Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Andreana Gandini Zucco

Sur la multiplicité par rapport à une famille continue de courbes

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **67** (1979), n.1-2, p. 99–103.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_67_1-2_99_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1979.

Topologia. — *Sur la multiplicité par rapport à une famille continue de courbes.* Nota [(*)] di ANDREANA GANDINI ZUCCO, presentata dal Socio G. SCORZA DRAGONI.

RIASSUNTO. — Grünbaum si è occupato dell'insieme dei punti per cui passano *almeno* tre curve di una famiglia continua di curve ([1]), Zamfirescu ha poi approfondito il problema ed ha studiato in più lavori l'insieme dei punti per cui passano *almeno* n curve della famiglia (n fissato). In altre note (per esempio [3], [5], [7], [8]) si sono considerati problemi riguardanti punti per cui passino *esattamente* n curve. Nella presente nota si danno condizioni sufficienti affinchè vi siano punti multipli per la famiglia per cui passino *al più* n curve, in particolare *al più* tre.

La notion de famille continue de courbes (F.C.C.) est due à B. Grünbaum: on peut trouver une définition dans [1] ou bien dans ma note [8] où je l'ai rappelée.

Notations: $\mathscr{L}$ est toujours la F.C.C., $L(p)$ est la courbe de $\mathscr{L}$ qui a p comme une extrémité, le point $-p$ est l'extrémité de $L(p)$ différente de p, $M_n(\mathscr{L})$ dénote l'ensemble des points dans le domaine D (dont la fermeture contient les courbes de $\mathscr{L}$) par lesquels passent au moins n courbes de $\mathscr{L}, T_n(\mathscr{L})$ est l'ensemble $M_n(\mathscr{L}) - M_{n+1}(\mathscr{L})$ et $D_n(\mathscr{L})$ l'ensemble $M_2(\mathscr{L}) - M_{n+1}(\mathscr{L})$. On rappelle qu'à toute courbe $L(p)$ de $\mathscr{L}$ on peut associer la fonction de Zamfirescu ([3]) dans la façon suivante. Soit A l'un de deux arcs de la courbe simple et fermée $C = fr\,D$ ayant les extrémités p et $-p$. Soient $\varphi : [a, b] \to A$ et $\psi : [c, d] \to L(p)$ deux homéomorphismes réalisant des représentations paramétriques des arcs A et $L(p)$, tels que $\varphi(a) = \psi(c) = p$, $\varphi(b) = \psi(d) = -p$. La fonction $f : (a, b) \to (c, d)$ définie par $f(x) = \psi^{-1}(L\varphi(x) \cap L(p))$ est la fonction de Zamfirescu associée à $L(p)$. L'ensemble $\psi^{-1}(L(p) \cap M_2(\mathscr{L}))$ coïncide avec $f((a, b))$.

Dans la note présente on trouve des conditions suffisantes afin qu'on ait des points de $M_2(\mathscr{L})$ par lesquels passent au plus n courbes, où n est donné. En particulier on trouve des F.C.C.'s pour lesquelles existent des points qui se trouvent sur trois courbes au plus. Ensuite on cherche des points qui se trouvent sur trois courbes exactement.

Avant tout il faut rappeler quelques résultats pour les fonctions réelles d'une variable réelle, continues, bornées, définies sur un intervalle ouvert (et borné) de $\mathbf{R}$ telles que tous les ensembles de niveau aient cardinalité $\leq n$, où n est fixé et $n \in \mathbf{N}$.

(*) Pervenuta all'Accademia il 7 agosto 1979.

LEMME 1. – *Soit* $f:(a,b)\to \mathbf{R}$ *une fonction continue bornée telle que pour tout* $\lambda \in f((a,b))$ *on ait card* $f^{-1}(\lambda)\leq n$. *Alors la fonction a des limites finies dans* a *et* b ([8]).

LEMME 2. – *Soit* $f:(a,b)\to \mathbf{R}$ *une fonction continue bornée telle que pour chaque* $\lambda \in f((a,b))$ *on ait* card $f^{-1}(\lambda)\leq 2k+1$ *et soit* z *un point de* $[fr\, f((a,b))]\cap f((a,b))$, *alors on a* $1\leq \operatorname{card} f^{-1}(z)\leq k$. (Voir le lemme 5 de la note [3]).

LEMME 3. – *Soit* $f:(a,b)\to \mathbf{R}$ *une fonction continue bornée telle que pour chaque* $\lambda \in f((a,b))$ *on ait* card $f^{-1}(\lambda)\leq n$. *S'il y a un intervalle* (z_1, z_2) *contenu dans* $f((a,b))$ *tel que pour chaque* $z\in(z_1,z_2)$ *soit* card $f^{-1}(z)=2k\,(\leq n)$, *alors* $[fr\, f((a,b))]\cap f((a,b))\neq\varnothing$. (Il s'agit du lemme 5 de la note [8]).

