Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Claudio Citrini

Controesempi all'unicità del moto di una corda in presenza di una parete

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **67** (1979), n.3-4, p. 179–185.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_67_3-4_179_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1979.

Analisi matematica. — *Controesempi all'unicità del moto di una corda in presenza di una parete.* Nota [(*)] di CLAUDIO CITRINI [(**)], presentata dal Socio L. AMERIO.

SUMMARY. — We give some counterexemples to the uniqueness of the motion of a string vibrating against a rigid wall, with suitable external forces. The impact is supposed to be elastic or partially elastic.

Il problema del moto di una corda in presenza di un ostacolo unilaterale costituito da una parte rigida è stato oggetto di vari lavori a partire dal 1975. In essi si ottengono teoremi di esistenza ed unicità nell'ipotesi essenziale che la forza esterna sia assente ([1], [2], [3]), oppure che tenda a *non avvicinare* la corda alla parete [4]; cfr. anche [5] e [6]).

Scopo di questa breve Nota è di mostrare, mediante esempi, che il problema può ammettere più di una soluzione nel caso in cui il segno della forza sia arbitrario. Tali esempi, a prima vista paradossali (in quanto una corda, originariamente aderente ad una parete, se ne distacca sotto l'azione di forze attive dirette sempre contro la parete stessa), ne generalizzano uno che, nel caso del punto materiale, mi è stato segnalato dai Proff. L. Amerio e G. Prouse, che ringrazio vivamente.

Consideriamo, nel primo quadrante del piano $0\xi\eta$, l'equazione (nel senso delle distribuzioni):

$$y_{\xi\eta} = f(\mathrm{P}) + \mathrm{J}\,, \tag{1}$$

con le condizioni al contorno $y(0, \eta) = y(\xi, 0) = 0$, ed il vincolo unilaterale

$$y(\mathrm{P}) \geq 0\,. \tag{2}$$

Nella (1) la *reazione vincolare* J soddisfa le relazioni

$$\mathrm{J} \geq 0 \tag{3}$$

$$\operatorname{supp} \mathrm{J} \subseteq \{\mathrm{P} \mid y(\mathrm{P}) = 0\}\,. \tag{4}$$

La soluzione $y(\mathrm{P})$ viene supposta continua e derivabile q.o.

La *natura dell'urto* (elastico, parzialmente elastico, anelastico) viene tradotta dalle leggi:

$$y_\xi^+ = -hy_\xi^- \quad , \quad y_\eta^+ = -hy_\eta^- \tag{5}$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 6 luglio 1979.

(**) Istituto di Matematica della Facoltà di Ingegneria del Politecnico di Milano. L'Autore aderisce al G.N.A.F.A.–C.N.R.

(cfr. [3]), valide in ogni *punto d'urto* $\overline{P}$ (caratterizzato dalle condizioni $y = 0$, $y_{\xi}^{-} < 0 , y_{\eta}^{-} < 0$). Per formulazioni più deboli, cfr. [2] e [4].

Cerchiamo ora soluzioni che siano funzioni del solo prodotto $t = \xi\eta$; poniamo cioè:

$$y(\xi, \eta) = w(\xi\eta) = w(t), \tag{6}$$

$$f(\xi, \eta) = -g(\xi\eta) = -g(t). \tag{7}$$

Si ha, dalla (6):

$$y_{\xi}(\xi, \eta) = \eta w'(\xi\eta) \quad , \quad y_{\eta}(\xi, \eta) = \xi w'(\xi\eta), \tag{8}$$

e successivamente

$$y_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \xi\eta w''(\xi\eta) + w'(\xi\eta) = tw''(t) + w'(t). \tag{9}$$

Pertanto la (1), in ogni dominio in cui sia $y > 0$, si riduce a

$$tw''(t) + w'(t) = -g(t), \tag{10}$$

in virtù delle (4), (7). Studiamo ora, per la (10), nell'intervallo $[\alpha, \beta]$, il problema ai limiti:

$$\begin{cases} w(\alpha) = w(\beta) = 0 \\ w'(\alpha^{+}) = \lambda > 0 \quad , \quad w'(\beta^{-}) = -\mu < 0. \end{cases} \tag{11}$$

