Z] = (-1)^d \{\chi(V_d, \mathcal{O}) - 1\}; \tag{1.2}$$

$$P_a(V_d) = \delta[K] + 1 - (-1)^d = \chi(V_d, \mathcal{O}(K)) - (-1)^d. \tag{1.3}$$

Nel caso di una V_d non singolare l'uguaglianza dei due generi artimetici, congetturata da Severi, segue subito dal teorema di dualità di Serre. Si potrebbe facilmente provare che una più vasta classe di V_d normali per le quali sussiste l'uguaglianza $p_a(V_d) = P_a(V_d)$ è costituita dalle varietà normali di Cohen–Macaulay.

Scopo della prima parte del presente lavoro è dimostrare il seguente

TEOREMA 1. – *Sia* V_3 *una varietà normale a tre dimensioni. Condizione necessaria e sufficiente affinché sussista l'uguaglianza* $p_a(V_3) = P_a(V_3)$ *è che* V_3 *sia una varietà di Cohen–Macaulay.*

La dimostrazione di tale teorema è contenuta nel n. 3; nel n. 2 si premettono alcune osservazioni.

2. – Sopra una varietà normale V_d (d $\geq$ 1) si considerino un divisore canonico K e l'*indice di specialità* di un divisore D di V_d

$$j[D] = \dim|K - D| + 1 = h^0(K - D). \tag{2.1}$$

OSSERVAZIONE 2. – *Se* D *è un divisore di Cartier di* V_d, *risulta,* come nel caso non singolare, $h^0(K - D) = h^d(D)$. Ciò può essere facilmente verificato seguendo un ragionamento analogo a quello che Zariski impiega in [17], pp. 136–138 per provare, nel caso non singolare, l'equivalenza tra la validità della relazione in questione ed il lemma di Enriques–Severi–Zariski. Si segnala, comunque, che la dimostrazione cui si allude è contenuta nel nostro quaderno [2], pp. 3-4.

Consideriamo ora sopra V_d un arbitrario divisore D e la sezione E_m (di V_d) con una generica forma d'ordine m. Nel caso $d \geq 2$ indicheremo con $A \cdot E_m$ il divisore segato su E_m da un divisore A di V_d, (cfr. [18], n. 6). Ricordiamo che vale la seguente relazione fra le dimensioni virtuali

$$\delta [D + E_m] = \delta [D] + \delta [(D + E_m) \cdot E_m] + 1 , \tag{2.2}$$

(cfr. [10], pp. 188–189; [3]). Indicata con E la generica sezione iperpiana di V_d, poiché risulta $E_m \equiv mE$, la (2.2), in forza della (1.1), porge

$$\chi (V_d , \mathcal{O} (D + mE)) = \chi (V_d , \mathcal{O} (D)) + \chi (E_m , \mathcal{O}_{E_m} ((D + mE) \cdot E_m)) . \tag{2.3}$$

Siano: K un divisore canonico di V_d ; $K(E_m)$ un divisore canonico di E_m ; h un intero relativo. Ponendo nella (2.3) $D = hE$ e $D = K - (h + m) E$ si ottengono, rispettivamente, le relazioni

$$\chi (V_d , \mathcal{O} ((h + m) E)) = \chi (V_d , \mathcal{O} (hE)) + \chi (E_m , \mathcal{O}_{E_m} (((h + m) E) \cdot E_m)). \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} \chi (V_d , \mathcal{O} (K - hE)) = \chi (V_d , \mathcal{O} (K - (h + m) E)) + \\ + \chi (E_m , \mathcal{O}_{E_m} ((K - hE) \cdot E_m)) . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Ricordando la proprietà d'aggiunzione $K(E_m) \equiv (K + E_m) \cdot E_m$, (cfr. [18], p. 589), la (2.5) assume la forma

$$\begin{aligned} \chi (V_d , \mathcal{O} (K - hE)) = \chi (V_d , \mathcal{O} (K - (h + m) E)) + \\ + \chi (E_m , \mathcal{O}_{E_m} (K (E_m) - (h + m) E \cdot E_m)) . \end{aligned} \tag{2.6}$$

OSSERVAZIONE 3. – È opportuno ricordare che *sopra una superficie normale* V_2 *sussiste l'uguaglianza* $p_a (V_2) = P_a (V_2)$; *inoltre per ogni intero relativo* s *vale la relazione*

$$\chi (V_2 , \mathcal{O} (K - sE)) = \chi (V_2 , \mathcal{O} (sE)) . \tag{2.7}$$

Ciò è stato dimostrato per via geometrica da Marchionna (cfr. [10], p. 183, nota (27) a piè di pagina; [10], p. 171, corollario 21; [11], p. 353 e seguenti). Una dimostrazione coomologica di tali proprietà è contenuta nel nostro quaderno [2], pp. 5–6 e segue un procedimento del tutto analogo a quello che verrà impiegato nel successivo n. 3 del presente lavoro per provare il Teorema 1.

