Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Primo Brandi, Anna Salvadori

Martingale ed integrale alla Burkill-Cesari

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **67** (1979), n.3-4, p. 197–203.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_67_3-4_197_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1979.

Analisi matematica. — *Martingale ed integrale alla Burkill-Cesari* (*). Nota (**) di PRIMO BRANDI e ANNA SALVADORI, presentata dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — We show how a problem connected with the Burkill-Cesari integral can be solved by making use of a convergence theorem for a suitable martingale.

Nel dimostrare un teorema di rappresentazione per l'integrale del Calcolo delle Variazioni alla Weierstrass-Burkill-Cesari, in spazi di Banach, sorge il problema di approssimare una derivata alla Radon-Nikodym attraverso una successione di funzioni semplici di tipo particolare; si può risolvere tale questione traducendola in termini di convergenza di una opportuna martingala. Scopo di questa nota è quello di illustrare il collegamento che si stabilisce tra la teoria delle martingale ed il suddetto problema legato all'integrale di Burkill-Cesari.

Per i dettagli e le dimostrazioni si rimanda a [3].

Desideriamo ringraziare i Professori L. Cesari e C. Vinti per le conversazioni avute con loro sull'argomento.

1. – MARTINGALE E DERIVATE DI FUNZIONI DI INSIEME.

Richiamiamo brevemente la definizione di martingala ([9], [6], [16], [12], [13]) al fine di mettere in luce lo stretto legame che sussiste fra l'esistenza e la approssimazione della derivata di una funzione di insieme e la convergenza di una martingala.

Sia $(\Omega , \mathscr{A} , \mu)$ uno spazio di misura finita, sia T $(\geqslant)$ un insieme diretto e B uno spazio di Banach.

DEFINIZIONE 1. Una *martingala* è una rete $(\mathscr{A}_t , f_t)_{t\in \mathrm{T}}$, dove $\mathscr{A}_t \subset \mathscr{A}$ è una σ-algebra e $f_t : \Omega \rightarrow \mathrm{B}$ è una funzione integrabile alla Bochner, $t \in \mathrm{T}$, tale che

1) se $t_1 \leqslant t_2$ allora $\mathscr{A}_{t_1} \subset \mathscr{A}_{t_2}$;

2) f_t è una funzione $\mathscr{A}_t$-misurabile o uguale quasi ovunque ad una tale funzione, $t \in \mathrm{T}$;

3) se $t_1 \leqslant t_2$ allora per ogni $\mathrm{X} \in \mathscr{A}_{t_1}$ si ha che $\int_{\mathrm{X}} f_{t_1} \, d\mu = \int_{\mathrm{X}} f_{t_2} \, d\mu$.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Matematica dell'Università di Perugia nell'ambito del G.N.A.F.A. - C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 25 ottobre 1979.

Sia $(\mathscr{A}_t, f_t)_{t \in T}$ una martingala. Indichiamo con $\mathscr{A}_\infty$ la σ–algebra generata da $\bigcup_{t \in T} \mathscr{A}_t$. Osserviamo che, se T non ha massimo, l'insieme $\hat{T} = T \cup \{\infty\}$, con la convenzione che ∞ segue ogni elemento di T, è ancora un insieme diretto.

M. Metivier in [14] mette a fuoco le questioni che sorgono riguardo la convergenza di una martingala, sintetizzandole nei seguenti tre problemi.

Problema 1. Esiste un'applicazione $f_\infty : \Omega \to B$ tale che la rete $(\mathscr{A}_t, f_t)_{t \in \hat{T}}$ è ancora una martingala?

Problema 2. Se f_∞ è una soluzione del problema 1, la rete $(f_t)_{t \in T}$ converge secondo un qualche tipo di convergenza ad f_∞?

Problema 3. Indipendentemente dall'esistenza della soluzione del problema 1, la rete $(f_t)_{t \in T}$ converge secondo un qualche tipo di convergenza ad un'applicazione $f : \Omega \to B$?