Si ha subito, integrando due volte la (10):

$$tw'(t) = \alpha\lambda - \int_{\alpha}^{t} g(x)\, dx, \tag{12}$$

$$w(t) = \alpha\lambda \log(t/\alpha) - \int_{\alpha}^{t} g(x) \log(t/x)\, dx. \tag{13}$$

Sostituendo le condizioni (11) per $t = \beta$ abbiamo:

$$\alpha\lambda + \beta\mu = \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\, dx, \tag{14}$$

$$\alpha\lambda \log(\beta/\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} g(x) \log(\beta/x)\, dx. \tag{15}$$

Posto $\theta = \log(\beta/\alpha)$ si ottiene anche il sistema equivalente:

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha\lambda\theta &= \int_\alpha^\beta g(x) \log(\beta/x) \, \mathrm{d}x \\ \beta\mu\theta &= \int_\alpha^\beta g(x) \log(x/\alpha) \, \mathrm{d}x \, . \end{aligned} \right.$$

Valutiamo ora gli integrali a secondo membro delle (16) in un caso particolare. Sia

$$(17) \qquad \omega(x) = \begin{cases} \rho \exp - 1/(1 - x^2) & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \, , \end{cases}$$

$\left(\text{con } \rho \text{ tale che } \int \omega(x) \, \mathrm{d}x = 1\right)$, e

$$(18) \qquad \phi(x ; \alpha', \beta') = \omega\left(2 \frac{x - \alpha'}{\beta' - \alpha'} - 1\right) \qquad (\alpha' < \beta') \, .$$

Posto allora

$$(19) \qquad \alpha = q\beta = e^{-\theta} \beta \; ; \; \alpha' = (1 - 2\varepsilon)\beta \; ; \; \beta' = \beta \, (q < 1 - 2\varepsilon < 1) \, ,$$

abbiamo, con semplici calcoli

$$(20) \qquad \int_\alpha^\beta \phi(x ; \alpha', \beta) \log(\beta/x) \, \mathrm{d}x = \varepsilon\beta \int_{-1}^{1} \omega(u) \log(\varepsilon u + 1 - \varepsilon)^{-1} \, \mathrm{d}u = \varepsilon\beta \, \mathrm{I}(\varepsilon) \, .$$

Si verifica agevolmente che è $\mathrm{I}(\varepsilon) < \theta$ e

$$(21) \qquad \mathrm{I}(\varepsilon) \sim \varepsilon \qquad \text{per} \quad \varepsilon \to 0 \, .$$

Analogamente

$$(22) \qquad \int_\alpha^\beta \phi(x ; \alpha', \beta) \log(x/\alpha) \, \mathrm{d}x = \varepsilon\beta \, \{\theta - \mathrm{I}(\varepsilon)\} \, .$$

Posto infine, $\forall i \geq 0$:

$$(23) \qquad \mathrm{M}_i = \max |\omega^{(i)}(x)| \, ,$$

si ha subito, dalle (18), (19):

$$(24) \qquad \max |\phi^{(i)}(x ; \alpha', \beta)| = \mathrm{M}_i (\varepsilon\beta)^{-i} .$$

Consideriamo ora la successione $\beta_n = q^n \ (q < 1)$, e poniamo $\alpha_n = q^{n+1}$, $\alpha'_n = (1 - 2\,\varepsilon_n)\, q^n$ in accordo con le (19); siano poi date $\{\lambda_n\}$ e $\{\mu_n\}$, con $\lambda_n = h\mu_{n+1}$ in modo da soddisfare la (5). Nella (10) sia poi

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \, \phi(t\,;\alpha'_n\,,\beta_n)\,, \tag{25}$$

con $C_n > 0$ da determinare. Risulta ovviamente $g(t) \geq 0$, e $g(t) \equiv 0$ per $t < 0$ e $t > 1$. Per le (20), (22), le (16) diventano allora:

$$\begin{cases} q^{n+1} h\mu_{n+1}\, \theta = C_n\, \varepsilon_n\, q^n\, I(\varepsilon_n) \\ q^n\, \mu_n\, \theta = C_n\, \varepsilon_n\, q^n \{\theta - I(\varepsilon_n)\}\,, \end{cases} \tag{26}$$

equivalenti a

$$\begin{cases} \mu_n = C_n\, \varepsilon_n \{1 - I(\varepsilon_n)/\theta\} \\ \mu_{n+1} = \mu_n\, I(\varepsilon_n)/hq\, \{\theta - I(\varepsilon_n)\}\,. \end{cases} \tag{27}$$