LEMME 4. – *Soit* $f:(a,b)\to \mathbf{R}$ *une fonction continue bornée telle que pour tout* $\lambda \in f((a,b))$ *on ait* card $f^{-1}(\lambda)<2k+1$. *S'il y a un point* $z\in f((a,b))$ *tel que* card $f^{-1}(z)=2k$, *alors* $[fr\, f((a,b))]\cap f((a,b))\neq\varnothing$. (La démonstration est analogue à celle du lemme précédent).

THEOREME 5. – *S'il y a dans* $\mathscr{L}$ *une courbe sans points dans* $\mathrm{M}_{2n+1}(\mathscr{L})$ *avec un arc de points de* $\mathrm{T}_{2k+1}(\mathscr{L})$ $(k<n)$, *alors* $\mathrm{D}_n(\mathscr{L})\neq\varnothing$.

Démonstration. – Soit $\mathrm{L}(p)$ la courbe de $\mathscr{L}$ telle que $\mathrm{L}(p)\cap \mathrm{M}_{2n+1}(\mathscr{L})=\varnothing$ et avec un arc de points $z\in \mathrm{L}(p)\cap \mathrm{T}_{2k+1}(\mathscr{L})$. La fonction de Zamfirescu associée à $\mathrm{L}(p)$ jouit de la propriété $[fr\, f((a,b))]\cap f((a,b))\neq\varnothing$ (lemme 3). De plus d'après le lemme 2 pour le point $y\in[fr\, f((a,b))]\cap f((a,b))$ on a $1\leq \operatorname{card} f^{-1}(y)\leq n-1$, c'est-à-dire $\psi(y)\in \mathrm{D}_n(\mathscr{L})$.

COROLLAIRE 6. – *S'il y a dans* $\mathscr{L}$ *une courbe sans points dans* $\mathrm{M}_7(\mathscr{L})$ *avec un arc de points de* $\mathrm{T}_5(\mathscr{L})$, *alors* $\mathrm{D}_3(\mathscr{L})$ *n'est pas vide*.

THEOREME 7. – *S'il y a dans* $\mathscr{L}$ *une courbe sans points dans* $\mathrm{M}_{2k+2}(\mathscr{L})$ *avec un point de* $\mathrm{T}_{2k+1}(\mathscr{L})$, *alors* $\mathrm{D}_{k+1}(\mathscr{L})\neq\varnothing$.

Démonstration. – Il n'y a rien à changer à la démonstration du Théorème 5, sauf faire usage du lemme 4 au lieu du lemme 3.

Remarque. – Dans le cas $k=1$ on trouve un résultat déjà connu ([5]).

COROLLAIRE 8. – *S'il y a dans* $\mathscr{L}$ *une courbe sans points dans* $\mathrm{M}_6(\mathscr{L})$ *avec un point de* $\mathrm{T}_5(\mathscr{L})$, *alors* $\mathrm{D}_3(\mathscr{L})$ *n'est pas vide*.

THEOREME 9. – *Si* $\mathrm{M}_{2n+1}(\mathscr{L})=\varnothing$ *et si* $\mathrm{M}_{2n-1}(\mathscr{L})\neq\varnothing$, *alors* $\mathrm{D}_n(\mathscr{L})\neq\varnothing$.

Démonstration. – En observant que si $\mathrm{M}_{2n+1}(\mathscr{L})=\varnothing$, même int $\mathrm{M}_{2n+1}(\mathscr{L})=\varnothing$ et $\mathrm{M}_\infty(\mathscr{L})=\varnothing$, d'après l'article [4] on obtient que si $\mathrm{M}_{2n+1}(\mathscr{L})=\varnothing$, alors $\mathrm{M}_{2n}(\mathscr{L})=\varnothing$. Puisque par hypothèse il y a au moins un point $z\in \mathrm{M}_{2n-1}(\mathscr{L})$, alors $z\in \mathrm{T}_{2n-1}(\mathscr{L})$ et une courbe par z satisfait aux conditions du Théorème 7.

COROLLAIRE 10. – *Si* $M_7(\mathscr{L}) = \emptyset$ *et si* $M_5(\mathscr{L}) \neq \emptyset$, *alors* $D_3(\mathscr{L}) \neq \emptyset$.

Définition 1. – $\mathscr{L}$ *a la propriété* C_2 *dans* $p_0 \in C$, *si* $p \to p_0$ *sur* C *et* $L(p) \neq L(p_0)$ *impliquent que* $L(p) \cap L(p_0)$ *converge* (voir [6] ou [8]).