Vari autori hanno dato una risposta a tali quesiti in un contesto anche molto generale; la letteratura sull'argomento è vasta ma noi ci limitiamo a citare brevemente solo un risultato, relativo alla soluzione del Problema 2, di cui faremo uso nel seguito.

TEOREMA 1. *Se* $(\mathscr{A}_t, f_t)_{t \in \hat{T}}$ *è una martingala allora la rete* $(f_t)_{t \in T}$ *converge ad* f_∞ *in* L_p, $1 \le p < \infty$. *Nel caso* T *sia numerabile allora* $(f_t)_{t \in T}$ *converge ad* f_∞ *μ–quasi ovunque in* Ω. (Cfr. S. D. Chatterji [6], [7], [8], A. Ionescu Tulcea–C. Ionescu Tulcea [12], J. Neveu [15]. N. Dinculeanu [9]. E. Hewitt–K. Stromberg [11]).

La teoria delle martingale ha molte applicazioni, vediamo ora, in particolare, in che modo si possono collegare le martingale alle derivate di funzioni di insieme (cfr. ad esempio M. Metivier [14]).

DEFINIZIONE 2. Una rete $(P_t)_{t \in T}$ di partizioni finite di Ω è detta *base di derivazione* se la σ–algebra generata da $\bigcup_{t \in T} P_t$ coincide con $\mathscr{A}$ e ogniqualvolta $t_1 \ll t_2$ allora P_{t_2} è un raffinamento di P_{t_1}.

Sia quindi $(P_t)_{t \in T}$ una base di derivazione e sia $\alpha : \mathscr{A} \to B$ una funzione additiva. Per ogni $t \in T$, consideriamo la funzione $\sigma_t : \Omega \to B$ definita da $\sigma_t(w) = \sum_{X \in P_t} \frac{\alpha(X)}{\mu(X)} \chi_X(w)$, con la convenzione di porre $\frac{\alpha(X)}{\mu(X)} = 0$ se $\mu(X) = 0$.

Se la funzione α è «dominata» da μ, cioè se $\mu(X) = 0$ implica $\alpha(X) = 0$, $X \in \mathscr{A}$, allora chiaramente la rete $(\mathscr{A}_t, \sigma_t)_{t \in T}$, dove $\mathscr{A}_t$ indica la σ–algebra (finita) generata da P_t, $t \in T$, è una martingala e risulta $\mathscr{A}_\infty = \mathscr{A}$.

DEFINIZIONE 3. Se la rete $(\sigma_t)_{t \in T}$ converge secondo la convergenza «$*$» ad una funzione $f : \Omega \to B$, quest'ultima è detta la «$*$»–*derivata* di α rispetto la base $(P_t)_{t \in T}$.

Il problema 1 è quindi il problema di esistenza di una « densità $d\alpha/d\mu$ ».
Il problema 3 è quello dell'esistenza di una « * »–derivata.
Il problema 2, infine, equivale al problema di stabilire se la densità $d\alpha/d\mu$ è una « * »–derivata.

Come è noto, per misure vettoriali non sussiste un teorema di Radon–Nikodym così generale come nel caso scalare, è interessante quindi che, come applicazione dei risultati relativi ai problemi 1, 2 e 3, per una generica martingala, si ottengono varie proposizioni circa l'esistenza e l'approssimazione della densità $d\alpha/d\mu$.

2. – SULL'INTEGRALE PARAMETRICO DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI ALLA WEIERSTRASS–BURKILL–CESARI.

In [4] Cesari ha introdotto, in un contesto molto generale, l'integrale di Burkill per funzioni di insieme a valori in $\mathbf{R}^n$ e questo processo di integrazione è noto come integrale di Burkill–Cesari. In questo contesto si inquadra anche il concetto di quasi additività che Cesari ha fornito in [4] come condizione che assicura l'integrabilità.

