Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marco Fontana

Quelques nouveaux résultats sur une classe d'espaces spectraux

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **67** (1979), n.3-4, p. 157–161.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_67_3-4_157_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1979.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1979 (Settembre–Ottobre)

(Ogni Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo o di presentazione)

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Algebra. — *Quelques nouveaux résultats sur une classe d'espaces spectraux.* Nota (*) di MARCO FONTANA, presentata dal Socio G. ZAPPA.

RIASSUNTO. — Viene studiata una classe di spazi spettrali [5], la topologia dei quali è determinata dall'ordinamento; si ottengono delle nuove caratterizzazioni dei g–anelli [11] anche in relazione ai GD–omomorfismi [6].

Dans cette Note, tous les anneaux considérés sont commutatifs unitaires. Les notations ou notions non précisées sont celles de [3], [5] et [6].

Il est bien connu que sur le spectre premier d'un anneau la structure d'ordre fournit, en général, moins d'informations que la structure topologique (de Zariski) (cf. par exemple [5], [8] et [9]. Pourtant la distinction entre topologie et ordre cesse dans des cas remarquables, comme par exemple dans le cas des anneaux à spectre noethérien [5], [13] ou à spectre totalement ordonné [8], [9]. Dans la présente Note, on se propose d'étudier une autre classe d'espace spectraux dont la topologie est déterminée par l'ordre.

DÉFINITION 1. Un ensemble ordonné X est appelé *ensemble spectral à gauche* ou *ensemble* ***G****–spectral* [resp. *ensemble spectral à droite* ou *ensemble* ***D****–spectral*] si l'ensemble X muni de la topologie gauche [3] [resp. droite], noté $X^{\boldsymbol{G}}$ [resp. $X^{\boldsymbol{D}}$], est un espace spectral [5].

Si X est un ensemble ordonné, pour tout $x \in X$, on pose:

$$x^{\uparrow} = \{y \in X \mid y \geq x\} \qquad \text{et} \quad x^{\downarrow} = \{y \in X \mid y \leq x\} \,;$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 20 settembre 1979.

et, pour tout sous–ensemble Y de X, on pose:

$$Y^{\uparrow} = \bigcup_{y \in Y} y^{\uparrow} \qquad \text{et} \quad Y^{\downarrow} = \bigcup_{y \in Y} y^{\downarrow} .$$

THÉORÈME 1. *Soit* X *un ensemble ordonné et* A *un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes*:

(i) X *est un ensemble* $\boldsymbol{G}$*–spectral*;

(ii) $X^{\boldsymbol{G}} \cong \operatorname{Spec}(A)$, A *étant un g–anneau* (*c'est–à–dire un anneau tel que pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *il existe un élément* $f \in A \setminus \mathfrak{p}$ *de façon que* $A_{\mathfrak{p}} \cong A_f$; v. [4], [11] *et* [12]);

(iii) X *vérifie les conditions ci–dessous*:

(α) *tout sous–ensemble non vide totalement ordonné de* X *admet une borne supérieure*;

(β) *tout sous–ensemble* Y *de* X *non vide et filtrant à gauche possède la borne inférieure* $y = \inf(Y)$ *pour laquelle on a* $Y^{\uparrow} = y^{\uparrow}$;

(γ) $\operatorname{Card}(\operatorname{Max}(X)) < \infty$;

(δ) *pour tout couple d'éléments distincts de* X, *il existe au plus un nombre fini d'éléments de* X *qui sont maximaux dans l'ensemble des minorants communs de ces deux éléments.*

Remarque. Il n'est pas difficile de vérifier que, dans l'énoncé du théorème précédent, la condition (β) peut être remplacée par la condition:

($\tilde{\beta}$) *toute suite décroissante d'éléments de* X *est stationnaire.*

PROPOSITION 1. *Soit* A *un anneau fixé et* $\varphi : A \to B$ *un homomorphisme quelconque ayant comme source l'anneau* A. *Les assertions suivantes sont équivalentes entre elles*:

(i) A *est un g–anneau*;

(ii) $\varphi : A \to B$ *est un homomorphisme plat* $\Rightarrow \varphi^* : \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ *est une application ouverte*;

(iii) $\varphi : A \to B$ *est* GD [6] $\Longleftrightarrow \varphi^* : \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ *est une application ouverte.*

Remarques. (*a*) L'implication du point (ii) de la Prop. 1 ne s'inverse pas, même en supposant A *g*–anneau.