Esempio A. Scegliendo

$$\mu_n = q^{n(m+1)} \tag{28}$$

la seconda delle (27) fornisce

$$I(\varepsilon_n) = \frac{h\theta q^{m+2}}{1 + hq^{m+2}} \tag{29}$$

che, per la (21), ha certamente una soluzione ε indipendente da n. Ne segue, per la prima delle (27):

$$C_n = Kq^{n(m+1)} \qquad \text{con} \quad K = \theta/\varepsilon\, \{\theta - I(\varepsilon)\} > 0\,. \tag{30}$$

Dalle (25), (30) otteniamo quindi

$$|g^{(i)}(t)| \leq KM_i\, \varepsilon^{-i}\, q^{n(m+1-i)} \qquad \text{in} \quad [\alpha_n\,,\beta_n] \tag{31}$$

da cui $g \in C^m(-\infty\,, +\infty)$.

Esempio B. Scegliendo invece

$$\mu_n = q^{n^2} \tag{32}$$

abbiamo

$$I(\varepsilon_n) = \frac{h\theta q^{2n+3}}{1 + hq^{2n+3}} \tag{33}$$

che, sempre per la (21), fornisce una successione di valori

$$\varepsilon_n \sim h\theta q^{2n+3}. \tag{34}$$

È pertanto

$$C_n \sim q^{(n-1)^2}/h\theta q^4, \tag{35}$$

e quindi

$$|g^{(i)}(t)| \leq K_i' \, q^{n^2-2n(i+1)} \qquad \text{in} \quad [\alpha_n, \beta_n] \tag{36}$$

da cui $g \in C^\infty(-\infty, +\infty)$.

In entrambi i casi la (13) fornisce la soluzione $w(t)$, e quindi, per la (6), la $y(P)$. Poiché il problema ammette manifestamente anche la soluzione $y \equiv 0$, la non unicità è provata.

OSSERVAZIONE I. Il caso del *punto materiale* si può trattare in modo analogo, considerando l'equazione

$$v''(t) = -g(t) \tag{37}$$

con la condizione d'urto

$$v'(t^+) = -hv'(t^-). \tag{38}$$

Le analoghe delle (16) sono in questo caso

$$\begin{cases} \lambda\delta = \displaystyle\int_\alpha^\beta (\beta - x)\, g(x)\, dx \\ \mu\delta = \displaystyle\int_\alpha^\beta (x - \alpha)\, g(x)\, dx \end{cases} \qquad (\delta = \beta - \alpha) \tag{39}$$

mentre le (20), (22) diventano

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\alpha'}^\beta (\beta - x)\, \phi(x; \alpha', \beta)\, dx = \varepsilon^2 \beta^2 \\ \displaystyle\int_{\alpha'}^\beta (x - \alpha)\, \phi(x; \alpha', \beta)\, dx = \varepsilon\beta^2 (1 - q - \varepsilon). \end{cases} \tag{40}$$

Se $g(t)$ è ancora data dalla (25), le corrispondenti delle (27) sono allora

$$\begin{cases} \mu_n = C_n \varepsilon_n q^n \{1 - \varepsilon_n/(1 - q)\} \\ \mu_{n+1} = \mu_n \varepsilon_n / h (1 - q - \varepsilon_n). \end{cases} \tag{41}$$

Si verifica agevolmente che se $\mu_n = q^{n(m+2)}$ risulta $\varepsilon_n = \varepsilon$ (indipendente da n) e $C_n = K' q^{n(m+1)}$, cioè g è di classe C^m, mentre per $\mu_n = q^{n^2}$ otteniamo ancora una soluzione di classe C^∞.