3. – Siamo ora in grado di dimostrare il Teorema 1 enunciato nel n. 1. Si consideri una varietà normale V_3 a tre dimensioni. In tal caso la sezione E_m di V_3 con una forma generica d'ordine m è una superficie normale, sicché la relazione (2.7) comporta

$$\chi (E_m , \mathcal{O}_{E_m} (K (E_m) - (h + m) E \cdot E_m)) = \chi (E_m , \mathcal{O}_{E_m} ((h + m) E \cdot E_m)) .$$

Pertanto sottraendo la (2.6) dalla (2.4), si ottiene, nel caso attuale,

$$\chi(V_3, \mathcal{O}(K - h E)) + \chi(V_3, \mathcal{O}(hE)) = \tag{3.1}$$
$$= \chi(V_3, \mathcal{O}(K - (h + m) E)) + \chi(V_3, \mathcal{O}((h + m) E)).$$

Ponendo $h = 0$ nella (3.1) e ricordando le definizioni dei generi aritmetici $p_a(V_3)$ e $P_a(V_3)$ segue la relazione

$$P_a(V_3) - p_a(V_3) = \chi(V_3, \mathcal{O}(K - mE)) + \chi(V_3, \mathcal{O}(mE)). \tag{3.2}$$

Com'è noto, la caratteristica $\chi(V_d, \mathcal{O}(D - sE))$ è un polinomio nell'intero relativo s, dipendente soltanto dal divisore D e dalla varietà V_d, (cfr. [15], p. 80; [17], p. 133). Pertanto la funzione

$$\Psi(s) = \chi(V_3, \mathcal{O}(K - sE)) + \chi(V_3, \mathcal{O}(sE)) - (P_a(V_3) - p_a(V_3))$$

è un polinomio in s che si annulla, in virtù della (3.2), per ogni valore $s = m$ intero positivo. Quindi $\Psi(s)$ si annulla per ogni valore relativo di s, ossia vale la relazione

$$P_a(V_3) - p_a(V_3) = \chi(V_3, \mathcal{O}(K - sE)) + \chi(V_3, \mathcal{O}(sE)), \tag{3.3}$$

cioé

$$P_a(V_3) - p_a(V_3) = h^0(K - sE) - h^1(K - sE) + \tag{3.4}$$
$$+ h^2(K - sE) - h^3(K - sE) + h^0(sE) - h^1(sE) + h^2(sE) - h^3(sE).$$

Si scelga ora s negativo e così elevato, in valore assoluto, da avere contemporaneamente

(3.5) $\quad h^0(sE) = h^1(sE) = 0,$ (cfr. [15], n. 76; [17], pp. 139–140);

(3.6) $\quad h^i(K - sE) = 0,$ per $i = 1, 2, 3,$ (cfr. [15], n. 66; [17], p. 131),

e si tenga presente che l'osservazione 2 fornisce

$$h^3(sE) = h^0(K - sE). \tag{3.7}$$

Sostituendo nella (3.4) le relazioni (3.5), (3.6), (3.7), si ottiene

$$P_a(V_3) - p_a(V_3) = h^2(sE), \tag{3.8}$$

con s negativo, elevato in valore assoluto. La (3.8) mostra che l'uguaglianza $p_a(V_3) = P_a(V_3)$ equivale alla proprietà: $h^2(-nE) = 0$ per n intero positivo elevato. D'altra parte già sappiamo che, per n intero positivo elevato, risulta $h^1(-nE) = 0$, (cfr. la relazione (3.5)). Abbiamo così dimostrato che una V_3 normale è una varietà di Cohen–Macaulay se, e soltanto se, i suoi generi aritmetici sono uguali.