(*b*) L'équivalence (*i*) $\Longleftrightarrow$ (*ii*) a été observée aussi par Picavet [11].

PROPOSITION 2. *Soit* A *un anneau et* X *son spectre premier. On dénote par* X^{GD} *l'ensemble* X *équipé de la topologie la moins fine ayant comme ouverts les sous-ensembles de* X *appartenant à la famille*

$$\mathcal{U} = \{U = \varphi^*(Y) \mid \varphi : A \to B \text{ est un GD-homomorphisme et } Y = \operatorname{Spec}(B)\}.$$

Alors:

(*a*) $\mathcal{U}$ *est une base d'ouverts de* X^{GD};

(*b*) X^{GD} *est un espace discret d'Alexandroff* [1];

(*c*) $X^{GD} \cong X^{\boldsymbol{G}}$.

De ce qui précède, on peut déduire facilement, comme corollaire, une autre démonstration de quelques résultats de Papick sur les GD–anneaux et anneaux ouverts [10]:

COROLLAIRE. *Soit* A *un anneau intègre. Les affirmations suivantes sont équivalentes*:

(i) A *est un g–anneau et un* GD–*anneau*;

(ii) A *est un anneau ouvert*;

(iii) A *est un* GD–*anneau semilocal tel que, pour tout idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *de* A, $\operatorname{Spec}(A_{\mathfrak{m}})$ *est un ensemble bien ordonné.*

Soit X un espace spectral. On désigne par X^{Hoch} l'ensemble X muni de la topologie de l'ordre opposé ou topologie de Hochster [5] (c'est–à–dire la topologie ayant comme base des fermés les ouverts quasi–compacts de X).

THÉORÈME 2. *Soit* X *un espace spectral. Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

(i) $X^{\boldsymbol{G}}$ *est homéomorphe à* X;

(ii) *pour tout* $x \in X$, $x^{\downarrow}$ *est un ouvert quasi–compact de* X;

(iii) *pour toute famille* $(U_i \mid i \in I)$ *d'ouverts quasi–compacts de* X, *on a que* $\bigcap_{i \in I} U_i$ *est un ouvert quasi–compact de* X;

(iv) – *toute suite croissante de fermés irréductibles de* X *est stationnaire,*
– *pour toute famille* $(U_i \mid i \in I)$ *d'ouverts quasi–compact de* X, *on a que* Card (Max $(\bigcap_{i \in I} U_i)$) *est finie*;

(v) – X *est un espace* T_D [2] (*c'est–à–dire tout point* $x \in X$ *est localement fermé*),
– *pour toute famille* $(U_i \mid i \in I)$ *d'ouverts quasi–compacts de* X *on a que* Card (Max $(\bigcap_{i \in I} U_i)$) *est finie*;

(vi) – *toute suite décroissante de fermés irréductibles de* X^{Hoch} *est stationnaire,*

– *pour tout fermé* F *de* X^{Hoch}, *il existe* $y_1, y_2, \cdots, y_n \in F$ *de façon telle que* $F = y_1^{\downarrow} \cup y_2^{\downarrow} \cup \cdots \cup y_n^{\downarrow}$;

(vii) *tout ouvert de* X^{Hoch} *est le complémentaire d'un ouvert quasi-compact de* X;

(viii) X^{Hoch} *est un espace noethérien.*

COROLLAIRE 1. *Soit* X *un espace spectral. Les affirmations suivantes sont équivalentes*:

(i) X *est un espace noethérien*;

(ii) X^{Hoch} *est un espace discret d'Alexandroff*;

(iii) $X^{\mathrm{Hoch}} \cong X^{\boldsymbol{D}}$.