THEOREME 11. – *S'il y a dans* $\mathscr{L}$ *une courbe* $L(p)$ *sans points dans* $M_{2n+1}(\mathscr{L})$ *et si* $\mathscr{L}$ *a la propriété* C_2 *dans* p, *alors* $D_n(\mathscr{L}) \neq \emptyset$.

Démonstration. – Pour la fonction f associée à $L(p)$ on a que $\lim_{x\to a} f(x)$ et $\lim_{x\to b} f(x)$ existent (lemme 1) et puisque $\mathscr{L}$ a la propriété C_2 dans p, elles sont égales. Alors il y a au moins un maximum ou un minimum absolu dans un point de (a, b), par conséquent la thèse suit du lemme 2.

COROLLAIRE 12. – *S'il y a dans* $\mathscr{L}$ *une courbe* $L(p)$ *sans points dans* $M_7(\mathscr{L})$ *et si* $\mathscr{L}$ *a la propriété* C_2 *dans* p, *alors* $D_3(\mathscr{L})$ *n'est pas vide.*

THEOREME 13. – *S'il y a dans* $\mathscr{L}$ *une courbe* $L(p)$ *sans points dans* $M_{2k+1}(\mathscr{L})$ *(où* $k \geq 3$*) telle que*:

i) *l'arc* $L(p) \cap M_2(\mathscr{L})$ *soit fermé sur* $L(p)$ *et si*:

ii) $\mathscr{L}$ *a la propriété* C_2 *dans* p,

iii) $q \to p$ *sur* C *implique que* $L(p) \cap L(q)$ *converge vers un extrêmum de l'arc* $L(p) \cap M_2(\mathscr{L})$,

alors $D_{k-1}(\mathscr{L}) \neq \emptyset$.

Remarque. – Pour $k = 4$ on a $D_3(\mathscr{L}) \neq \emptyset$ et pour $k = 3$ on a $T_2(\mathscr{L}) \neq \emptyset$.

Démonstration. – La fonction f associée à $L(p)$ satisfait à la condition $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to b} f(x)$: soit z leur valeur. D'après les hypothèses on a $z \in [fr\, f((a, b))] \cap f((a, b))$ et (d'après le lemme 2) $1 \leq \operatorname{card} f^{-1}(z) \leq k - 1$. Mais $\operatorname{card} f^{-1}(z) \neq k - 1$ puisque au cas contraire il y aurait dans un voisinage de z des points z' tels que $\operatorname{card} f^{-1}(z') \geq 2(k-1) + 2 = 2k$, absurde.

Remarque aux Théorèmes 5, 7, 11, 13. – Soit $L(p)$ la courbe du Théorème 5. Si $L(p)$ jouit aussi de la propriété que l'arc $L(p) \cap M_2(\mathscr{L}) = (t, s]$ (1) ou bien $[t, s]$ contient un sous-arc $(r, s]$ sans points dans $M_{2h+1}(\mathscr{L})$ $(h < n)$, alors $D_h(\mathscr{L}) \neq \emptyset$. De même on peut obtenir une extension des résultats des Théorèmes 7, 11 et 13.

Définition 2. – $\mathscr{L}$ *est* monotone (strictement monotone) *dans* $q \in C$ *par rapport à* $L(p)$ *s'il y a un arc* γ *avec* $q \in \operatorname{int} \gamma$ *tel que* $L(x) \cap L(p)$ *soit une fonction monotone (strictement monotone) de* x *sur chaque composante de* $\gamma - \{q\}$. *Si* q *coïncide avec* p *on dit simplement que* $\mathscr{L}$ *est* monotone (strictement monotone) *dans* p (définition 3 de [8]).

(1) Soit $[t, s]$ un arc de $L(p)$, nous écrivons «*arc* $(t, s]$» au lieu de «*arc* $[t, s] - \{t\}$».

En observant dans les corollaires 6 et 8 que $L(p) \cap M_2(\mathscr{L})$ est un arc qui n'est pas ouvert sur $L(p)$, c'est-à-dire $L(p) \cap M_2(\mathscr{L}) = (r, s]$ ou bien $[r, s]$ on a le suivant

THEOREME 14. – *Dans les mêmes hypothèses du corollaire* 6 (*ou du corollaire* 8) *si l'on suppose aussi que* $\mathscr{L}$ *soit monotone par rapport à* $L(p)$ *dans les points* q *tels que* $L(p) \cap L(q) = \{s\}$, *on obtient* $T_3(\mathscr{L}) \neq \varnothing$.