Richiamiamo brevemente la definizione di integrale di Burkill–Cesari. Sia $(A, \mathscr{G})$ uno spazio topologico ed $\{I\}$ una collezione di sottoinsiemi di A. Per sistema finito si intende la collezione di un numero finito di elementi di $\{I\}$, che indicheremo con $D = [I_1, \cdots, I_N]$, tale che $I_i^0 \neq \emptyset$, $i = 1, \cdots, N$, $I_i^0 \cap \bar{I}_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 1, \cdots, N$, dove « o » e « — » indicano rispettivamente l'interno e l'aderenza nella topologia di A. Sia $T(\geqslant)$ un insieme diretto e sia $(D_t)_{t \in T}$ una rete di sistemi finiti. Considerata una funzione di insieme $\varphi : \{I\} \to \mathbf{R}^n$, essa è detta *integrabile alla Burkill–Cesari* su A se esiste in $\mathbf{R}^n$ il limite $\lim_T \sum_{I \in D_t} \varphi(I)$ e, in tal caso, si pone $\int_A \varphi = \lim_T \sum_{I \in D_t} \varphi(I)$.

Inoltre φ è detta a *variazione limitata* se l'integrale di Burkill–Cesari di $\|\varphi\|$ è finito.

Sempre in [4], Cesari ha definito l'integrale parametrico del Calcolo delle Variazioni alla Weierstrass in termini di un integrale di Burkill–Cesari di una opportuna funzione di insieme. Sia $p : A \to K$, $K \subset \mathbf{R}^m$ una varietà Euclidea e sia $f : K \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ una funzione assegnata $f(p, \xi)$, si consideri la funzione di insieme $\Phi : \{I\} \to \mathbf{R}$ definita da $\Phi(I) = f(p(\tau_I), \varphi(I))$ con $\tau_I \in I$. Cesari [4] ha dimostrato che, se φ è quasi additiva e a variazione limitata su A, allora anche la funzione Φ è quasi additiva e a variazione limitata, essenzialmente sotto ipotesi, di continuità di f in (p, ξ) e di positiva omogeneità di grado uno di f in ξ, che sono usualmente assunte per l'integrale parametrico. In altre parole, le proprietà di φ di essere quasi additiva e a variazione limitata su A sono preservate dalla trasformazione non lineare f. Di più l'integrale $\int_A \Phi$ è indipendente dalla scelta del punto τ_I in I. L'integrale alla

Burkill–Cesari di Φ su A, $\int_A \Phi$, è detto integrale parametrico del *Calcolo delle Variazioni alla Weierstrass* della funzione f sulla varietà p rispetto la funzione φ.

Successivamente, in [5], Cesari ha dato un teorema di rappresentazione per tale integrale in termini di un integrale di Lebesgue del tipo $\int_A f\left(p, \frac{d\nu}{d\mu}\right) d\mu$, dove ν è una misura vettoriale a valori in $\mathbf{R}^n$ e μ una misura scalare, entrambe definite sulla σ–algebra $\mathfrak{B}$ dei Borelliani di A. Queste due misure estendono rispettivamente gli integrali di Burkill–Cesari delle funzioni φ e $\|\varphi\|$ su $\mathcal{G}$ e μ è la variazione totale di ν.

Al fine di ottenere questo teorema di rappresentazione, Cesari dimostra tra l'altro, che la rete delle funzioni semplici $\eta_t = \sum_{I \in D_t} \frac{\nu(I^0)}{\mu(I^0)} \chi_{I^0}$ converge in L_2 alla derivata di Radon–Nikodym $d\nu/d\mu$ (cfr. [5] Prop. 5. iii).

G. Warner ([17], [18]) ha trasportato la definizione di integrale di Burkill–Cesari e quindi quella di integrale parametrico del Calcolo delle Variazioni alla Weierstrass per funzioni a valori in spazi vettoriali topologici localmente convessi, fornendo per quest'ultimo integrale un teorema di esistenza, analogo a quello di Cesari, nel caso di funzioni quasi additive e a variazione limitata φ a valori in uno spazio di Banach uniformemente convesso.