COROLLAIRE 2. *Soit* X *un espace spectral. Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

(i) X *est un espace noethérien discret d'Alexandroff*;

(ii) X^{Hoch} *est un espace noethérien discret d'Alexandroff*;

(iii) Card (X) *est finie*;

(iv) X *est un espace* T_D *noethérien.*

Du Théorème 1 et du Corollaire 1 on obtient une autre démonstration (et énonciation (cf. remarque suivante)) d'un résultat de R. et S. Wiegand [13] concernant une caractérisation, en termes d'ordre, des espaces spectraux noethériens:

COROLLAIRE 3. *Soit* X *un ensemble ordonné. Il est possible de définir sur* X *une (unique) topologie compatible avec l'ordre donné et faisant de* X *un espace spectral noethérien si, et seulement si, les conditions suivantes sont vérifiées*:

(α') *tout sous-ensemble non vide et totalement ordonné de* X *admet une borne inférieure*;

(β') *tout sous-ensemble* Y *de* X *non vide et filtrant à droite possède la borne supérieure* $y = \sup(Y)$ *pour laquelle on a* $y^{\downarrow} = Y^{\downarrow}$;

(γ') $\mathrm{Card}(\mathrm{Min}(X)) < \infty$

(δ') *pour tout couple d'éléments distincts de* X, *il existe au plus un nombre fini d'éléments de* X *qui sont minimaux dans l'ensemble des majorants communs de ces deux éléments.*

En outre, si les conditions ci-dessus sont satisfaites, alors une telle topologie est la topologie la moins fine dans la classe des topologies qui sont compatibles avec l'ordre donné sur X.

Remarque. Comme on a déjà remarqué dans le cas du Théorème 1, dans l'énoncé du Corollaire 3 la condition (β') peut être remplacée par la condition:

($\tilde{\beta}'$) *toute suite croissante d'éléments de* X *est stationnaire.*

Sous cette forme, la caractérisation des espaces spectraux noethériens, en termes d'ordre, a été donnée par R. et S. Wiegand [13].

Les démonstrations des résultats énoncés ci-dessus pourront paraître dans une prochaine publication, ainsi que d'autres propriétés concernant certaines questions apparentées à celles abordées dans cette Note.

Ajouté sur épreuves (Février 1980). Les démonstrations des résultats énoncés ici ont été incluses dans un travail écrit en collaboration avec D. Dobbs et I. Papick (*On the flat spectral topology and certain distinguished spectral sets*) dans lequel différents aspects des topologies et de l'ordre du spectre premier d'un anneau sont abordés.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. S. ALEXANDROFF (1956) - *Combinatorial topology.* Graylock Press, Rochester.

[2] C. E. AULL et W. J. THRON (1962) - *Separation axioms between* T_0 *and* T_1. « Indag. Math. », *24*, 26-37.

[3] N. BOURBAKI (1971) - *Topologie Générale Ch. 1-4.* Hermann, Paris.

[4] M. FONTANA et P. MAROSCIA (1976) - *Sur les anneaux de Goldman.* « Boll. Un. Mat. Ital. », *13-B*, 743-759.

[5] M. HOCHSTER (1969) - *Prime ideal structure in commutative rings.* « Trans. AMS », *142*, 43-60.

[6] I. KAPLANSKY (1970) - *Commutative Rings.* Allyn-Bacon, Boston; (Rev. Ed.) University of Chicago Press, 1974.

[7] D. LAZARD (1967) - *Disconnexités des spectres d'anneaux et des préschémas.* « Bull. Soc. Math. France », *95*, 95-108.

[8] W. J. LEWIS (1973) - *The spectrum of a ring as a partially ordered set.* « J. Algebra », *25*, 419-434.

[9] W. J. LEWIS et J. OHM (1976) - *The ordering of Spec R.* « Canad. J. Math. », *27*, 820-835.

[10] I. J. PAPICK (1976) - *Topologically defined classes of going-down domains.* « Trans. AMS », *219*, 1-37.

[11] G. PICAVET (1975) - *Sur les anneaux commutatifs dont tout idéal premier est de Goldman.* « R. C. Acad. Sci. Paris », *A 280*, 1719-1721.

[12] R. RAMASWAMY et T. W. VISWANATHAN (1976) - *Overring properties of* G-*domains.* « Proc. AMS », *58*, 59-66.

[13] R. WIEGAND et S. WIEGAND (1976) - *The maximal ideal space of a Noetherian ring.* « J. Pure Appl. Algebra », *8*, 129-141.