Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Carlo Toffalori

Semigruppi archimedei esistenzialmente chiusi

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **67** (1979), n.3-4, p. 162–167.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_67_3-4_162_0>

Algebra. — *Semigruppi archimedei esistenzialmente chiusi* (*). Nota (**) di CARLO TOFFALORI, presentata dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — In this paper, we study the algebraically closed structures and the existentially closed structures in the class of commutative archimedean semigroups (with an idempotent).

§ 1. – PREMESSA

Sia $\mathcal{K}$ una classe di strutture rappresentate in un linguaggio L del I ordine: per le successive applicazioni, non sarà restrittivo limitarci al caso che L ammetta per simboli extralogici esclusivamente un numero finito di simboli funzionali (binari) ed un numero finito di costanti individuali.

Se $K \in \mathcal{K}$, intenderemo per *equazione* su K una formula atomica del linguaggio L_K che si ottiene da L aggiungendo un nome per ogni elemento di K; per *disequazione* su K la negazione di una equazione. Indicheremo talvolta i sistemi di equazioni e disequazioni su K con il simbolo $\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$, intendendo con questo significare che le variabili occorrenti in Σ sono tra $x_1, \cdots, x_n$.

Definiremo poi *soluzione* di Σ in K una n-pla $(k_1, \cdots, k_n)$ in K^n tale che, sostituendo in ogni equazione (disequazione) di Σ la variabile x_i con l'elemento k_i $(1 \leq i \leq n)$, si ottengono uguaglianze (diseguaglianze) vere in K.

Sia dunque $K \in \mathcal{K}$, e sia Σ un sistema finito di equazioni e disequazioni in K: Σ si dice *$\mathcal{K}$-possibile* su K se esiste una estensione $K' \in \mathcal{K}$ di K in cui Σ ammette soluzioni.

DEFINIZIONE 1.1. – $K \in \mathcal{K}$ è *algebricamente chiuso* in $\mathcal{K}$ se ogni sistema finito di equazioni su K, $\mathcal{K}$-possibile, ammette già soluzioni in K.

DEFINIZIONE 1.2. – $K \in \mathcal{K}$ è *esistenzialmente chiuso* in $\mathcal{K}$ se ogni sistema finito di equazioni e disequazioni su K, $\mathcal{K}$-possibile, ammette già soluzioni in K.

Indicheremo con $\mathcal{A}\mathcal{K}$ la classe delle strutture algebricamente chiuse in $\mathcal{K}$; con $\mathcal{E}\mathcal{K}$ la classe delle strutture esistenzialmente chiuse in $\mathcal{K}$. Evidentemente $\mathcal{E}\mathcal{K} \subseteq \mathcal{A}\mathcal{K}$. Si noti inoltre che, sotto l'assioma di scelta, se la classe $\mathcal{K}$ è induttiva (ovvero, chiusa per unione di catene), allora $\mathcal{E}\mathcal{K} \neq \varnothing$, e, addirittura, ogni struttura in $\mathcal{K}$ ha un'estensione in $\mathcal{E}\mathcal{K}$.

Questa nota è stata ispirata dallo studio della struttura moltiplicativa di certi anelli commutativi esistenzialmente chiusi, ossia degli anelli com-

(*) Lavoro eseguito dell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.
(**) Pervenuta all'Accademia il 20 settembre 1979.

mutativi generici finiti (cfr. [2]); infatti, se introduciamo in un tale anello A la relazione binaria R così definita: se $a, b \in A$,

$$a\mathrm{R}b \Longleftrightarrow \text{esiste} \quad n \in \mathrm{N} \setminus \{0\} \quad \text{tale che} \quad a \mid b^n \quad \text{e} \quad b \mid a^n,$$

allora è facile provare che R è in A una relazione di equivalenza, e che ogni classe di R in A è dal punto di vista moltiplicativo un semigruppo commutativo archimedeo con un elemento idempotente. Questa osservazione induce ad approfondire lo studio della classe $\mathscr{S}$ di tali semigruppi.

Si rimanda a [1] e a [5] per i necessari prerequisiti di teoria dei modelli; a [3] e a [4] per le opportune premesse di carattere algebrico sui semigruppi (1).