OSSERVAZIONE 4. – La relazione (3.8) mostra che *su una* V_3 *normale sussiste la disuguaglianza* $P_a(V_3) \geq p_a(V_3)$. Tale proprietà è stata dimostrata, per altra via, da Marchionna in [11], p. 357. Osserviamo pure che, in virtù della (3.3), l'uguaglianza $P_a(V_3) = p_a(V_3)$ è equivalente alla relazione

$$\chi(V_3, \mathcal{O}(K - sE)) = -\chi(V_3, \mathcal{O}(sE)),$$

che esprime il cosiddetto *teorema di dualità debole* per le V_3 normali. Tale equivalenza è stata anch'essa provata, per via geometrica, in [11], p. 357.

OSSERVAZIONE 5. – Una classe di varietà normali X a tre dimensioni per le quali risulta $P_a(X) > p_a(X)$ è costituita dai coni di S_r ($r \geq 5$) la cui generica sezione iperpiana E è una superficie irregolare ($h^1(\mathcal{O}_E) \neq 0$) ed aritmeticamente (cioè proiettivamente) normale. Per il teorema 1 basta infatti osservare che il cono X in questione è una varietà normale non di Cohen–Macaulay.

Poiché la sezione E è supposta aritmeticamente normale, la varietà X è anch'essa aritmeticamente normale (come ha osservato Gaeta, Annali di Matematica, 27 (1948), p. 193) e quindi normale. Sia ora $\mathcal{O}_{X,x}$ la spiga, nel vertice x del cono X, del fascio strutturale $\mathcal{O}_X$ di X. Denotiamo con dim $\mathcal{O}_{X,x}$ la dimensione omologica del modulo $\mathcal{O}_{X,x}$, cioè la lunghezza minima delle sue risoluzioni libere. Come è osservato in [15], p. 271, risulta dim $\mathcal{O}_{X,x} = r - 2$.

Pertanto, per il teorema 2 contenuto in [15], p. 269, non esiste un conveniente intero $\bar{n}$ tale che $H^2(X, \mathcal{O}(-n))$ sia nullo per ogni intero $n \geq \bar{n}$. Ricordando quanto richiamato nel n. 1, il cono X non è una varietà di Cohen–Macaulay [(2)].

4. – Nello spazio proiettivo complesso S_r consideriamo ora una varietà algebrica normale V_d, di dimensione $d \geq 2$ e sia $\mathbf{K} = \mathcal{O}(K)$ il *fascio canonico* associato ad un suo divisore canonico K (cfr. [18], III, n. 13; [19], n. 9). Indichiamo con ω_{V_d} il *fascio dualizzante* di V_d (cfr. [1], I; [6], p. 241).

Giova osservare che *i fasci* $\mathbf{K}$ e ω_{V_d} *sono isomorfi* (cfr. ad esempio [6], p. 246 nel caso non singolare; [16], p. 448 nel caso normale). Per uniformità con le note bibliografiche utilizzeremo, nel seguito, il fascio ω_{V_d}; in ogni enunciato si potrà tuttavia sostituire ω_{V_d} col fascio canonico $\mathbf{K}$.

Nel caso di una varietà V_d non singolare Kodaira e Spencer hanno provato (cfr. [9], p. 874) il classico

TEOREMA (forte sulla regolarità dell'aggiunto). – *Se* $\mathcal{L}$ *è un fascio molto ampio* [(3)] *su una varietà non singolare* V_d *allora risulta* $H^i(V_d, \mathbf{K} \otimes \mathcal{L}) = 0$ per $i \geq 1$.

(2) Riteniamo che i risultati contenuti nei nn. 1–3 continuino ad essere validi anche se ci si riferisce al caso astratto di una varietà algebrica V_3 assolutamente irriducibile ed assolutamente normale (cfr. [18] pp. 552–553), cioè normale rispetto ad un campo di definizione algebricamente chiuso e di caratteristica qualsiasi.

(3) Ricordiamo che un fascio invertibile $\mathcal{L}$ è molto ampio nel senso che gli si attribuisce attualmente (cfr. ad esempio [6], p. 153) se e solo se il sistema lineare completo associato ad un divisore individuato da $\mathcal{L}$ è ampio nel senso considerato da Kodaira in [8].