Démonstration. – Soit f la fonction associée à $L(p)$ et soient x_1, x_2, x_3, x_4 les points de (a, b) tels que $a < x_1 < \cdots < x_4 < b$ et $f(x_1) = \cdots = f(x_4) = z$ où $\psi(z)$ est le point de $T_5(\mathscr{L})$ (ou un point de l'arc de points de $T_5(\mathscr{L})$). Comme dans les lemmes 3 et 4 on obtient $f(x) < z$ ou $f(x) > z$ pour $x < x_1$ et $x > x_4$. Soit $f(x) < z$. La fonction $f/[x_1, x_4]$ continue définie dans un intervalle fermé a au moins un maximum absolu, alors il y a un point $t \in [fr\, f((a, b))] \cap \cap f((a, b))$. D'après le lemme 2 on a $1 \leq \operatorname{card} f^{-1}(t) \leq 2$. Si $\operatorname{card} f^{-1}(t) = 2$ le résultat est prouvé. Si $\operatorname{card} f^{-1}(t) = 1$ on n'a qu'un point x' tel que $f(x') = t$. Puisque $\psi(t) \in [\mathrm{rel}\, fr\, (L(p) \cap M_2(\mathscr{L})] \cap T_2(\mathscr{L})$, $\mathscr{L}$ étant monotone dans $\varphi(x')$ par rapport à $L(p)$, il y a un arc γ de C tel que $\varphi(x') \in \operatorname{int} \gamma$ et $L(x) \cap L(p)$ soit une fonction monotone de x sur chaque composante de $\gamma - \{\varphi(x')\}$. Alors il est possible de trouver un intervalle fermé $I = [y_1, y_2]$ où $y_1 < x' < y_2$ contenu dans $\varphi^{-1}(\gamma)$ tel que f soit monotone sur chaque composante de $I - \{x'\}$. La restriction de f à l'intervalle $[x_1, y_1]$ a un maximum m, de même la restriction de f à l'intervalle $[y_2, x_4]$ a un maximum n. Alors dit $k = \max(m, n)$ on a $k \neq t$ puisque $\operatorname{card} f^{-1}(t) = 1$ et pour tout $h \in (k, t)$ on a $\operatorname{card} f^{-1}(h) = 2$ et donc $\psi(h) \in T_3(\mathscr{L})$.

THEOREME 15. – S'il y a dans $\mathscr{L}$ une courbe $L(p)$ telle que:

i) $L(p) \cap M_2(\mathscr{L})$ *ne soit pas fermé sur* $L(p)$ *et si*:

ii) $\mathscr{L}$ *a la propriété* C_2 *dans* p,

iii) $\mathscr{L}$ *est strictement monotone dans* p,

alors il y a sur $L(p)$ *un arc de points de* $T_3(\mathscr{L})$.

Démonstration. – Les deux limites de la fonction f associée à $L(p)$ existent puisque $\mathscr{L}$ est monotone dans p et elles sont égales puisque $\mathscr{L}$ a la propriété C_2 dans p: soit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to b} f(x) = \alpha$. Puisque $L(p) \cap M_2(\mathscr{L})$ n'est pas fermé, on déduit que $f((a, b))$ n'est pas fermé, donc on a (voir [8]) par exemple $f(x) > \alpha$ pour tout x. D'après iii) il y a un intervalle (a, c) et un intevalle (d, b) où f est strictement monotone. La fonction $f/[c, d]$ a au moins un minimum dans un point $t \in [c, d]$. Alors dit $\varepsilon = \inf(f(c), f(t), f(d))$ on a pour tout $h \in (\alpha, \varepsilon)$ $\operatorname{card} f^{-1}(h) = 2$ et donc $\psi(h) \in T_3(\mathscr{L})$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. GRÜNBAUM (1966) – *Continuous families of curves*, « Can. J. Math. », *18*, 529–537.
[2] T. ZAMFIRESCU (1967) – *Sur les familles continues de courbes* (Note I), « Rend. Lincei », ser. VIII, *42* (6), 771–774.
[3] T. ZAMFIRESCU (1967) – *Sur les familles continues de courbes* (Note II), « Rend. Lincei », ser. VIII, *43* (1–2), 13–17.
[4] T. ZAMFIRESCU (1969) – *On planar continuous families of curves* « Can. J. Math. », *21*, 513–530.
[5] T. ZAMFIRESCU (1972) – *Sur les familles continues de courbes* (Note V), « Rend. Lincei », ser. VIII, *53* (6), 505–507.
[6] T. ZAMFIRESCU – *Spreads* (à paraître dans « Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg »).
[7] C. IVAN (1973) – *On spreads of curves*, « Rend. Lincei », *55*, 46–49
[8] A. GANDINI ZUCCO (1979) – *Sur une conjecture de B. Grünbaum concernant les familles continues de courbes*, « Rend. Lincei », *66* (5).