Nel lavoro [1], abbiamo studiato l'integrale di Burkill–Cesari per funzioni a valori in uno spazio di Banach B e ci siamo occupati, in particolare, di stabilire alcune proprietà di cui esso gode come funzione vettoriale d'insieme. Questo ci ha permesso di costruire, sotto ipotesi per cui rimandiamo a [2], la misura vettoriale ν, a valori in B, e la misura scalare μ che estendono rispettivamente l'integrale di Burkill–Cesari delle funzioni φ e $\|\varphi\|$ alla σ–algebra $\mathfrak{B}$ e sono tali che μ risulta la variazione totale di ν. Alla luce di questi risultati, in [3] abbiamo dato il seguente teorema di rappresentazione per l'integrale parametrico del Calcolo delle Variazioni alla Weierstrass in spazi di Banach, in termini di un integrale di Bochner, estendendo in tal modo il risultato di Cesari [5] dato in spazi Euclidei.

TEOREMA 2. *Sia* $p : A \to K$ *ed* $f : K \times E \to F$ *con* K *spazio metrico,* E *spazio di Banach reale uniformemente convesso ed* F *spazio di Banach e sia* $\varphi : \{I\} \to E$. *Sotto ipotesi per cui si rimanda a* [3], *esistono entrambi gli integrali*

$$\int_A \Phi \quad e \quad \int_A f\left(p, \frac{d\nu}{d\mu}\right) d\mu$$

e risulta

$$\int_A \Phi = \int_A f\left(p, \frac{d\nu}{d\mu}\right) d\mu$$

dove ν *e* μ *sono le misure indicate sopra e* $d\nu/d\mu$ *è la derivata di Radon–Nikodym.*

Al fine di ottenere questo risultato, è stato molto utile, come in [5], ottenere una approssimazione della derivata $d\nu/d\mu$ mediante una rete di funzioni semplici del tipo η_t. Il procedimento usato da Cesari in [5] per dimostrare la convergenza in L_2 della rete $(\eta_t)_{t\in T}$ a $d\nu/d\mu$ non si può però applicare in spazi di Banach in quanto fa uso sostanzialmente dell'esistenza di un prodotto interno in $\mathbf{R}^n$. D'altronde, come si vede subito, il suddetto problema di approssimazione è molto simile a quello di stabilire se la derivata di Radon–Nikodym $d\nu/d\mu$ è una «*»–derivata (cfr. Def. 3) per una opportuna convergenza «*», ma non coincide con esso in quanto i sistemi finiti $(D_t)_{t\in T}$ non costituiscono, in generale, una base di derivazione.

È stato comunque possibile risolvere la questione che ci eravamo posta traducendola in un problema di tipo 2 per una opportuna martingala.

3. – Applicazione di un risultato della teoria delle martingale alla soluzione di un problema legato all'integrale del Calcolo delle Variazioni alla Weierstrass.

Richiamiamo brevemente (omettendo le dimostrazioni) il procedimento da noi usato in [3] per stabilire la convergenza in L_p, $1 \leq p < \infty$, di una sottorete di $(\eta_t)_{t\in T}$ alla densità $d\nu/d\mu$.

Noi consideriamo qui una funzione vettoriale di insieme $\varphi : \{I\} \to B$ a valori in uno spazio di Banach reale riflessivo ed assumiamo, come sopra, che φ sia quasi additiva e a variazione limitata su A. La misura vettoriale ν ([2]) è quindi a valori in uno spazio di Banach riflessivo, inoltre, come abbiamo già osservato, la misura scalare μ risulta la sua variazione totale ([2]), pertanto esiste la derivata di Radon–Nikodym $d\nu/d\mu$ (cfr. [3] tenuto conto di Dinculeanu [9]).

Assumiamo che la rete $(D_t)_{t\in T}$ ammetta una sottorete $(D_{t'})_{t'\in T'}$, $T' \subset T$, che goda della seguente proprietà:

se $t_1' \ll t_2'$ allora $D_{t_1'} < D_{t_2'}$, intendendo con questo che per ogni $I \in D_{t_1'}$ risulti $\bar{I} = \bigcup_{\substack{J \subseteq I \\ J \in D_{t_2'}}} \bar{J}$.