Appoggiandoci ad un importante risultato di Grauert–Riemenschneider contenuto in [5], p. 104, dimostreremo una proposizione sui sistemi aggiunti (Teorema 7) dalla quale si dedurrà immediatamente il teorema forte sulla regolarità dell'aggiunto nel caso di una varietà normale dotata di sole singolarità isolate. Allo scopo è utile riportare il risultato di Grauert–Riemenschneider nella forma segnalata da Ramanujam in [13], p. 49:

Siano X_d *una varietà non singolare ed* $\mathscr{S}$ *un fascio invertibile su* X_d *soddisfacente le ipotesi seguenti: esistono un intero* $n > 0$ *ed un morfismo birazionale* $f : X_d \to Y_d \subset S_N$ *tale che il fascio* $\mathscr{S}^n$ *sia isomorfo al fascio* $f^*(\mathcal{O}_{Y_d}(1))$ *immagine inversa di* $\mathcal{O}_{Y_d}(1)$; *allora risulta* $H^i(X_d, \mathscr{S}^{-1}) = 0$ *per* $i \leq d - 1$. Quindi, per il teorema di dualità di Serre, si ha

$$H^i(X_d, \omega_{X_d} \otimes \mathscr{S}) = 0 \qquad \text{per} \quad i \geq 1 . \tag{4.1}$$

OSSERVAZIONE 6. – Un esempio dovuto a Grauert–Riemenschneider (cfr. [4], n. 3.3) mostra che la precedente relazione (4.1) non si può estendere, in generale, ad una varietà normale singolare. L'esempio in questione è costituito da una varietà normale V a tre dimensioni avente una retta come luogo singolare e per la quale risulta $H^1(V, \omega_V \otimes \mathscr{S}) \neq 0$, con $\mathscr{S}$ opportuno fascio soddisfacente le ipotesi del teorema sopra riportato.

Ciò posto, sia $\pi : \tilde{V}_d \to V_d$ la *desingolarizzazione* (minimale) della nostra varietà normale V_d. Se $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$ sono due fasci coerenti su $\tilde{V}_d$ e V_d rispettivamente, si indicheranno con $\pi_* \mathscr{F}$ e $\pi^* \mathscr{G}$ i fasci immagine diretta ed immagine inversa di $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$, (per le ben note definizioni si rimanda ad esempio a [6], pp. 65, 110).

Sia ora $\mathscr{L}$ un *fascio* (invertibile) *ampio* su V_d. Ciò significa che esiste un intero positivo n tale che l'applicazione razionale associata al fascio $\mathscr{L}^n$ sia un isomorfismo $i : V_d \to V_d^* \subset S_N$ con $\mathscr{L}^n \simeq i^* \mathcal{O}_{V_d^*}(1)$. Si consideri ora il morfismo birazionale $f : \tilde{V}_d \to V_d^*$ definito ponendo $f = i \circ \pi$. Poiché risulta $(\pi^* \mathscr{L})^n = \pi^* \mathscr{L}^n \simeq \pi^* i^* (\mathcal{O}_{V_d^*}(1)) = f^* (\mathcal{O}_{V_d^*}(1))$, la (4.1) fornisce

$$H^i(\tilde{V}_d, \omega_{\tilde{V}_d} \otimes \pi^* \mathscr{L}) = 0 \qquad \text{per} \quad i \geq 1 . \tag{4.2}$$

Ciò premesso, si denoti con $R^i \pi_* \mathscr{F}$ l'i–esima immagine diretta di un fascio coerente $\mathscr{F}$ su $\tilde{V}_d$ (cfr. ad esempio [6], p. 260 e seguenti). Poiché risulta $R^i \pi_* \omega_{\tilde{V}_d} = 0$ per $i \geq 1$, (cfr. [4], Teorema 2.3; [7], p. 50), la formula di proiezione (cfr. ad esempio [6], p. 253) comporta

$$R^i \pi_* (\omega_{\tilde{V}_d} \otimes \pi^* \mathscr{L}) = R^i \pi_* \omega_{\tilde{V}_d} \otimes \mathscr{L} = 0 \qquad \text{per} \quad i \geq 1 . \tag{4.3}$$

In forza delle relazioni (4.3) dalla successione spettrale di Leray si ottiene l'isomorfismo (cfr. ad esempio [6], p. 252)

$$H^i(\tilde{V}_d, \omega_{\tilde{V}_d} \otimes \pi^* \mathscr{L}) \simeq H^i(V_d, \pi_* (\omega_{\tilde{V}_d} \otimes \pi^* \mathscr{L})) \qquad \text{per} \quad i \geq 1 . \tag{4.4}$$