OSSERVAZIONE II. Dagli esempi precedenti relativi al problema di *Darboux*, si deduce immediatamente anche la non unicità della soluzione del problema di *Goursat* per la stessa equazione, e dei problemi di *Cauchy* e *misto* per l'equazione

$$y_{tt} - y_{xx} = \mathrm{F}(t, x) + \mathrm{J}, \tag{42}$$

equivalente alla (1) con $\xi = \frac{1}{2}^{-1}(x + t)$, $\eta = \frac{1}{2}^{-1}(-x + t)$. Detto infatti Z il dominio in cui si cerca la soluzione di tali problemi (con dati al contorno nulli), si consideri un rettangolo caratteristico $\mathrm{R} \subseteq \mathring{\mathrm{Z}}$, e siano $\bar{\xi}$ ed $\bar{\eta}$ i valori minimi di ξ e di η in R. Posto $\mathrm{Z}' = \{(\xi, \eta) \in \mathrm{Z} \mid \xi \leq \bar{\xi} \text{ o } \eta \leq \bar{\eta}\}$, si consideri una funzione $f(\xi, \eta)$ così definita:

$$f(\xi, \eta) = \begin{cases} 0 & \text{in } \mathrm{Z}' \\ -g((\xi - \bar{\xi})(\eta - \bar{\eta})) & \text{in } \mathrm{R} \\ \text{arbitraria altrove,} & \end{cases} \tag{43}$$

con g data dalla (25). È evidente che a tale termine noto corrispondono le soluzioni $y_1 \equiv 0$ e $y_2 \not\equiv 0$ precedentemente costruita.

Un esempio di natura diversa è il seguente, che esponiamo brevemente.

Esempio C. Consideriamo ancora il caso del punto materiale. Scegliendo

$$\beta_n = q^n \quad , \quad \alpha_n = q^{n+1} \quad , \quad \mu_n = q^{2n} \quad , \quad \lambda_n = p\mu_n \, (p = hq^2), \tag{44}$$

e ponendo, in $[\alpha_n, \beta_n]$:

$$g(t) = \mathrm{K} \min \left\{ \frac{t - \alpha_n}{2 - p}, \frac{\beta_n - t}{1 - 2p} \right\} \qquad \text{con} \quad \mathrm{K} = \frac{2(1 - p)^2}{(1 - q)^2}, \tag{45}$$

la funzione $g(t)$ risulta continua (e lipschitziana) in $[0, 1]$ per $\frac{1}{2} < p < 2$. Dovendo peraltro essere $q < 1$, si richiede che sia $h > \frac{1}{2}$. La soluzione $u(t)$ corrispondente soddisfa poi, oltre alle condizioni $u(0) = u'(0) = 0$, la disuguaglianza $u(t) \leq g(t)$, come si può verificare.

La funzione $y(x, t) = u(t) \sin x \leq 0$ soddisfa allora, per $t \neq \beta_n$, l'equazione

$$y_{tt} - y_{xx} = \{u''(t) + u(t)\} \sin x = \{u(t) - g(t)\} \sin x \leq 0, \tag{46}$$

il *problema misto* $y(x, 0) = y_t(x, 0) = y(0, t) = y(\pi, t) = 0$ e le condizioni d'urto $y_t(x, \beta_n^+) = -hy_t(x, \beta_n^+)$.

OSSERVAZIONE III. Tutti gli esempi precedenti risultano manifestamente impossibili se $h = 0$ (*urto anelastico*).

BIBLIOGRAFIA

[1] L. AMERIO e G. PROUSE (1975) – *Study of the motion of a string vibrating against an obstacle*, « Rend. di Mat. » (6) *8*, n. 2, 563.

[2] L. AMERIO (1978) – *Continuous solutions of the problem of a string vibrating against an obstacle*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », *59* (in corso di stampa).

[3] C. CITRINI (1975) – *Sull'urto parzilamente elastico o anelastico di una corda vibrante contro un ostacolo*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8) *59*, n. 5, 368 e n. 6, 667.

[4] C. CITRINI e B. D'ACUNTO (1979) – *Sull'urto tra due corde*, in corso di stampa su « Ricerche Mat. ».

[5] B. D'ACUNTO (1978) – *Sull'urto elastico di una corda in un caso non lineare*, « Ricerche Mat. », *27*, n. 2, 301.

[6] M. SCHATZMAN (1979) – *Problèmes unilatéraux d'évolution du 2ème ordre en temps*, Thèse de Doctorat, Paris.