§ 2. – SEMIGRUPPI COMMUTATIVI ARCHIMEDEI CON UN IDEMPOTENTE

Sia dunque $\mathscr{S}$ la classe dei semigruppi commutativi archimedei con un elemento idempotente, ovvero la classe dei semigruppi commutativi S con un idempotente $\boldsymbol{e}$ tale che:

($\mathscr{S}$.1) per ogni $x \in \mathrm{S}$, x divide $\boldsymbol{e}$;

($\mathscr{S}$.2) per ogni $x \in \mathrm{S}$, esiste $n \in \mathrm{N} \setminus \{0\}$ tale che $x^n \cdot e = x^n$ (il minimo naturale $n > 0$ per cui questo accade si dirà l'*ordine* di x).

Si noti che da ($\mathscr{S}$.1) e da ($\mathscr{S}$.2) segue banalmente che $\boldsymbol{e}$ è l'unico idempotente di S. Dunque, un linguaggio L del I ordine adeguato a rappresentare la classe $\mathscr{S}$ consterà di un simbolo funzionale binario e, eventualmente, di una costante individuale (atti ad esprimere, rispettivamente, in ogni $\mathrm{S} \in \mathscr{S}$, l'operazione binaria di prodotto in S e l'idempotente di S).

Esempio 2.1. – Ogni gruppo abeliano $(\mathrm{G}, \cdot, 1)$ appartiene a $\mathscr{S}$; si noti in particolare che ogni elemento di G ha ordine 1.

Esempio 2.2. – Ogni nilsemigruppo commutativo $(\mathrm{N}, \cdot, 0)$ (= semigruppo commutativo con annullatore 0, rispetto al quale ogni elemento è nilpotente) appartiene a $\mathscr{S}$. Esistono nilsemigruppi commutativi i quali contengono (infiniti) elementi di ogni possibile ordine $n \geq 2$: ad esempio, il nilradicale N(A) di un anello commutativo esistenzialmente chiuso A (inteso come struttura moltiplicativa).

Indicheremo d'ora in poi con $\mathscr{G}$ la classe dei gruppi abeliani, e con $\mathscr{N}$ la classe dei nilsemigruppi commutativi.

OSSERVAZIONE 2.3. – Si noti che ogni semigruppo $\mathrm{S} \in \mathscr{S}$ (avente come idempotente $\boldsymbol{e}$) si può considerare come estensione di un opportuno gruppo abeliano $\mathrm{G_S}$ mediante un conveniente nilsemigruppo commutativo $\mathrm{N_S}$. Sia infatti $\mathrm{G_S} = \{x \in \mathrm{S} : x = ex\}$: $\mathrm{G_S}$ è un sottogruppo di S, ed è immagine omo-

(1) Ringrazio il Prof. F. Migliorini per i suoi utili suggerimenti.

morfa di S nell'omomorfismo π_e che associa ad ogni $x \in S$ il prodotto $e \cdot x$. Inoltre G_S è un ideale di S e il relativo semigruppo fattore di Rees $N_S = S/G_S$ è un nilsemigruppo commutativo.

Viceversa, dati $G \in \mathcal{G}$ e $N \in \mathcal{N}$, esiste un'estensione S di G mediante N che appartiene a $\mathcal{S}$ (per i dettagli, cfr. [6]).

Enumeriamo adesso alcune semplici proprietà della classe $\mathcal{S}$.

PROPOSIZIONE 2.4:

(2.4.1) $\mathcal{S}$ *è induttiva;*

(2.4.2) $\mathcal{S}$ *è chiusa per prodotti diretti finiti;*

(2.4.3) $\mathcal{S}$ *non è chiusa per ultrapotenze.*

Dimostrazione. – Le prove di (2.4.1) e di (2.4.2) sono banali; limitiamoci dunque a dimostrare (2.4.3). Sia $S \in \mathcal{S}$ tale che, per ogni $n \geq 1$, S ha elementi di ordine n (cfr. esempi 2.1 e 2.2, e la precedente (2.4.2)). Sia poi $S^* = S^N/\mathcal{F}$ un'ultrapotenza di S mediante un ultrafiltro non principale $\mathcal{F}$ su N; definiamo

$$s_0 = e$$

e, per ogni naturale $n \geq 1$,

$$s_n = \text{elemento di S di ordine } n .$$

Sia poi $s = (s_n)_{n \in N}$, e si consideri s come elemento di S^*; si supponga, per assurdo, che esista $m \in N \setminus \{0\}$ tale che

$$s^m \cdot e = s^m .$$

Allora $s_n^m \cdot e = s_n^m$ per ogni n appartenente ad un opportuno insieme $D \in \mathcal{F}$. Quindi, $m \geq n$ per ogni $n \in D$, e perciò per infiniti n (assurdo). Di conseguenza, $S^* \notin \mathcal{S}$.