Applicando nuovamente la formula di proiezione, la (4.4) diviene

$$H^i(\tilde{V}_d, \omega_{\tilde{V}_d} \otimes \pi^* \mathscr{L}) \simeq H^i(V_d, \pi_* \omega_{\tilde{V}_d} \otimes \mathscr{L}) \qquad \text{per} \quad i \geq 1 . \tag{4.5}$$

Ricordando la (4.2), dalla (4.5) si deduce la relazione, utile nel seguito,

$$\text{(4.6)} \qquad H^i(V_d, \pi_* \omega_{\tilde{V}_d} \otimes \mathscr{L}) = 0 \qquad \text{per} \quad i \geq 1 .$$

Possiamo ora provare il

TEOREMA 7. – *Sia* V_d *una varietà normale dotata di sottovarietà multiple di dimensione* k *(e priva di sottovarietà multiple di dimensione maggiore). Allora per ogni fascio* (invertibile) $\mathscr{L}$ *ampio su* V_d, *risulta* $H^i(V_d, \omega_{V_d} \otimes \mathscr{L}) = 0$ *per* $i > k$.

Dimostrazione. – Siano ancora $\pi : \tilde{V}_d \to V_d$ la desingolarizzazione (minimale) di V_d e $\pi_* \omega_{\tilde{V}_d}$ l'immagine diretta del fascio dualizzante $\omega_{\tilde{V}_d}$ di $\tilde{V}_d$. Come è noto (cfr. [4], p. 278) $\pi_* \omega_{\tilde{V}_d}$ è un sottofascio di ω_{V_d}; se ne deduce la successione esatta

$$\text{(4.7)} \qquad 0 \to \pi_* \omega_{\tilde{V}_d} \to \omega_{V_d} \to \mathscr{H} \to 0 ,$$

dove $\mathscr{H}$ denota il fascio quoziente $\omega_{V_d}/\pi_* \omega_{\tilde{V}_d}$.

Poiché il morfismo birazionale π è un isomorfismo al di fuori del luogo singolare S di V_d, i fasci ω_{V_d} e $\pi_* \omega_{\tilde{V}_d}$ hanno spighe isomorfe al di fuori di S. Ricordando che una successione esatta di fasci è esatta sulle spighe, dalla (4.7) segue che il fascio $\mathscr{H}$ ha spighe nulle fuori dei punti singolari di V_d; si dice, in breve, che il fascio $\mathscr{H}$ è concentrato sul luogo singolare S. Pertanto anche il fascio $\mathscr{H} \otimes \mathscr{L}$ è concentrato su S. Poiché, per ipotesi, $\dim S = k$, si ottiene

$$\text{(4.8)} \qquad H^i(V_d, \mathscr{H} \otimes \mathscr{L}) = 0 \qquad \text{per} \quad i > k .$$

Ciò posto, tensorizzando la (4.7) con il fascio (invertibile) $\mathscr{L}$, si ha la successione esatta

$$0 \to \pi_* \omega_{\tilde{V}_d} \otimes \mathscr{L} \to \omega_{V_d} \otimes \mathscr{L} \to \mathscr{H} \otimes \mathscr{L} \to 0 .$$

Se ne deduce la successione esatta di coomologia

$$\text{(4.9)} \qquad \begin{array}{l} 0 \to H^0(V_d, \pi_* \omega_{\tilde{V}_d} \otimes \mathscr{L}) \to H^0(V_d, \omega_{V_d} \otimes \mathscr{L}) \to H^0(V_d, \mathscr{H} \otimes \mathscr{L}) \to \\ \to H^1(V_d, \pi_* \omega_{\tilde{V}_d} \otimes \mathscr{L}) \to H^1(V_d, \omega_{V_d} \otimes \mathscr{L}) \to H^1(V_d, \mathscr{H} \otimes \mathscr{L}) \to \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \to H^i(V_d, \pi_* \omega_{\tilde{V}_d} \otimes \mathscr{L}) \to H^i(V_d, \omega_{V_d} \otimes \mathscr{L}) \to H^i(V_d, \mathscr{H} \otimes \mathscr{L}) \to \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \to H^d(V_d, \pi_* \omega_{\tilde{V}_d} \otimes \mathscr{L}) \to H^d(V_d, \omega_{V_d} \otimes \mathscr{L}) \to H^d(V_d, \mathscr{H} \otimes \mathscr{L}) \to 0 . \end{array}$$

Ricordando le relazioni (4.8) e (4.6), dall'esattezza della successione (4.9) segue la tesi.