Per semplicità indicheremo tale sottorete ancora con $(D_t)_{t\in T}$.

Fissato $t \in T$ e posto $D_t = [I_1, \cdots, I_N]$, indicheremo con $\mathfrak{B}_t$ la σ–algebra generata della famiglia $\left\{A - \bigcup_{i=1}^{N} \bar{I}_i \,;\, \bar{I}_i \,,\, i = 1, \cdots, N\right\}$ ed associamo all'elemento t la seguente partizione di A:

$$P_t = \left\{\bar{I}_1, \bar{I}_2 - \bar{I}_1, \bar{I}_3 - (\bar{I}_1 \cup \bar{I}_2), \cdots, \bar{I}_N - \left(\bigcup_{i=1}^{N-1} \bar{I}_i\right), A - \bigcup_{i=1}^{N} \bar{I}_i\right\}.$$

Indicata inoltre con $\mathfrak{P}_t$ la σ–algebra generata da P_t, si ha ovviamente $P_t \subset \mathfrak{P}_t \subset \mathfrak{B}_t \subset \mathfrak{B}$.

Sia infine $\tau_t : A \to B$ la funzione semplice definita da

$$\tau_t(w) = \sum_{X \in P_t} \frac{\nu(X)}{\mu(X)} \chi_X(w),$$

con la convenzione di porre $\nu(X)/\mu(X) = 0$ se $\mu(X) = 0$, $t \in T$.

LEMMA 1. *Risulta* $\lim_T \mu\left(\bigcup_{I \in D_t} I^0\right) = \mu(A)$.

LEMMA 2. *Per ogni* $I \in D_t$, $t \in T$, *risulta* $\mu(\bar{I}) = \mu(I^0)$ *e* $\nu(\bar{I}) = \nu(I^0)$.

LEMMA 3. *Fissato* $t \in T$, *per ogni* $X \in \mathfrak{B}_t$ *esiste un* $Y \in \mathfrak{P}_t$ *tale che*

$$\mu(X) = \mu(Y) \quad e \quad \nu(X) = \nu(Y).$$

Verifichiamo che la rete $(\mathfrak{B}_t, \tau_t)_{t \in T}$ è una martingala. Ovviamente $(\mathfrak{B}_t)_{t \in T}$ è una rete crescente di sotto σ–algebre di $\mathfrak{B}$, inoltre osserviamo che, in virtù del Lemma 3, la funzione τ_t risulta la derivata di Radon–Nikodym della misura ν rispetto la misura μ relativamente alla σ–algebra $\mathfrak{B}_t$, $t \in T$. Pertanto, posto $f_\infty = d\nu/d\mu$, se la σ–algebra $\mathfrak{B}_\infty$ coincide con $\mathfrak{B}$, la rete $(\mathfrak{B}_t, \tau_t)_{t \in \hat{T}}$ è ancora una martingala.

Come applicazione immediata del Teorema 1 del n. 1 si ha quindi il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 1. *Se la* σ*–algebra* $\mathfrak{B}_\infty$ *coincide con* $\mathfrak{B}$, *allora la rete* $(\tau_t)_{t \in T}$ *converge in* L_p, $1 \leq p < \infty$, *a* $d\nu/d\mu$. *Se poi* T *è numerabile, allora* $(\tau_t)_{t \in T}$ *converge a* $d\nu/d\mu$ μ*–quasi ovunque in* A.

Fissato $t \in T$, le due funzioni semplici η_t e τ_t, pur non essendo in generale uguali μ–quasi ovunque, differiscono al più sull'insieme $A - \bigcup_{I \in D_t} I^0$.