COROLLARIO 2.5. – $\mathcal{ES} \neq \varnothing$, *anzi ogni semigruppo* $S \in \mathcal{S}$ *ammette una estensione* $S' \in \mathcal{ES}$.

Dimostrazione. – Da (2.4.1).

COROLLARIO 2.6. – $\mathcal{S}$ *non è una classe elementare.*

Dimostrazione. – Da (2.4.3) (cfr. [1] Teorema 3.4 pag. 151).

COROLLARIO 2.7. – $\mathcal{ES}$ *e* $\mathcal{AS}$ *non sono classi elementari.*

Dimostrazione. – Sia $S \in \mathcal{S}$ il semigruppo di cui nella prova di (2.4.3); per il Corollario 2.5, S ha una estensione S′ in $\mathcal{ES}$ (quindi in $\mathcal{AS}$), e anche S′ ha dunque elementi di ogni possibile ordine; come in (2.4.3), segue che S′ ammette un'ultrapotenza non appartenente a $\mathcal{S}$ e quindi neppure a $\mathcal{ES}$ e a $\mathcal{AS}$. Come nel Corollario 2.6, se ne può dedurre che $\mathcal{ES}$ e $\mathcal{AS}$ non sono classi elementari.

§ 3. – STUDIO DI $\mathscr{AS}$

PROPOSIZIONE 3.1. – *Se* $S \in \mathscr{AS}$ e $N_S \neq \{0\}$, *allora per ogni* $n \geq 1$ *esiste* $x \in N_S$ *il cui ordine* m *è tale che* $n < m \leq 2n$.

Dimostrazione. – Sia $a \in N_S \setminus \{0\}$, non è restrittivo supporre a di ordine 2, e cioè $a \cdot e \neq a$, $a^2 \cdot e = a^2$. Fissiamo poi un naturale $n \geq 1$, e, data una presentazione $S = (X \mid \mathscr{R})$ di S, consideriamo il semigruppo così presentato

$$S' = (X' \mid \mathscr{R}'),$$

dove $X' = X \cup \{x\}$ (con $x \notin S$) e $\mathscr{R}' = \mathscr{R} \cup \{x^n = a\} \cup \{sx = xs : s \in X\}$. Si ha che $S' \in \mathscr{S}$, poiché S′ è commutativo ed ammette un idempotente rispetto al quale valgono evidentemente ($\mathscr{S}$.1) e ($\mathscr{S}$.2). Inoltre S′ è estensione di S: supponiamo infatti che s_1 e s_2 siano elementi di S coincidenti in S′, e mostriamo che, allora, $s_1 = s_2$ in S. Esiste una sequenza finita di elementi di S′

$$s_1 = x_0, x_1, \cdots, x_h = s_2$$

tali che, per ogni $i = 1, 2, \cdots, h$, x_i è ottenuto da x_{i-1} tramite la congruenza generata da una relazione ρ_i appartenente a $\mathscr{R}'$ o inversa di una relazione di $\mathscr{R}'$. Dalla sequenza $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_h$ si estragga la sottosuccessione

$$\rho_{j_1}, \rho_{j_2}, \cdots, \rho_{j_l}$$

delle relazioni del tipo $x^n = a$, oppure $a = x^n$. Procediamo per induzione su l.

Se $l = 0$, è facile verificare che $s_1 = s_2$ in S.

Se $l > 0$, esiste $k < l$ tale che

$$\rho_{j_k} : a = x^n \qquad \rho_{j_{k+1}} : x^n = a$$

In altre parole si può supporre

$$\begin{array}{ll} x_{j_k - 1} = c \cdot a \cdot x^m & x_{j_k} = c \cdot x^n \cdot x^m \\ \cdots & \cdots \\ x_{j_{k+1}-1} = c' \cdot x^n \cdot x^m & x_{j_{k+1}} = c' \cdot a \cdot x^m \end{array}$$