Poiché una varietà normale V_d è priva di sottovarietà multiple di dimensione $d - 1$, dal teorema precedente si deduce immediatamente il

COROLLARIO 8. – *Per ogni fascio* (invertibile) $\mathscr{L}$ *ampio su una varietà normale* V_d *risulta* $H^{d-1}(V_d, \omega_{V_d} \otimes \mathscr{L}) = 0$.

COROLLARIO 9. – *Sopra una varietà normale* V_d *dotata di sole singolarità isolate vale il teorema forte sulla regolarità dell'aggiunto.*

OSSERVAZIONE 10. – Notiamo esplicitamente che il Teorema 7 ed i suoi corollari continuano a sussistere per un fascio invertibile $\mathscr{L}$ soddisfacente le ipotesi seguenti, certamente verificate da un fascio ampio: *esistono un morfismo birazionale* $\phi : V_d \rightarrow V_d^* \subset S_N$ *ed un intero positivo* n *tali che* $\mathscr{L}^n \simeq \phi^*(\mathcal{O}_{V_d^*}(1))$.

OSSERVAZIONE 11. – Nel caso di una superficie normale V_2 il corollario 9 discende anche da un risultato dovuto a Mumford. Infatti in [12] si dimostra che per ogni fascio $\mathscr{L}$ ampio su V_2 risulta $H^1(V_2, \mathscr{L}^{-1}) = 0$. Poiché la superficie V_2 è di Cohen–Macaulay, vale la dualità (cfr. [6], p. 244) e quindi si ha $H^1(V_2, \omega_{V_2} \otimes \mathscr{L}) = 0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. ALTMAN and S. KLEIMAN (1970) – *Introduction to Grothendieck Duality Theory*. Springer, 146.

[2] M. BELTRAMETTI e M. PALLESCHI (1979) – *Sull'annullamento di certi gruppi di coomologia di una varietà normale*. Istituto Matematico « F. Enriques », Milano. Quaderno 28/S.

[3] D. C. DEMARIA (1963–64) – *Sulla dimensione virtuale di un divisore sopra una varietà algebrica normale*. « Atti Accad. Scienze Torino », *98*.

[4] H. GRAUERT and O. RIEMENSCHNEIDER (1970) – *Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf Komplexen Räumen*. « Inv. Math. », *11*.

[5] H. GRAUERT and O. RIEMENSCHNEIDER. (1970) – *Verschwindungssätze fur analytische Kohomologiegruppen auf Komplexen Räumen*. Several complex variables I, Maryland, Springer, 155.

[6] R. HARTSHORNE (1977) – *Algebraic Geometry*. Springer.

[7] G. KEMPF *et al* (1973) – *Toroidal Embeddings* I. Springer, 339.

[8] K. KODAIRA (1954) – *Some results in the transcendental theory of algebraic varieties*. « Annals of Math. », *59*.

[9] K. KODAIRA and D. C. SPENCER (1953) – *Divisor class groups on algebraic varieties*. « Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A. », *39*.

[10] E. MARCHIONNA (1966) – *Sulla dimensione virtuale ed effettiva di un sistema lineare d'ipersuperficie appartenenti ad una varietà algebrica singolare*. « Rendiconti di Matematica », *25*.

[11] E. MARCHIONNA (1975) – *Su un teorema di dualità debole per una varietà algebrica normale*. « Bollettino U.M.I. », (4) *12*.

[12] D. MUMFORD (1967) – *Pathologies* III. « Amer. J. Math. », *89*.

[13] C. P. RAMANUJAM (1972) – *Remarks on the Kodaira vanishing theorem*. « Jour. Ind. Math. Soc. », *36*.

[14] D. REES (1957) - *The grade of an ideal or module.* « Proc. Camb. Math. Soc. », *53*.
[15] J. P. SERRE (1955) - *Faisceaux algébriques cohérents.* « Annals of Math. », *61*.
[16] P. M. H. WILSON (1978) - *On blowing up conductor ideals.* « Math. Proc. Camb. Phil. Soc. », *83*.
[17] O. ZARISKI (1956) - *Algebraic Sheaf theory.* « Bull. Amer. Math. Soc. », *62*.
[18] O. ZARISKI (1952) - *Complete linear systems on normal varieties and a generalization of a Lemma of Enriques-Severi.* « Ann. of Math. », *55*.
[19] O. ZARISKI (1969) - *An introduction to the theory of algebraic surfaces.* Springer.