Poiché, in virtù del Lemma 1, risulta $\lim_T \mu(A - \bigcup_{I \in D_t} I^0) = 0$, si ha che $\eta_t - \tau_t \xrightarrow[T]{} 0$ in L_p, $1 \leq p < \infty$. Per quanto riguarda la convergenza μ–quasi ovunque, osserviamo che, in generale, risulta $A - \bigcup_{I \in D_t} I^0 \supset A - \bigcup_{I \in D_t} \bar{I}$ ed, in virtù del Lemma 2, si ha che $\mu(A - \bigcup_{I \in D_t} I^0) = \mu(A - \bigcup_{I \in D_t} \bar{I})$. Poiché $(A - \bigcup_{I \in D_t} \bar{I})_{t \in T}$ è una rete monotona di insiemi la cui misura tende a zero e le due funzioni η_t e τ_t sono uguali μ–quasi ovunque sull'insieme $\bigcup_{I \in D_t} \bar{I}$, allora, se T è numerabile, risulta $\eta_t - \tau_t \xrightarrow[T]{} 0$ μ–quasi ovunque.

Pertanto dalla Prop. 1 discende il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 2. *Se la* σ*–algebra* $\mathfrak{B}_\infty$ *coincide con* $\mathfrak{B}$, *allora la rete* $(\eta_t)_{t \in T}$ *converge in* L_p, $1 \leq p < \infty$, *a* $d\nu/d\mu$. *Se poi* T *è numerabile, allora* $(\eta_t)_{t \in T}$ *converge a* $d\nu/d\mu$ μ*–quasi ovunque in* A.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. BRANDI e A. SALVADORI (1978) – *Sull'integrale debole alla Burkill-Cesari*, « Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena », XXVII, 14–38.

[2] P. BRANDI e A. SALVADORI – *Sull'estensione dell'integrale alla Burkill-Cesari ad una misura*, « Rend. Circ. Mat. Palermo », in corso di stampa.

[3] P. BRANDI e A. SALVADORI – *Un teorema di rappresentazione per l'integrale parametrico del Calcolo delle Variazioni alla Weierstrass*, « Ann. Mat. Pura Appl. », in corso di stampa.

[4] L. CESARI (1962) – *Quasi additive set functions and the concept of integral over a variety*, « Trans. Amer. Math. Soc. », *102*, 94–113.

[5] L. CESARI (1962) – *Extension problem for quasi additive set functions and Randon-Nikodym derivatives* « Trans. Amer. Math. Soc. », *102*, 114–146.

[6] S. D. CHATTERJI (1960) – *Martingales of Banach-valued random variables*. « Bull. Amer. Math. Soc. », *66*, 395–398.

[7] S. D. CHATTERJI (1964) – *A note on the convergence of Banach-space valued martingales*, « Math. Annalen », *153*, 142–149.

[8] S. D. CHATTERJI (1968) – *Martingale convergence and the Radon-Nikodym theorem in Banach spaces*, « Math. Scand. », *22*, 21–41.

[9] N. DINCULEANU (1967) – *Vector measures*, Pergamon Press.

[10] J. L. DOOB (1967) – *Stochastic process*, John Wiley & Sons, New York.

[11] E. HEWITT and K. STROMBERG (1975) – *Real and abstract analysis*, Springer Verlag, New York.

[12] A. IONESCU TULCEA and C. IONESCU TULCEA (1963) – *Abstract ergodic theorems*, « Trans. Amer. Math. Soc. », *107*, 107–124;

[13] M. METIVIER (1963) – *Martingales a valeurs vectorielles – applications a la derivation des functions d'ensembles a valeurs vectorielles*, « C. R. », *256*, 3802–3805.

[14] M. METIVIER (1967) – *Martingales a valeurs vectorielles-applications a la derivation des mesures vectorielles*, « Ann. Inst. Fourier Grenoble », *17*, 2, 175–208.

[15] J. NEVEU (1965) – *Relations entre la theorie des martingales et la theorie ergodique*, « Ann. Inst. Fourier grenoble », *15*, 1, 31–42.

[16] F. S. SCALORA (1961) – *Abstract martingale convergence theorems*, « Pacific J. Math. », XI, 347–374.

[17] G. WARNER (1968) – *The Burkill-Cesari integral*, « Duke Math. I. », *35*, 61–78.

[18] G. WARNER (1968) – *The generalized Weierstrass-type integral* $\int f(\zeta, \varphi)$, « Ann. Scuola Norm. Pisa « (2), *2*, 163–192.