dove $c = c'$ è deducibile in S, sicché si può mostrare che $c \cdot a = c'a$ e dunque che $c \cdot a \cdot x^m = c' \cdot a \cdot x^m$ col solo impiego di relazioni di $\mathscr{R}$; segue che la sequenza $\rho_{j_1}, \cdots, \rho_{j_l}$ si può accorciare di 2 passi, sicché, per l'ipotesi induttiva, s_1 e s_2 coincidono già in S. Ricapitolando, $S' \in \mathscr{S}$, $S' \supseteq S$; inoltre S′ soddisfa il sistema $\Sigma(x) = \{x^n = a\}$ a parametri in S, e, siccome $S \in \mathscr{AS}$, anche S ha una soluzione per $\Sigma(x)$, ovvero esiste $s \in S$ tale che $s^n = a$; ma allora

$$s^n \cdot e \neq s^n \qquad s^{2n} \cdot e = s^{2n}$$

cioè s ha ordine $> n$ e $\leq 2n$.

PROPOSIZIONE 3.2.

(3.2.1) *Se* $G \in \mathscr{AG}$, $G \in \mathscr{AS}$;

(3.2.2) *Se* $S \in \mathscr{AS}$, $G_S \in \mathscr{AG}$.

Dimostrazione. – (3.2.1) Sia $G \in \mathscr{AG}$, e sia S′ una sua estensione in $\mathscr{S}$, avente e come idempotente; sia $i : G \rightarrow S'$ il monomorfismo di G in S′, allora $i(G) \subseteq G_{S'}$, cioè $\pi_e \cdot i$ è un monomorfismo di G in $G_{S'}$. Sia infine $\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$ un sistema finito di equazioni su G soddisfatto in S′ ed indichiamo con $g_1, \cdots, g_m$ i parametri in G di Σ e con $s_1, \cdots, s_n$ le soluzioni in S′ di Σ. Si applichi a ciascun membro di ogni eguaglianza di $\Sigma(s_1, \cdots, s_n)$ l'epimorfismo π_e, che trasforma $s_1, \cdots, s_n$ negli elementi $e \cdot s_1, \cdots, e \cdot s_n$ di $G_{S'}$ e lascia fissi i parametri $i(g_1), \cdots, i(g_m)$: segue che Σ è soddisfatto in $G_{S'}$ e, siccome $G_{S'}$ è estensione di G in $\mathscr{G}$, Σ è soddisfatto anche in G. Quindi $G \in \mathscr{AS}$.

(3.2.2) Ricordiamo che un gruppo abeliano è algebricamente chiuso se e solo se è divisibile (cfr. [5] pag. 290), basta perciò provare che G_S è divisibile, e cioè che, per ogni $a \in G_S$ e per ogni $n \geq 1$, esiste $x \in G_S$ tale che $x^n = a$. Si proceda come nella proposizione 3.1.

PROPOSIZIONE 3.3. – *Se* $N \in \mathscr{AN}$, $N \in \mathscr{AS}$.

Dimostrazione. – Sia $S' \in \mathscr{S}$ un'estensione di N, e sia $i : N \rightarrow S'$ il relativo monomorfismo, sia poi ν la proiezione canonica di S′ su $N_{S'}$, sicché è facile provare che $\nu \cdot i$ è un monomorfismo di N in $N_{S'}$. Sia allora $\Sigma(x_1, \cdots, x_n)$ un sistema di equazioni a parametri $a_1, \cdots, a_m$ in N che ammette soluzioni $s_1, \cdots, s_n$ in S′. Si applichi a ciascun membro di ogni eguaglianza di $\Sigma(s_1, \cdots, s_n)$ la proiezione ν la quale trasforma le soluzioni $s_1, \cdots, s_n$ negli elementi $\nu(s_1), \cdots, \nu(s_n)$ di $N_{S'}$. Segue che Σ è soddisfatto in $N_{S'}$ da $\nu(s_1), \cdots, \nu(s_n)$, e, siccome $N_{S'}$ è estensione di N e $N \in \mathscr{AN}$, Σ è soddisfatto anche in N. Perciò $N \in \mathscr{AS}$.

§ 4. – STUDIO DI $\mathscr{ES}$

LEMMA 4.1. – *Se* $S \in \mathscr{ES}$, S *ammette infiniti elementi di ordine* n, *per ogni* $n \in N \setminus \{0\}$.

Dimostrazione. – Indichiamo come al solito con e l'idempotente di S, e distinguiamo i due casi seguenti.

Caso 1: $n = 1$. – Si consideri $S \times G$, con G gruppo abeliano infinito; G ha quindi infiniti elementi di ordine 1, sicché anche $S \times G$ ha infiniti elementi di ordine 1, tutti quelli della forma (e, g) con $g \in G$ · $S \times G$ soddisfa perciò, per ogni $m \in N \setminus \{0\}$, il sistema

$$\Sigma_m = \{x_i \cdot e = x_i \; ; \; x_i \neq x_j \mid i, j = 1, \cdots, m \; ; \; i \neq j\}$$

Tale sistema è dunque soddisfatto anche in S per ogni $m > 0$, sicché S ha infiniti elementi di ordine 1.

Caso 2 : $n > 1$. – Si consideri $S \times N$, con $N \in \mathscr{N}$, N avente per ogni $n > 1$ infiniti elementi di ordine n (cfr. esempio 2.2). Procedendo come nel caso 1, si può verificare che anche S ammette, per ogni $n > 1$, infiniti elementi di ordine n.

COROLLARIO 4.2.

(4.2.1) $\mathscr{E}\mathscr{S} \cap \mathscr{G} = \varnothing$;

(4.2.2) $\mathscr{E}\mathscr{S} \cap \mathscr{N} = \varnothing$.

In particolare, tutti i gruppi abeliani appartenenti a $\mathscr{A}\mathscr{S}$ *(cfr. Prop. 3.2.1) non appartengono a* $\mathscr{E}\mathscr{S}$; *e tutti i nilsemigruppi commutativi appartenenti a* $\mathscr{A}\mathscr{S}$ *(cfr. Prop. 3.3) non appartengono a* $\mathscr{E}\mathscr{S}$.

PROPOSIZIONE 4.3. – *Se* $S \in \mathscr{E}\mathscr{S}$, $G_S \in \mathscr{E}\mathscr{G}$.

Dimostrazione. – Si ricordi che un gruppo abeliano è esistenzialmente chiuso in $\mathscr{G}$ se e solo se è divisibile e, per ogni primo p, ammette infiniti elementi di periodo p (cfr. [5] Teorema 2.4 pag. 256). Va dunque provato che G_S gode di tali proprietà: che G_S sia divisibile segue dalla proposizione 3.2.2, tenendo presente $\mathscr{E}\mathscr{S} \subseteq \mathscr{A}\mathscr{S}$ e la già menzionata caratterizzazione dei gruppi abeliani algebricamente chiusi. Dimostriamo allora che G_S ammette, per ogni primo p, infiniti elementi di periodo p. A questo proposito, consideriamo un gruppo abeliano $A \in \mathscr{E}\mathscr{G}$: allora $A \in \mathscr{S}$, sicché $S \times A \in \mathscr{S}$, ed inoltre $S \times A$ contiene, per ogni primo p, infiniti elementi di ordine 1 e di periodo p (tutti quelli della forma (e, g), con e idempotente di S e g appartenente ad A, g di periodo p). In altre parole, $S \times A$ soddisfa, per ogni $m \in N \setminus \{0\}$ e per ogni primo p, il seguente sistema di equazioni e disequazioni su S

$$\Sigma_{m,p} = \{x_i^p = e \; ; \; x_i e = x_i \; ; \; x_i \neq x_j \mid 1 \leq i, j \leq m \; ; i \neq j\}$$

Siccome $S \times A$ è estensione di S, anche S soddisfa il sistema $\Sigma_{m,p}$ al variare di m e p, e quindi ammette, per ogni primo p, infiniti elementi di ordine 1 (ossia appartenenti a G_S) e di periodo p in G_S. Segue che $G_S \in \mathscr{E}\mathscr{G}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. L. BELL and A. B. SLOMSON (1971) – *Models and ultraproducts. an introduction.* North Holland, Amsterdam.

[2] G. CHERLIN (1973) – *Algebraically closed commutative rings.* « J. Symbolic Logic », *38*, 493–499.

[3] A. H. CLIFFORD and G. B. PRESTON (1961) – *The algebraic theory of semigroups.* Vol. I, « Amer. Math. Soc. », Providence, Rhode Island.

[4] A. H. CLIFFORD and G. B. PRESTON (1967) – *The algebraic theory of semigroups.* Vol. II, « Amer. Math. Soc. », Providence, Rhode Island.

[5] P. EKLOF and G. SABBAGH (1970) – *Model-completions and modules.* « Ann. Math. Logic », *2*, 251–295.

[6] T. TAMURA (1954) – *Note on unipotent inversible semigroups.* « Kodai Math. Sem. Rep. », *1954*, 93–95.